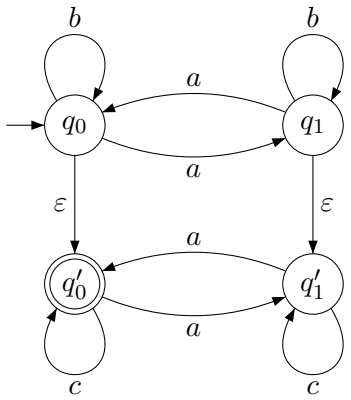
Riešenia úloh z veľkej písomky

Peter Kostolányi

16. decembra 2024

Úloha 1. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat s $K = \{q_0, q_1, q_0', q_1'\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_0'\}$ a s prechodovou funkciou δ danou nasledujúcim diagramom.



a) Nájdite a pomocou korektného množinového zápisu vyjadrite jazyk $L(A)$. Svoje tvrdenie nemusíte dokazovať.

b) Pre každý stav q automatu A sformulujte invariant charakterizujúci jazyk všetkých slov $w \in \Sigma^*$ takých, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)$.

c) Zostrojte regulárnu gramatiku G takú, že $L(G) = L(A)$. Túto rovnosť netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; v opačnom prípade je dôkaz nutný.

Riešenie.

a) Je $L(A) = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*;\ v \in \{a, c\}^*;\ \#_a(uv) \equiv 0 \pmod 2\}$. Ekvivalentne možno tento jazyk vyjadriť aj ako $L(A) = (aa)^* \sqcup\!\sqcup\, b^*c^*$.

b) Pre všetky $w \in \Sigma^*$ a $i \in \{0, 1\}$ je

$$(q_0, w) \vdash_A^* (q_i, \varepsilon) \iff w \in \{a, b\}^* \ \wedge\ \#_a(w) \equiv i \pmod 2$$

a

$$(q_0, w) \vdash_A^* (q_i', \varepsilon) \iff \exists u \in \{a, b\}^*\ \exists v \in \{a, c\}^* : w = uv \ \wedge\ \#_a(uv) \equiv i \pmod 2.$$

c) Štandardnou konštrukciou dostávame regulárnu gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{q_0, q_1, q_0', q_1'\}$, $T = \{a, b, c\}$, $\sigma = q_0$ a

$$\begin{aligned} P = \{q_0 &\to aq_1 \mid bq_0 \mid q_0' \\ q_1 &\to aq_0 \mid bq_1 \mid q_1' \\ q_0' &\to aq_1' \mid cq_0' \mid \varepsilon \\ q_1' &\to aq_0' \mid cq_1'\}. \end{aligned}$$

□

Úloha 2. Preverte pravdivosť nasledujúcich tvrdení a svoje odpovede vyznačte krížikmi do príslušných políčok. Zdôvodnenia odpovedí nie sú potrebné.

		áno	**nie**
1.	Nech Σ, Γ sú abecedy, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $L \subseteq \Gamma^*$. Potom $h(h^{-1}(L)) \subseteq L$, pričom táto inklúzia môže, ale nemusí byť ostrá.	×	
2.	Každý regulárny jazyk je akceptovaný nejakým nedeterministickým konečným automatom, ale nemusí byť akceptovaný deterministickým konečným automatom.		×
3.	Ku každej regulárnej gramatike existuje ekvivalentná regulárna gramatika v Chomského normálnom tvare.		×
4.	Nech L je regulárny jazyk nad abecedou Σ. Potom existuje $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ také, že pre všetky $w \in L$ s $\lvert w\rvert \geq p$ a všetky $i \in \mathbb{N}$ je $ux^iv \in L$ kedykoľvek $u, x, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že $uxv = w$, $\lvert ux\rvert \leq p$ a $\lvert x\rvert \geq 1$.		×
5.	Nech $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$. Potom $L_1 \cap L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$.		×
6.	Nech $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ a Σ je abeceda taká, že $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Potom $\Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cap (\Sigma^* - L_2)) \in \mathscr{L}_{CF}$.	×	
7.	Nech $L \in \mathscr{L}_{CF}$. Potom existuje zásobníkový automat A taký, že $L(A) = N(A) = L$.	×	
8.	Nech A je deterministický Turingov stroj bez prechodov z akceptačných stavov, ktorý sa *na aspoň jednom* zo vstupov nezastaví. Potom $L(A) \in \mathscr{L}_{RE} - \mathscr{L}_{rec}$.		×
9.	Nech A je deterministický Turingov stroj bez prechodov z akceptačných stavov, ktorý sa *na žiadnom* vstupe nezastaví. Potom $L(A) \in \mathscr{L}_{CF}$.	×	
10.	Existuje frázová gramatika generujúca diagonálny jazyk.	×	

Riešenie.

