# Riešenia úloh z malej písomky

Peter Kostolányi

11. novembra 2024

**Úloha 1.** Nech $\Sigma$ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú jazyky. *Vložením* jazyka $L_2$ do jazyka $L_1$ nazveme jazyk

$$L_1 \leftarrow L_2 = \{uxv \mid u, v \in \Sigma^*;\ uv \in L_1;\ x \in L_2\}.$$

Nech teraz $L_1, L_1', L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú ľubovoľné jazyky. Porovnajte jazyky

$$(L_1 \cap L_1') \leftarrow L_2 \qquad \text{a} \qquad (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L_1' \leftarrow L_2).$$

Svoje tvrdenia dokážte.

*Riešenie.* Dokážeme, že $(L_1 \cap L_1') \leftarrow L_2 \subseteq (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L_1' \leftarrow L_2)$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Nech $w \in (L_1 \cap L_1') \leftarrow L_2$. Potom $w = uxv$ pre nejaké $u, v, x \in \Sigma^*$ také, že $uv \in L_1 \cap L_1'$ a $x \in L_2$. Z $uv \in L_1 \cap L_1'$ dostávame $uv \in L_1$ a zároveň $uv \in L_1'$. Keďže $w = uxv$, kde $uv \in L_1$ a $x \in L_2$, je $w \in L_1 \leftarrow L_2$; keďže navyše $w = uxv$ pre $uv \in L_1'$ a $x \in L_2$, je $w \in L_1' \leftarrow L_2$. Súčasne teda $w \in L_1 \leftarrow L_2$ a $w \in L_1' \leftarrow L_2$, z čoho $w \in (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L_1' \leftarrow L_2)$.

$\not\supseteq$: Uvažujme napríklad abecedu $\Sigma = \{a\}$ a jazyky $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_1' = \{a\}$ a $L_2 = \{\varepsilon, a\}$. Potom $a \in L_1 \leftarrow L_2$, pretože $a = uxv$ pre $u = \varepsilon$, $x = a$ a $v = \varepsilon$, pričom $uv = \varepsilon \in L_1$ a $x = a \in L_2$. Súčasne $a \in L_1' \leftarrow L_2$, lebo $a = uxv$ pre $u = a$, $x = \varepsilon$ a $v = \varepsilon$, pričom $uv = a \in L_1'$ a $x = \varepsilon \in L_2$. To znamená, že $a \in (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L_1' \leftarrow L_2)$. Na druhej strane ale neexistujú žiadne $u, x, v \in \Sigma^*$ také, že $a = uxv$ pre $uv \in L_1 \cap L_1' = \emptyset$ a $x \in L_2$ – teda $a \notin (L_1 \cap L_1') \leftarrow L_2$. $\square$

**Úloha 2.** Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{a^{2i}cv \mid i \in \mathbb{N};\ v \in \{a,b\}^*;\ |v| = i\}$$

nad abecedou $\Sigma = \{a,b,c\}$. Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

*Riešenie.* Dokážeme, že jazyk $L$ je generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N,T,P,\sigma)$, kde $N = \{\sigma\}$, $T = \{a,b,c\}$ a

$$P = \{\sigma \to aa\sigma a \mid aa\sigma b \mid c\}.$$

Namiesto rovnosti $L(G) = L$ dokážeme silnejšie tvrdenie $F(G) = F$, kde

$$F = \{a^{2i}sv \mid i \in \mathbb{N};\ v \in \{a,b\}^*;\ |v| = i;\ s \in \{\sigma,c\}\}.$$

Zrejme pritom $F \cap T^* = L$, takže z rovnosti $F(G) = F$ naozaj vyplynie aj $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in F(G)$, čiže $\sigma \Rightarrow^n x$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Indukciou vzhľadom na $n$ dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma = a^{2i}sv$ pre $i = 0$, $s = \sigma$ a $v = \varepsilon$, pričom v takom prípade je aj $|v| = |\varepsilon| = 0 = i$; preto $x \in F$.

