Riešenia úloh z veľkej písomky

Peter Kostolányi

11. decembra 2023

Úloha 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to a\sigma\alpha \mid b\alpha \mid \alpha\beta \\ &\alpha \to a\beta\gamma \mid aa \\ &\beta \to b\beta\beta \mid b\gamma\gamma \mid \varepsilon \\ &\gamma \to \beta\beta \mid a\beta b\alpha\gamma \mid a\}. \end{aligned}$$

Nájdite „bezepsilonovú“ gramatiku G' takú, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.

Riešenie. Nájdeme najprv množinu E všetkých neterminálov gramatiky G, ktoré možno na niekoľko krokov prepísať na prázdne slovo:

1. $E_0 = \{\beta\}$,
2. $E_1 = E_0 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\}$,
3. $E_2 = E_1 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\} = E_1$.

Teda $E = E_2 = \{\beta, \gamma\}$. Z každého pravidla gramatiky G následne všetkými možnými spôsobmi vypustíme nejakú časť neterminálov z E na pravej strane. Získame tak nasledujúce pravidlá:

$$\begin{aligned}
\sigma \to a\sigma\alpha &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to a\sigma\alpha, \\
\sigma \to b\alpha &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to b\alpha, \\
\sigma \to \alpha\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \sigma \to \alpha\beta \mid \alpha, \\
\alpha \to a\beta\gamma &\quad\rightsquigarrow\quad \alpha \to a\beta\gamma \mid a\beta \mid a\gamma \mid a, \\
\alpha \to aa &\quad\rightsquigarrow\quad \alpha \to aa, \\
\beta \to b\beta\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \beta \to b\beta\beta \mid b\beta \mid b, \\
\beta \to b\gamma\gamma &\quad\rightsquigarrow\quad \beta \to b\gamma\gamma \mid b\gamma \mid b, \\
\beta \to \varepsilon &\quad\rightsquigarrow\quad \beta \to \varepsilon, \\
\gamma \to \beta\beta &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to \beta\beta \mid \beta \mid \varepsilon, \\
\gamma \to a\beta b\alpha\gamma &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to a\beta b\alpha\gamma \mid a\beta b\alpha \mid ab\alpha\gamma \mid ab\alpha, \\
\gamma \to a &\quad\rightsquigarrow\quad \gamma \to a.
\end{aligned}$$

Po odstránení duplikátov a pravidiel s prázdnym slovom na pravej strane tak dostávame výslednú gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ s

$$\begin{aligned} P' = \{&\sigma \to a\sigma\alpha \mid b\alpha \mid \alpha\beta \mid \alpha \\ &\alpha \to a\beta\gamma \mid a\beta \mid a\gamma \mid a \mid aa \\ &\beta \to b\beta\beta \mid b\beta \mid b\gamma\gamma \mid b\gamma \mid b \\ &\gamma \to \beta\beta \mid \beta \mid a\beta b\alpha\gamma \mid a\beta b\alpha \mid ab\alpha\gamma \mid ab\alpha \mid a\}. \end{aligned}$$

□

Úloha 2.

a) Zostrojte deterministický alebo nedeterministický konečný automat pre jazyk $L = (ab)^*b$.

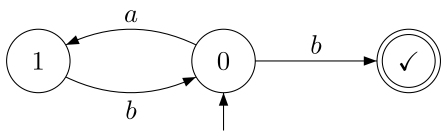
b) Pre každý stav q zostrojeného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sformulujte invariant charakterizujúci jazyk všetkých slov $w \in \Sigma^*$ takých, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)$.

c) Dokážte platnosť týchto invariantov poriadnou matematickou indukciou a vyvoďte z nej správnosť konštrukcie automatu A.

Riešenie. Jazyk L je akceptovaný nedeterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{0, 1, \checkmark\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{\checkmark\}$ a

$$\begin{aligned}
&\delta(0, a) = \{1\}, &\quad &\delta(1, a) = \emptyset, &\quad &\delta(\checkmark, a) = \emptyset,\\
&\delta(0, b) = \{\checkmark\}, & &\delta(1, b) = \{0\}, & &\delta(\checkmark, b) = \emptyset,\\
&\delta(0, \varepsilon) = \emptyset, & &\delta(1, \varepsilon) = \emptyset, & &\delta(\checkmark, \varepsilon) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Prechodový diagram automatu A je na obrázku 1.



Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Pre stavy automatu A dokážeme nasledujúce invarianty:

$$\begin{aligned}
I_0 &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^* (0, \varepsilon) \iff w \in (ab)^*\\
I_1 &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^* (1, \varepsilon) \iff w \in (ab)^*a,\\
I_\checkmark &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^* (\checkmark, \varepsilon) \iff w \in (ab)^*b.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
I_0' &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^n (0, \varepsilon) \Rightarrow w \in (ab)^*,\\
I_1' &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^n (1, \varepsilon) \Rightarrow w \in (ab)^*a,\\
I_\checkmark' &: \forall w \in \Sigma^* : (0, w) \vdash^n (\checkmark, \varepsilon) \Rightarrow w \in (ab)^*b.
\end{aligned}$$

Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana pravdivá iba pri implikácii I_0'. V takom prípade tiež nutne $w = \varepsilon$, pričom $\varepsilon \in (ab)^*$.

Predpokladajme teda pravdivosť uvedených implikácií pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k + 1$.

I_0': Nech $(0, w) \vdash^{k+1} (0, \varepsilon)$. Potom existujú $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a $(0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (0, \varepsilon)$. Keďže $(q, z) \vdash (0, \varepsilon)$, je $0 \in \delta(q, z)$. Z definície funkcie δ teda vyplýva, že $q = 1$ a $z = b$. Z indukčného predpokladu teda $u \in (ab)^*a$, z čoho $w = uz = ub \in (ab)^*$.

I_1': Nech $(0, w) \vdash^{k+1} (1, \varepsilon)$. Potom existujú $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a $(0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (1, \varepsilon)$. Keďže $(q, z) \vdash (1, \varepsilon)$, je $1 \in \delta(q, z)$. Z definície funkcie δ teda $q = 0$ a $z = a$. Vďaka indukčnému predpokladu potom $u \in (ab)^*$, z čoho $w = uz = ua \in (ab)^*a$.

$I_\checkmark'$: Nech $(0, w) \vdash^{k+1} (\checkmark, \varepsilon)$. Potom existujú $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a $(0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (\checkmark, \varepsilon)$. Vďaka $(q, z) \vdash (\checkmark, \varepsilon)$ dostávame $\checkmark \in \delta(q, z)$, a teda nutne $q = 0$ a $z = b$. Z indukčného predpokladu teda $u \in (ab)^*$, z čoho $w = uz = ub \in (ab)^*b$.

$\Leftarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na $|w|$ dokážeme, že pre všetky $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} I_0''&: w \in (ab)^* \Rightarrow (0, w) \vdash^* (0, \varepsilon), \\ I_1''&: w \in (ab)^* a \Rightarrow (0, w) \vdash^* (1, \varepsilon), \\ I_\checkmark''&: w \in (ab)^* b \Rightarrow (0, w) \vdash^* (\checkmark, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ak pritom $|w| = 0$, je $w = \varepsilon$ – ľavá strana je teda pravdivá iba pri implikácii I_0'', pričom triviálne $(0, \varepsilon) \vdash^* (0, \varepsilon)$.

Nech teda implikácie platia pre všetky $w \in \Sigma^*$ spĺňajúce $|w| = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $w \in \Sigma^*$ také, že $|w| = k + 1$.

I_0'': Ak $w \in (ab)^*$ a $|w| = k + 1 > 0$, nutne $w = xb$ pre nejaké $x \in (ab)^* a$ s $|x| = k$. Z indukčného predpokladu teda $(0, x) \vdash^* (1, \varepsilon)$ a keďže $0 \in \delta(1, b)$, máme aj $(0, w) = (0, xb) \vdash^* (1, b) \vdash (0, \varepsilon)$.

I_1'': Ak $w \in (ab)^* a$, nutne $w = xa$ pre nejaké $x \in (ab)^*$ s $|x| = k$. Z indukčného predpokladu teda $(0, x) \vdash^* (0, \varepsilon)$ a vďaka $1 \in \delta(0, a)$ tak dostávame aj $(0, w) = (0, xa) \vdash^* (0, a) \vdash (1, \varepsilon)$.

$I_\checkmark''$: Ak $w \in (ab)^* b$, nutne $w = xb$ pre nejaké $x \in (ab)^*$ s $|x| = k$. Z indukčného predpokladu teda $(0, x) \vdash^* (0, \varepsilon)$ a keďže $\checkmark \in \delta(0, b)$, dostávame aj $(0, w) = (0, xb) \vdash^* (0, b) \vdash (\checkmark, \varepsilon)$.

