Riešenia štvrtej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

22. novembra 2023

Úloha 1. Nech Σ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky. Jazyk $\Phi(L_1, L_2)$ získame tak, že pre každú dvojicu slov $u \in L_1$ a $v \in L_2$ *rovnakej dĺžky* $|u| = |v| = n$ vezmeme do jazyka $\Phi(L_1, L_2)$ slovo dĺžky $2n$ obsahujúce striedavo písmená oboch týchto slov – zreťazením jeho symbolov na nepárnych pozíciách teda získame slovo u a zreťazením symbolov na párnych pozíciách slovo v. Presnejšie:

$$\Phi(L_1, L_2) = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \mid n \in \mathbb{N};\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \Sigma;\\ a_1 \ldots a_n \in L_1;\ b_1 \ldots b_n \in L_2\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu Φ. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{R}$ *je uzavretá* na operáciu Φ. Nech L_1, L_2 sú ľubovoľné dva regulárne jazyky nad abecedou Σ a $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ sú deterministické konečné automaty také, že $L(A_1) = L_1$ a $L(A_2) = L_2$. Zostrojíme deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akceptujúci jazyk $\Phi(L_1, L_2)$.

Automat A bude na vstupnom slove w súčasne simulovať výpočet automatu A_1 na slove tvorenom symbolmi na nepárnych pozíciách slova w a výpočet automatu A_2 na slove tvorenom symbolmi na párnych pozíciách slova w. V stave si teda bude pamätať stavy oboch automatov, ako aj to, ktorý z nich má byť simulovaný v nasledujúcom kroku výpočtu. Akceptovať bude automat A v prípade, že sú v akceptačnom stave obidva simulované automaty a súčasne bolo prečítané slovo párnej dĺžky – na rade by teda v danom momente mala byť simulácia automatu A_1.

Formálne: vezmime $K = K_1 \times K_2 \times \{1, 2\}$, $q_0 = [q_{0,1}, q_{0,2}, 1]$, $F = F_1 \times F_2 \times \{1\}$ a pre všetky $p \in K_1$, $q \in K_2$ a $c \in \Sigma$ položme

$$\delta([p, q, 1], c) = [\delta_1(p, c), q, 2]$$

a

$$\delta([p, q, 2], c) = [p, \delta_2(q, c), 1].$$

Ľahko by sme dokázali, že pre všetky $w \in \Sigma^*$, $p \in K_1$ a $q \in K_2$ je $(q_0, w) \vdash_A^* ([p, q, 1], \varepsilon)$ práve vtedy, keď $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \Sigma$ také, že $(q_{0,1}, a_1 \ldots a_n) \vdash_{A_1}^* (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, b_1 \ldots b_n) \vdash_{A_2}^* (q, \varepsilon)$; podobne $(q_0, w) \vdash_A^* ([p, q, 2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n a_{n+1}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ a písmená $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_n \in \Sigma$ také, že $(q_{0,1}, a_1 \ldots a_{n+1}) \vdash_{A_1}^* (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, b_1 \ldots b_n) \vdash_{A_2}^* (q, \varepsilon)$. Z voľby množiny akceptačných stavov teda vyplýva $L(A) = \Phi(L_1, L_2)$. □

Úloha 2. Nech Σ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky. Jazyk $\Psi(L_1, L_2)$ získame tak, že pre každú dvojicu slov $u \in L_1$ a $v \in L_2$ *rovnakej dĺžky* $|u| = |v| = n$ vezmeme do jazyka $\Psi(L_1, L_2)$ všetky slová dĺžky $2n$ získané „premiešaním“ slov u a v zachovávajúcim relatívne poradie symbolov v oboch slovách. Pre ľubovoľné faktorizácie $u = u_1 \ldots u_m$, $v = v_1 \ldots v_m$, kde $u_1, \ldots, u_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ sú *slová*, tak do jazyka $\Psi(L_1, L_2)$ bude patriť slovo $u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_m v_m$; niektoré z podslov $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ pritom môžu byť aj prázdne. Presnejšie:

$$\Psi(L_1, L_2) = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_m v_m \mid m \in \mathbb{N};\ u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \in \Sigma^*;\\ |u_1 \ldots u_m| = |v_1 \ldots v_m|;\ u_1 \ldots u_m \in L_1;\ v_1 \ldots v_m \in L_2\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu Ψ. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Trieda $\mathscr{R}$ *nie je uzavretá* na operáciu Ψ. Ak totiž vezmeme regulárne jazyky $L_1 = a^*$ a $L_2 = b^*$ – obidva môžeme uvažovať napríklad nad spoločnou abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ – dostaneme

$$\Psi(L_1, L_2) = \{a^{k_1} b^{\ell_1} \ldots a^{k_m} b^{\ell_m} \mid m, k_1, \ldots, k_m, \ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathbb{N};\ k_1 + \ldots + k_m = \ell_1 + \ldots + \ell_m\} =\\ = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : \#_a(w) = n\ \wedge\ \#_b(w) = n\} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}.$$

O jazyku $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ pritom vieme, že nie je regulárny, keďže napríklad $L \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{R}$. □