1. **Áno**. Pre všetky $w \in h(h^{-1}(L))$ je $w = h(u)$ pre nejaké $u \in h^{-1}(L)$. Keďže ale $u \in h^{-1}(L)$, je $w = h(u) \in L$.

   Napríklad pre $\Sigma = \Gamma = \{a\}$, homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ daný ako $h\colon a \mapsto aa$ a jazyk $L = \{a\}$ je pritom $h(h^{-1}(L)) = h(\emptyset) = \emptyset \subsetneq L$; pre homomorfizmus $g\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ daný ako $g\colon a \mapsto a$ a $L = \{a\}$ ale naopak $g(g^{-1}(L)) = g(\{a\}) = \{a\} = L$. Inklúzia teda môže, ale nemusí byť ostrá.

2. **Nie**. Deterministické a nedeterministické konečné automaty sú rovnako silné modely akceptujúce práve všetky regulárne jazyky.

3. **Nie**. Každá regulárna gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ v Chomského normálnom tvare spĺňa

   $$P \subseteq (N \times (T^*N \cup T^*)) \cap (N \times (NN \cup T \cup \{\varepsilon\})) = N \times (T \cup \{\varepsilon\});$$

   jazyk generovaný takouto gramatikou ale musí byť konečný. Pre regulárne gramatiky generujúce nekonečné jazyky teda neexistuje žiadna ekvivalentná *regulárna* gramatika v Chomského normálnom tvare (hoci pre ne vždy existuje ekvivalentná *bezkontextová* gramatika v Chomského normálnom tvare).

4. **Nie**. Napríklad pre jazyk $L = (aa)^*$, ľubovoľné $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ a $w = a^{2p}$ je $w \in L$ a $\lvert w\rvert \geq p$. Slová $u = \varepsilon$, $x = a$ a $v = a^{2p-1}$ spĺňajú podmienky $uxv = w$, $\lvert ux\rvert \leq p$ a $\lvert x\rvert \geq 1$. Napriek tomu ale $ux^2v = a^{2p+1} \notin L$.

   Podobnosť uvedeného tvrdenia s pumpovacou lemou pre regulárne jazyky je čisto náhodná.

5. **Nie**. Pre ľubovoľný jazyk $L \in \mathscr{L}_{CF}$ je napríklad $L \cap L = L \in \mathscr{L}_{CF}$.

6. **Áno**. Evidentne totiž $\Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cap (\Sigma^* - L_2)) = L_1 \cup L_2$ a trieda $\mathscr{L}_{CF}$ je uzavretá na zjednotenie.

7. **Áno**. Nech $A' = (K', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', \emptyset)$ je zásobníkový taký, že $N(A') = L$. Automat A môže začať svoj výpočet v počiatočnom stave $q_0 \notin K'$ tým, že obsah zásobníka zmení na DZ_0' pre nejaký nový symbol $D \notin \Gamma'$ a prejde do stavu q_0'. Následne bude simulovať výpočet automatu A'. V prípade, že sa na vrchu zásobníka vyskytne symbol D, odstráni sa tento zo zásobníka a automat prejde do nového akceptačného stavu $q_{\text{fin}} \notin K'$.

8. **Nie**. Ak sa napríklad stroj A nezastaví na žiadnom vstupe, je $L(A) = \emptyset \in \mathscr{L}_{rec}$.

9. **Áno**. Nutne totiž $L(A) = \emptyset \in \mathscr{L}_{CF}$.

10. **Áno**. Diagonálny jazyk je rekurzívne vyčísliteľný a každý rekurzívne vyčísliteľný jazyk možno vygenerovať nejakou frázovou gramatikou. $\square$

Úloha 3. Zistite, či je jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*;\ \#_a(u) = |v|\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Jazyk L *nie je regulárny.* Sporom: nech $L \in \mathscr{R}$. Podľa pumpovacej lemy pre regulárne jazyky tak jazyku L prislúcha nejaké $p \in \mathbb{N}$. Pre $w = a^p c b^p$ potom $w \in L$ a zároveň $|w| \geq p$. Existujú preto slová $u, x, v \in \Sigma^*$ také, že:

(i) $w = uxv$;

(ii) $|ux| \leq p$;

(iii) $|x| \geq 1$;

(iv) $ux^i v \in L$ pre všetky $i \in \mathbb{N}$.

Vďaka podmienkam (i) až (iii) tak existujú $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $s \geq 1$ a $r + s \leq p$, pričom $u = a^r$, $x = a^s$ a $v = a^{p-r-s} c b^p$. Z podmienky (iv) napokon pre $i = 2$ dostávame $ux^2v = a^{p+s} c b^p \in L$ – čo je spor, pretože $\#_a(a^{p+s}) = p + s > p = |b^p|$. $\square$

Úloha 4. Uvažujme zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, c\}$, $F = \emptyset$ a

$$\delta(q_0, a, Z_0) \ni (q_1, Z_0cc), \tag{1}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, c) \ni (q_1, \varepsilon), \tag{2}$$
$$\delta(q_1, b, Z_0) \ni (q_0, Z_0), \tag{3}$$

pričom automat A neobsahuje žiadne ďalšie prechody. Štandardnou konštrukciou zostrojte bezkontextovú gramatiku G takú, že $L(G) = N(A)$.