Keďže je $\checkmark$ jediným akceptačným stavom automatu A, slovo $w \in \Sigma^*$ patrí do $L(A)$ práve vtedy, keď $(0, w) \vdash^* (\checkmark, \varepsilon)$. To vďaka invariantu $I_\checkmark$ nastane práve vtedy, keď $w \in (ab)^* b$. Skutočne teda $L(A) = L$. $\square$

Úloha 3. Preverte pravdivosť nasledujúcich tvrdení a svoje odpovede vyznačte krížikmi do príslušných políčok. Zdôvodnenia odpovedí nie sú potrebné.

		áno	**nie**
1.	Pre všetky abecedy Σ, Γ, homomorfizmy $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ a konečné jazyky $L \subseteq \Gamma^*$ má jazyk $h^{-1}(L)$ najviac toľko prvkov, čo L.		$\times$
2.	Pre všetky abecedy Σ, Γ, homomorfizmy $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ a konečné jazyky $L \subseteq \Gamma^*$ má jazyk $h^{-1}(L)$ aspoň toľko prvkov, čo L.		$\times$
3.	Ku každej regulárnej gramatike existuje ekvivalentná bezkontextová gramatika v Chomského normálnom tvare.	$\times$	
4.	Ku každému zásobníkovému automatu A existuje deterministický Turingov stroj B taký, že $L(B) = N(A)$.	$\times$	
5.	Pre každý jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ existuje $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ také, že ak pre slovo $w \in L$ s $\lvert w\rvert \geq p$ existujú $u, x, v \in \Sigma^*$ s $w = uxv$, $\lvert ux\rvert \leq p$, $\lvert x\rvert \geq 1$ a $ux^2v \notin L$, nutne $L \notin \mathscr{R}$.		$\times$
6.	Ak je jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ regulárny, pre všetky $p \in \mathbb{N}$ a všetky $w \in L$ s $\lvert w\rvert \geq p$ je $ux^2v \in L$ kedykoľvek $u, x, v \in \Sigma^*$ sú také, že $w = uxv$, $\lvert ux\rvert \leq p$ a $\lvert x\rvert \geq 1$.		$\times$
7.	Ak $L_1 \notin \mathscr{R}$ a $L_2 \notin \mathscr{R}$, tak $L_1 \cup L_2 \notin \mathscr{R}$.		$\times$
8.	Ak $L_1 \in \mathscr{L}_{CF}$ a $L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$, tak $L_1 \cap L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$.		$\times$
9.	Komplement každého rekurzívne vyčísliteľného jazyka je rekurzívne vyčísliteľný.		$\times$
10.	Pre všetky $L_1 \in \mathscr{L}_{RE}$ a $L_2 \in \mathscr{L}_{rec}$ je $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{RE}$, ale vo všeobecnosti nemusí byť $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{rec}$.	$\times$	

Riešenie.

1. **Nie**. Ak napríklad $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a\}$, $h(a) = h(b) = a$ a $L = \{a\}$, je $h^{-1}(L) = \{a, b\}$ – a teda $2 = \left|h^{-1}(L)\right| > |L| = 1$.

2. **Nie**. Ak napríklad $\Sigma = \Gamma = \{a\}$, $h(a) = aa$ a $L = \{a\}$, je $h^{-1}(L) = \emptyset$ – a teda $0 = \left|h^{-1}(L)\right| < |L| = 1$.

3. **Áno**. Každá regulárna gramatika je zároveň aj bezkontextová, a teda k nej existuje ekvivalentná bezkontextová gramatika v Chomského normálnom tvare (tá už, samozrejme, typicky nebude regulárna).

4. **Áno**. Ide o dôsledok inklúzie $\mathscr{L}_{CF} \subseteq \mathscr{L}_{RE}$.

5. **Nie**. Uvažujme napríklad jazyk $L = (aa)^*$ a za účelom sporu predpokladajme, že $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ zo znenia tvrdenia existuje. Potom napríklad pre $w = a^{2p}$ je $w \in L$ a súčasne $|w| \geq p$. Pre $u = \varepsilon$, $x = a$ a $v = a^{2p-1}$ navyše zrejme $w = uxv$, $|ux| \leq p$, $|x| \geq 1$ a $ux^2y = a^{2p+1} \notin L$. V takom prípade by ale malo byť $L \notin \mathscr{R}$, kým zrejme $L \in \mathscr{R}$: spor.

