# Riešenia piatej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

6. decembra 2023

**Úloha 1.** Zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ nazveme *neklesajúcim*, ak žiaden jeho prechod nezníži celkový počet symbolov na zásobníku: pre všetky $q \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$ je teda $\delta(q, z, Z)$ konečnou podmnožinou $K \times \Gamma^+$ (namiesto $K \times \Gamma^*$ pri všeobecných zásobníkových automatoch). Nech $\mathscr{L}$ je trieda jazykov akceptovaných neklesajúcimi zásobníkovými automatmi *stavom*:

$$\mathscr{L} = \{L(A) \mid A \text{ je neklesajúci zásobníkový automat}\}.$$

Porovnajte triedu jazykov $\mathscr{L}$ s triedami $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}_{CF}$.

*Riešenie.* Spomedzi symbolov uložených na zásobníku neklesajúceho zásobníkového automatu môže mať na ďalší priebeh výpočtu vplyv vždy iba symbol na jeho vrchu. Ide teda o konečnú informáciu, ktorú si môžeme pamätať v stavoch konečného automatu – dokážeme teda najprv, že $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$.

Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je neklesajúci zásobníkový automat. Zostrojíme nedeterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L(A)$. V stavoch automatu $A'$ si budeme pamätať stav automatu $A$, ako aj symbol na vrchu zásobníka[1] automatu $A$ – položíme teda $K' = K \times \Gamma$. Počiatočným stavom automatu $A'$ bude $q_0' = [q_0, Z_0]$, pretože na začiatku výpočtu je automat $A'$ v stave $q_0$ a na vrchu zásobníka má symbol $Z_0$; množina akceptačných stavov automatu $A'$ zas bude daná ako $F' = F \times \Gamma$, pretože automat $A$ akceptuje kedykoľvek svoj vstup dočíta v stave z množiny $F$ (bez ohľadu na symbol na vrchu zásobníka). Prechodovú funkciu $\delta'$ automatu $A'$ napokon môžeme zadať pre všetky $p \in K$, $Z \in \Gamma$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ako

$$\delta'([p, Z], z) = \{[q, Z'] \mid \exists \gamma \in \Gamma^* : (q, \gamma Z') \in \delta(p, z, Z)\};$$

množina napravo totiž evidentne obsahuje všetky dvojice $[q, Z']$ také, že po vykonaní prechodu na $z$ z konfigurácie so stavom $p$ a symbolom $Z$ na vrchu zásobníka sa automat $A$ môže dostať do konfigurácie so stavom $q$ a symbolom $Z'$ na vrchu zásobníka.

Dokážme ďalej aj opačnú inklúziu $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{L}$. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je ľubovoľný nedeterministický zásobníkový automat. Neklesajúci zásobníkový automat $A' = (K', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', F')$ spĺňajúci $L(A') = L(A)$ môže automat $A$ jednoducho simulovať s tým, že na zásobníku bude po celú dobu výpočtu uložený iba symbol $Z_0'$ – to znamená, že $K' = K$, $\Gamma' = \{Z_0'\}$, $q_0' = q_0$, $F' = F$ a pre všetky $p \in K'$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ je

$$\delta'(p, z, Z_0') = \{(q, Z_0') \mid q \in \delta(p, z)\}.$$

Vo výsledku tak zisťujeme, že $\mathscr{L} = \mathscr{R} \subsetneq \mathscr{L}_{CF}$. □

**Úloha 2.** Zistite, či existujú jazyky $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ také, že $L_1 \cap L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$ a zároveň

$$(L_1 \cap L_2)^C \notin \mathscr{L}_{CF}.$$

Svoje tvrdenie dokážte.

*Riešenie.* Jazyk $\{d, e, f\}^* - \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je bezkontextový, pretože ho možno – podobne ako vo štvrtej úlohe sady na cvičenia č. 10 – vyjadriť ako

$$\{d, e, f\}^* - \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\} = (\{d, e, f\}^* - (d^* e^* f^*)) \cup \bigcup_{i=1}^{3} \bigcup_{j=1}^{3} \{d^{n_1} e^{n_2} f^{n_3} \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N};\ n_i < n_j\};$$

evidentne pritom ide o konečné zjednotenie bezkontextových jazykov.

[1] Neklesajúce zásobníkové automaty zjavne nikdy nemôžu vyprázdniť svoj zásobník.

Uvažujme teraz jazyky

$$L_1 = \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{d, e, f\}^* - \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\})$$

a

$$L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{d, e, f\}^* - \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\})$$

nad abecedou $\{a, b, c, d, e, f\}$. Z uvedeného vyplýva, že v oboch prípadoch ide o zjednotenie dvoch bezkontextových jazykov – teda $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$.

Prienik týchto dvoch jazykov je daný ako

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (\{d, e, f\}^* - \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\})\,.$$

Keby bol tento jazyk bezkontextový, musel by byť vďaka uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{CF}$ na prienik s regulárnym jazykom bezkontextový aj jazyk

$$(L_1 \cap L_2) \cap a^* b^* c^* = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

o ňom však vieme, že bezkontextový nie je. Teda $L_1 \cap L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$.

Podobne

$$(L_1 \cap L_2)^C = (\{a, b, c\}^* \cup \{d, e, f\}^*)^C \cup (\{a, b, c\}^* - \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Keby bol tento jazyk bezkontextový, musel by byť vďaka uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{CF}$ na prienik s regulárnym jazykom bezkontextový aj jazyk

$$(L_1 \cap L_2)^C \cap d^* e^* f^* = \{d^n e^n f^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

čo je opäť spor. Teda $(L_1 \cap L_2)^C \notin \mathscr{L}_{CF}$ a hľadanými jazykmi sú jazyky $L_1$ a $L_2$. $\square$