Riešenie. Gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ bude daná nasledovne:

$$N = \{\sigma, [q_0, Z_0, q_0], [q_0, c, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_0, c, q_1], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, c, q_0], [q_1, Z_0, q_1], [q_1, c, q_1]\},$$

$T = \{a, b\}$ a množina P obsahuje nasledujúce pravidlá:

$$\begin{aligned}
\sigma &\to [q_0, Z_0, q_0] \mid [q_0, Z_0, q_1], \\
[q_0, Z_0, q_0] &\to a[q_1, c, q_0][q_0, c, q_0][q_0, Z_0, q_0] \mid a[q_1, c, q_0][q_0, c, q_1][q_1, Z_0, q_0] \mid \\
&\qquad \mid a[q_1, c, q_1][q_1, c, q_0][q_0, Z_0, q_0] \mid a[q_1, c, q_1][q_1, c, q_1][q_1, Z_0, q_0], && (4)\\
[q_0, Z_0, q_1] &\to a[q_1, c, q_0][q_0, c, q_0][q_0, Z_0, q_1] \mid a[q_1, c, q_0][q_0, c, q_1][q_1, Z_0, q_1] \mid \\
&\qquad \mid a[q_1, c, q_1][q_1, c, q_0][q_0, Z_0, q_1] \mid a[q_1, c, q_1][q_1, c, q_1][q_1, Z_0, q_1], && (5)\\
[q_1, c, q_1] &\to \varepsilon, && (6)\\
[q_1, Z_0, q_0] &\to b[q_0, Z_0, q_0], && (7)\\
[q_1, Z_0, q_1] &\to b[q_0, Z_0, q_1]. && (8)
\end{aligned}$$

Pravidlá (4),(5) pritom zodpovedajú prechodu (1), pravidlo (6) prechodu (2) a pravidlá (7, 8) zodpovedajú prechodu (3). □

Úloha 5. Nech Σ je abeceda. *Rozpustením* jazyka $L_1 \subseteq \Sigma^*$ podľa jazyka $L_2 \subseteq \Sigma^*$ nazveme jazyk

$$L_1 \ominus L_2 = \{uv \mid u, v \in \Sigma^*;\ \exists x \in L_2 \colon uxv \in L_1\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na rozpustenie podľa regulárneho jazyka – to znamená, či pre $L_1 \in \mathscr{L}_{CF}$ a $L_2 \in \mathscr{R}$ musí byť $L_1 \ominus L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ *je uzavretá* na rozpustenie podľa regulárneho jazyka. Nech Σ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú jazyky také, že $L_1 \in \mathscr{L}_{CF}$ a $L_2 \in \mathscr{R}$. Nech $A_1 = (K_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, Z_{0,1}, F_1)$ je zásobníkový automat taký, že $L(A_1) = L_1$; bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že tento automat na žiadnom vstupe nevyprázdni svoj zásobník. Nech $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ je deterministický konečný automat taký, že $L(A_2) = L_2$. Skonštruujeme zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že $L(A) = L_1 \ominus L_2$.

Automat A svoje vstupné slovo $w \in \Sigma$ nedeterministicky faktorizuje ako $w = uv$ pre nejaké $u, v \in \Sigma^*$. V prvej fáze svojho výpočtu bude automat A simulovať výpočet automatu A_1 na prefixe u. Po prečítaní tohto prefixu prejde automat A do druhej fázy, v ktorej nedeterministicky uhádne slovo $x \in \Sigma^*$. Automat A pritom bude pokračovať v načatej simulácii automatu A_1 tak, aby po skončení druhej fázy odsimuloval výpočet automatu A_1 na slove ux – písmená uhádnutého slova x už ale automat A nebude čítať zo vstupu (namiesto prechodov na písmená teda bude vykonávať prechody na ε). Súčasne s tým automat A – rovnako „potichu“ – odsimuluje výpočet automatu A_2 na slove x, pričom do tretej fázy bude môcť prejsť iba v prípade, že automat A_2 slovo x akceptuje. V tretej fáze výpočtu bude napokon automat A pokračovať v simulácii automatu A_1 na zostávajúcom sufixe v vstupného slova w, pričom písmená slova v už bude aj skutočne čítať zo vstupu. Automat A akceptuje práve vtedy, keď po dočítaní sufixu v akceptuje simulovaný automat A_1.