   Podobnosť tvrdenia s pumpovacou lemou pre regulárne jazyky je čisto náhodná.

6. **Nie**. Uvažujme opäť regulárny jazyk $L = (aa)^*$ a $p = 1$. Pre $w = aa$ potom zrejme $w \in L$ a $|w| \geq p$. Slová $u = \varepsilon$, $x = a$ a $v = a$ evidentne spĺňajú podmienky $w = uxv$, $|ux| \leq p$ a $|x| \geq 1$, no napriek tomu $ux^2v = aaa \notin L$.

   Podobnosť tvrdenia s pumpovacou lemou pre regulárne jazyky je opäť čisto náhodná.

7. **Nie**. Nech Σ je ľubovoľná abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ je ľubovoľný jazyk taký, že $L \notin \mathscr{R}$. Potom ani $L^C \notin \mathscr{R}$, pretože v opačnom prípade by z uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na komplement vyplynulo aj $L = (L^C)^C \in \mathscr{R}$. Avšak $L \cup L^C = \Sigma^* \in \mathscr{R}$.

8. **Nie**. Napríklad pre $L_1 = L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ je $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$.

9. **Nie**. Napríklad pre diagonálny jazyk L_D je $L_D \in \mathscr{L}_{RE}$, ale $L_D^C \notin \mathscr{L}_{RE}$.

10. **Áno**. Trieda $\mathscr{L}_{RE}$ je uzavretá na prienik a $\mathscr{L}_{rec} \subseteq \mathscr{L}_{RE}$ – ak teda $L_1 \in \mathscr{L}_{RE}$ a $L_2 \in \mathscr{L}_{rec}$, je aj $L_2 \in \mathscr{L}_{RE}$ a $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{RE}$. Ak ale na druhej strane napríklad $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$, $L_1 \in \mathscr{L}_{RE} - \mathscr{L}_{rec}$ a $L_2 = \{0,1\}^* \in \mathscr{L}_{rec}$, jazyk $L_1 \cap L_2 = L_1$ nie je v $\mathscr{L}_{rec}$. $\square$

Úloha 4. Uvažujme bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha\beta\sigma \mid \varepsilon \\ \alpha &\to a\alpha b \mid \varepsilon \\ \beta &\to c\beta \mid c\}. \end{aligned}$$

a) Zostrojte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = L(G)$.

b) Ľahko by sme dokázali, že gramatika G generuje jazyk $L = \{a^n b^n c^k \mid n \in \mathbb{N};\ k \in \mathbb{N} - \{0\}\}^*$. Zistite, či je tento jazyk regulárny a svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie.

a) Zásobníkový automat A bude daný ako $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, \sigma, \alpha, \beta\}$, $Z_0 = \sigma$, $F = \emptyset$ a prechodová funkcia δ je daná nasledovne:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, \sigma) &= \{(q_0, \sigma\beta\alpha), (q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \alpha) &= \{(q_0, b\alpha a), (q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \beta) &= \{(q_0, \beta c), (q_0, c)\}, \\ \delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, c, c) &= \{(q_0, \varepsilon)\}; \end{aligned}$$

pre všetky ostatné $(q, z, Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ je $\delta(q, z, Z) = \emptyset$.

b) Jazyk L *nie je regulárny.* V opačnom prípade by jazyku L podľa pumpovacej lemy prislúchala nejaká konštanta $p \in \mathbb{N}$. Slovo $w = a^p b^p c$ by potom spĺňalo podmienky $w \in L$ a $|w| \geq p$ – museli by tak preň existovať slová $u, x, v \in \{a, b, c\}^*$ s vlastnosťami (i) až (iv) z pumpovacej lemy. Podľa (i) by sme v takom prípade dostali $w = uxv$; vďaka (ii) a (iii) preto $u = a^r$, $x = a^s$ a $v = a^{p-r-s} b^p c$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $s \geq 1$. Použitím (iv) pre $i = 2$ teda zisťujeme, že slovo $ux^2v = a^{p+s} b^p c$ patrí do jazyka L – čo je spor, keďže $p + s > p$. $\square$

Úloha 5. Nech Σ je abeceda a $L, L' \subseteq \Sigma^*$ jazyky. Pripomeňme si, že *ľavým kvocientom* jazyka L podľa jazyka L' nazývame jazyk

$$L' \backslash L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : xw \in L\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na ľavý kvocient podľa regulárneho jazyka – teda či pre všetky $L \in \mathscr{L}_{CF}$ a $L' \in \mathscr{R}$ musí byť $L' \backslash L \in \mathscr{L}_{CF}$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ *je uzavretá* na ľavý kvocient podľa regulárneho jazyka – nech teda $L \in \mathscr{L}_{CF}$ a $L' \in \mathscr{R}$; dokážeme, že $L' \backslash L \in \mathscr{L}_{CF}$.