Nech teraz tvrdenie platí pre $n = k$; uvažujme $n = k+1$. Odvodenie $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$ vieme v takom prípade prepísať ako $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$, kde na odvodenie $\sigma \Rightarrow^k y$ sa vzťahuje indukčný predpoklad. To znamená, že $y = a^{2j}tu$ pre nejaké $j \in \mathbb{N}$, $u \in \{a,b\}^*$ také, že $|u| = j$ a $t \in \{\sigma,c\}$.

Keďže $y \Rightarrow x$, musí slovo $y$ obsahovať aspoň jeden neterminál – nutne teda $t = \sigma$. Slovo $x$ musí vzniknúť zo slova $y$ použitím niektorého z pravidiel $\sigma \to aa\sigma a$, $\sigma \to aa\sigma b$ alebo $\sigma \to c$ na jediný výskyt neterminálu $\sigma$ v slove $y$. V prvom prípade dostávame $x = a^{2j+2}\sigma au$; stačí teda vziať $i = j+1$, $s = \sigma$, $v = au$ a zisťujeme, že $x = a^{2i}sv \in F$. Podobne v druhom prípade je $x = a^{2j+2}\sigma bu$, takže môžeme vziať $i = j+1$, $s = \sigma$, $v = bu$ a $x = a^{2i}sv \in F$. V zostávajúcom prípade je $x = a^{2j}cu$, takže pre $i = j$, $s = c$, $v = u$ je opäť $x = a^{2i}sv \in F$.

$\supseteq$: Dokážeme, že všetky slová v jazyku $F$ – čiže všetky slová $x = a^{2i}sv$ pre $i \in \mathbb{N}$, $v \in \{a,b\}^*$ také, že $|v| = i$ a $s \in \{\sigma,c\}$ – sú vetnými formami v gramatike $G$. Indukciou vzhľadom na $i$.

Pre $i = 0$ je buď $x = \sigma$, alebo $x = c$. Súčasne ale $\sigma \Rightarrow^0 \sigma$ a vďaka existencii pravidla $\sigma \to c$ aj $\sigma \Rightarrow c$; v oboch prípadoch teda $x \in F(G)$.

Nech teraz tvrdenie platí pre $i = k$; uvažujme $i = k+1$ a ľubovoľné $x = a^{2(k+1)}sv$ pre $v \in \{a,b\}^*$ také, že $|v| = k+1$ a $s \in \{\sigma,c\}$. Nech $v = du$ pre nejaké $d \in \{a,b\}$ a $u \in \{a,b\}^k$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^{2k}\sigma u$, z čoho použitím pravidla $\sigma \to aa\sigma d \in P$ dostávame

$$\sigma \Rightarrow^* a^{2k}\sigma u \Rightarrow a^{2k}aa\sigma du = a^{2(k+1)}\sigma v.$$

Indukčný krok je teda už dokázaný v prípade, že $s = \sigma$. Pre $s = c$ napokon použitím pravidla $\sigma \to c$ z uvedeného dostávame

$$\sigma \Rightarrow^* a^{2(k+1)}\sigma v \Rightarrow a^{2(k+1)}cv,$$

takže naozaj $x \in F(G)$. $\square$

**Úloha 3.** Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta \mid ab\gamma \\ &\alpha \to a\beta\beta \mid b\sigma b\gamma \mid a \\ &\beta \to a\beta \mid \varepsilon \\ &\gamma \to b\beta\beta \mid \beta\beta \mid a\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku $G$ do „bezepsilonového“ normálneho tvaru. Ekvivalenciu výslednej gramatiky s pôvodnou netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; pri použití akejkoľvek inej konštrukcie je dôkaz jej správnosti nutný.