Nech Σ je abeceda taká, že $L, L' \subseteq \Sigma^*$; nech $A_1 = (K_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, Z_{0,1}, F_1)$ je zásobníkový automat taký, že $L(A_1) = L$ a $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ je nedeterministický konečný automat taký, že $L(A_2) = L'$. Zostrojíme zásobníkový automat A taký, že $L(A) = L' \backslash L$.

Automat A nedeterministicky uhádne slovo $x \in \Sigma^*$ a s použitím prechodov na ε namiesto prechodov na písmená odsimuluje nedeterministicky vybrané výpočty automatov A_1 a A_2 na slove x; ak sa pritom simulácia automatu A_2 skončí v akceptačnom stave, pôjde o známku toho, že $x \in L'$. Vtedy sa automat A bude môcť prepnúť do druhej fázy výpočtu, v ktorej bude pokračovať v simulácii automatu A_1, avšak prechody na písmeno už nebude nahrádzať prechodmi na ε. Po dočítaní vstupného slova w tak automat A bude v konfigurácii zodpovedajúcej nejakej konfigurácii automatu A_1 po prečítaní slova xw; všetky takéto konfigurácie sú pritom dosiahnuteľné. Vo výsledku tak automat A bude akceptovať práve všetky slová $w \in \Sigma^*$, pre ktoré existuje nejaké $x \in L'$ také, že $xw \in L$ – teda práve všetky slová $w \in L' \backslash L$.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $(K_1 \times K_2) \cap K_1 = \emptyset$. Konštrukcia zásobníkového automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ potom bude nasledujúca: $K = (K_1 \times K_2) \cup K_1$, $\Gamma = \Gamma_1$, $q_0 = [q_{0,1}, q_{0,2}]$, $Z_0 = Z_{0,1}$, $F = F_1$. Pre všetky $p \in K_1$, $q \in K_2 - F_2$ a $Z \in \Gamma$ ďalej

$$\delta([p, q], \varepsilon, Z) = \{([p', q'], \gamma) \mid \exists z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : (p', \gamma) \in \delta_1(p, z, Z) \ \wedge \ q' \in \delta_2(q, z)\},$$

pre všetky $p \in K_1$, $q \in F_2$ a $Z \in \Gamma$ vezmime

$$\delta([p, q], \varepsilon, Z) = \{([p', q'], \gamma) \mid \exists z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : (p', \gamma) \in \delta_1(p, z, Z) \ \wedge \ q' \in \delta_2(q, z)\} \cup \{(p, Z)\}$$

a pre všetky $p \in K_1$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$ napokon položme

$$\delta(p, z, Z) = \delta_1(p, z, Z);$$

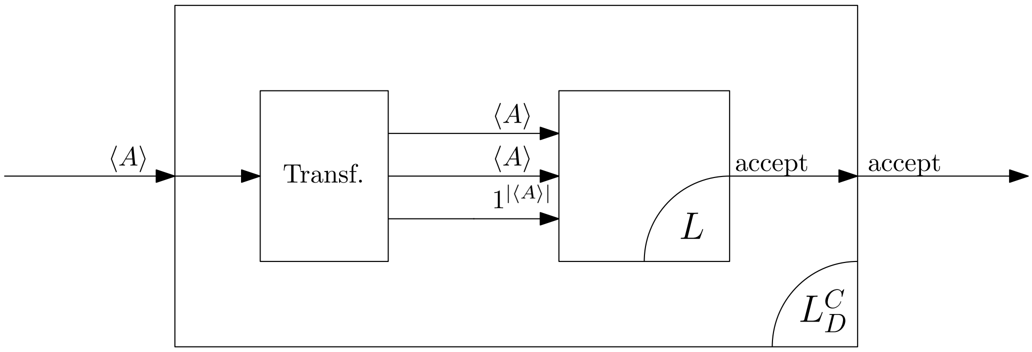
pre zvyšné $q \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$ bude $\delta(q, z, Z) = \emptyset$. □

Úloha 6. Uvažujme rozhodovací problém daný nasledovne:

> **Vstup:** Kód $\langle A \rangle$ deterministického Turingovho stroja A nad abecedou $\{0,1\}$; slovo $w \in \{0,1\}^*$; slovo $x \in 1^*$.
>
> **Výstup:** „Áno“ práve vtedy, keď do jazyka $L(A)$ nepatrí žiadne podslovo u slova w také, že $|u| = |x|$.

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je rekurzívne vyčísliteľný? Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že tento problém *nie je rekurzívne vyčísliteľný* (a teda nemôže byť ani rozhodnuteľný). Nech problému zo zadania zodpovedá jazyk L. Dokážeme, že ak by existoval deterministický Turingov stroj akceptujúci jazyk L – teda keby bol problém zo zadania rekurzívne vyčísliteľný – existoval by aj Turingov stroj akceptujúci jazyk $L_D^C \notin \mathscr{L}_{RE}$, čo je spor.



Obr. 2: Schéma redukcie komplementárneho diagonálneho problému na problém zo zadania.

Vstupom komplementárneho diagonálneho problému je kód $\langle A \rangle$ nejakého Turingovho stroja A – treba ho akceptovať práve vtedy, keď $\langle A \rangle \notin L(A)$. Stroj akceptujúci jazyk L_D^C môže pracovať tak, že tento vstup transformuje na nasledujúcu trojicu vstupov: nezmenený kód $\langle A \rangle$, slovo $w = \langle A \rangle$ a slovo $x = 1^{|\langle A \rangle|}$. Na týchto troch vstupoch následne spustí stroj pre L, ktorý akceptuje práve vtedy, keď do $L(A)$ nepatrí žiadne podslovo slova $\langle A \rangle$ dĺžky $|1^{|\langle A \rangle|}| = |\langle A \rangle|$ – čo skutočne nastane práve vtedy, keď $\langle A \rangle \notin L(A)$. Schéma redukcie je na obrázku 2. $\square$

Úloha 7 (Bonus)**.** Nájdite nekonečný jazyk $L \subseteq a^*$ taký, že pre všetky $L' \subseteq L$ je $L' \in \mathscr{L}_{rec}$ – alebo dokážte, že žiaden taký jazyk neexistuje.

Riešenie. Dokážeme, že *takýto jazyk* L *neexistuje.* Za účelom sporu predpokladajme jeho existenciu – potom nutne $L \in \mathscr{L}_{rec}$, lebo $L \subseteq L$. Keďže je tento jazyk nekonečný, určite existuje nekonečná *rastúca* postupnosť prirodzených čísel $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, pre ktorú je

$$L = \{a^{n_k} \mid k \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Pre všetky $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ je teda a^{n_k} presne k*-te najkratšie* slovo z jazyka L.

Pre všetky $w \in \{0,1\}^*$ teraz označme ako $\varphi(w)$ číslo s binárnou reprezentáciou $1w$ – evidentne tak definujeme bijekciu $\varphi\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N} - \{0\}$. Dokážeme, že podjazyk

$$L' = \{a^{n_{\varphi(w)}} \mid w \in L_D\}$$

jazyka L nemôže byť rekurzívny, čím prídeme k sporu.

Skutočne: keby bol jazyk L' rekurzívny, existoval by deterministický Turingov stroj A rozhodujúci diagonálny problém nasledujúcim spôsobom:

1. Pre vstupné slovo $\langle A \rangle$ nájde slovo $a^{n_{\varphi(\langle A \rangle)}}$ postupnou simuláciou na každom vstupe zastavujúceho deterministického Turingovho stroja pre jazyk L na vstupných slovách $a^0, a^1, a^2, \ldots$; hľadaným slovom je presne $\varphi(\langle A \rangle)$-te spomedzi týchto slov, ktoré simulovaný stroj akceptuje. Keďže je jazyk L nekonečný, stroj A toto slovo vždy v konečnom čase nájde.

2. Na nájdenom slove $a^{n_{\varphi(\langle A \rangle)}}$ odsimuluje výpočet na každom vstupe zastavujúceho deterministického Turingovho stroja pre jazyk L'. Ten toto slovo akceptuje práve vtedy, keď $\langle A \rangle \in L_D$; práve v tomto prípade teda akceptuje aj stroj A.

Keďže je ale diagonálny problém nerozhodnuteľný, takýto stroj A nemôže existovať a jazyk L' nemôže byť rekurzívny. $\square$