*Riešenie.* Nájdeme najprv množinu vymazávajúcich neterminálov $E$:

1. $E_0 = \{\beta\}$,
2. $E_1 = E_0 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\}$,
3. $E_2 = E_1 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\} = E_1$,

Teda $E = E_2 = \{\beta, \gamma\}$. Z pravidiel gramatiky $G$ následne získame nasledujúce nové pravidlá:

$$\begin{aligned}
\sigma \to \alpha\beta a\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta a \mid \alpha a\beta \mid \alpha a, \\
\sigma \to \alpha\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to \alpha\beta \mid \alpha, \\
\sigma \to ab\gamma &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to ab\gamma \mid ab, \\
\alpha \to a\beta\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \alpha \to a\beta\beta \mid a\beta \mid a, \\
\alpha \to b\sigma b\gamma &\quad\rightsquigarrow\quad \alpha \to b\sigma b\gamma \mid b\sigma b, \\
\alpha \to a &\quad\rightsquigarrow\quad \alpha \to a, \\
\beta \to a\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \beta \to a\beta \mid a, \\
\beta \to \varepsilon &\quad\rightsquigarrow\quad \beta \to \varepsilon, \\
\gamma \to b\beta\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to b\beta\beta \mid b\beta \mid b, \\
\gamma \to \beta\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to \beta\beta \mid \beta \mid \varepsilon, \\
\gamma \to a &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to a.
\end{aligned}$$

Po odstránení duplikátov a pravidiel s prázdnym slovom na pravej strane tak dostávame výslednú gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ s

$$\begin{aligned} P' = \{&\sigma \to \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta a \mid \alpha a\beta \mid \alpha a \mid \alpha\beta \mid \alpha \mid ab\gamma \mid ab \\ &\alpha \to a\beta\beta \mid a\beta \mid a \mid b\sigma b\gamma \mid b\sigma b \\ &\beta \to a\beta \mid a \\ &\gamma \to b\beta\beta \mid b\beta \mid b \mid \beta\beta \mid \beta \mid a\}. \end{aligned}$$

□

**Úloha 4** (Bonus)**.** Nech $\Sigma$ je abeceda a $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ homomorfizmus. Označme ako $h^0\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ identické zobrazenie na $\Sigma^*$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ položme $h^{n+1} := h^n \circ h$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ tak dostávame homomorfizmus[1] $h^n\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, ktorý ku každému $w \in \Sigma^*$ priradí slovo získané zo slova $w$ pomocou $n$ postupných aplikácií homomorfizmu $h$.

Uvažujme ďalej nekonečné postupnosti $(u_n)_{n=0}^{\infty}, (v_n)_{n=0}^{\infty}$ slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ definované nasledovne: $u_0 = a$, $v_0 = b$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$u_{n+1} = u_n v_n \qquad \text{a} \qquad v_{n+1} = v_n u_n.$$

Nájdite homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ a slovo $w \in \Sigma^*$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $u_n = h^n(w)$. Svoje tvrdenie dokážte.

*Riešenie.* Dokážeme, že hľadaným homomorfizmom je homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ taký, že

$$h(a) = ab \qquad \text{a} \qquad h(b) = ba,$$

pričom hľadaným slovom je $w = a$. Spolu s rovnosťou $h^n(a) = u_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ indukciou vzhľadom na $n$ dokážeme aj rovnosť $h^n(b) = v_n$.

Pre $n = 0$ je skutočne $h^0(a) = a = u_0$ a $h^0(b) = b = v_0$. Nech teraz tvrdenie platí pre $n = k \in \mathbb{N}$. Pre $n = k + 1$ potom z indukčného predpokladu

$$h^{k+1}(a) = h^k(h(a)) = h^k(ab) = h^k(a)h^k(b) = u_k v_k = u_{k+1}$$

a

$$h^{k+1}(b) = h^k(h(b)) = h^k(ba) = h^k(b)h^k(a) = v_k u_k = v_{k+1},$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

[1] Zobrazenie $h^n$ je homomorfizmom pre všetky $n \in \mathbb{N}$, pretože identické zobrazenie na $\Sigma^*$ je homomorfizmus a zloženie dvoch homomorfizmov na $\Sigma^*$ je opäť homomorfizmus: ak $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ a $g\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ sú homomorfizmy, pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ je $(g \circ f)(uv) = g(f(uv)) = g(f(u)f(v)) = g(f(u))g(f(v)) = (g \circ f)(u)(g \circ f)(v)$ a $g \circ f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ je teda opäť homomorfizmus.