Takto skonštruovaný automat A teda bude akceptovať slovo $w \in \Sigma^*$ práve vtedy, keď existujú slová $u, x, v \in \Sigma^*$ také, že $w = uv$, $x \in L_2$ a $uxv \in L_1$ – čiže práve vtedy, keď $w \in L_1 \ominus L_2$.

Zostáva opísať konštrukciu zásobníkového automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aj na formálnej úrovni. Vezmeme $K = (K_1 \times \{1\}) \cup (K_1 \times K_2 \times \{2\}) \cup (K_1 \times \{3\})$, $\Gamma = \Gamma_1$, $q_0 = [q_{0,1}, 1]$, $Z_0 = Z_{0,1}$, $F = F_1 \times \{3\}$ a prechodová funkcia bude daná nasledovne:

$$\delta([p,1], c, Z) = \{([q,1], \gamma) \mid q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, c, Z)\}$$

pre všetky $p \in K_1$, $c \in \Sigma$ a $Z \in \Gamma_1$;

$$\delta([p,1], \varepsilon, Z) = \{([q,1], \gamma) \mid q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, \varepsilon, Z)\} \cup \{([p, q_{0,2}, 2], Z)\}$$

pre všetky $p \in K_1$ a $Z \in \Gamma_1$;

$$\begin{aligned}\delta([p,p',2], \varepsilon, Z) = {} & \{([q, \delta_2(p',c), 2], \gamma) \mid c \in \Sigma;\ q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, c, Z)\} \cup \\ & \cup\ \{([q,p',2], \gamma) \mid q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, \varepsilon, Z)\}\end{aligned}$$

pre všetky $p \in K_1$, $p' \in K_2 - F_2$ a $Z \in \Gamma_1$;

$$\begin{aligned}\delta([p,p',2], \varepsilon, Z) = {} & \{([q, \delta_2(p',c), 2], \gamma) \mid c \in \Sigma;\ q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, c, Z)\} \cup \\ & \cup\ \{([q,p',2], \gamma) \mid q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, \varepsilon, Z)\} \cup \{([p,3], Z)\}\end{aligned}$$

pre všetky $p \in K_1$, $p' \in F_2$ a $Z \in \Gamma_1$;

$$\delta([p,3], z, Z) = \{([q,3], \gamma) \mid q \in K_1;\ \gamma \in \Gamma_1^*;\ (q,\gamma) \in \delta_1(p, z, Z)\}$$

pre všetky $p \in K_1$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma_1$;

$$\delta([p,p',2], c, Z) = \emptyset$$

pre všetky $p \in K_1$, $p' \in K_2$, $c \in \Sigma$ a $Z \in \Gamma_1$. $\square$

Úloha 6. Uvažujme rozhodovací problém daný nasledovne:

> **Vstup:** Kódy $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$ deterministických Turingových strojov A, B nad abecedou $\{0,1\}$; slovo $w \in \{0,1\}^*$.
>
> **Výstup:** „Áno“ práve vtedy, keď $w \in L(A)L(B)$.

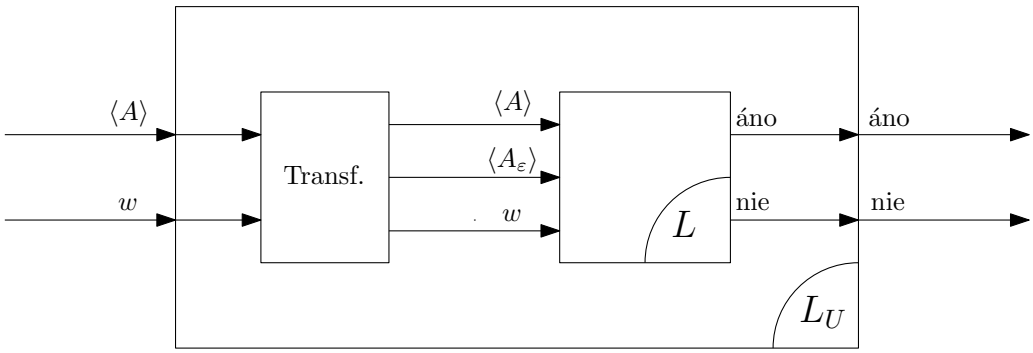
Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je rekurzívne vyčísliteľný? Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Označme jazyk prislúchajúci k problému zo zadania ako L. To znamená, že

$$L = \{\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#w \mid A, B \text{ sú det. TS nad abecedou } \{0,1\};\ w \in \{0,1\}^*;\ w \in L(A)L(B)\}.$$

Problém *je rekurzívne vyčísliteľný* – čiže $L \in \mathscr{L}_{RE}$. Nedeterministický Turingov stroj akceptujúci L totiž môže na vstupe $\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#w$ nedeterministicky faktorizovať slovo w ako $w = uv$ pre $u, v \in \{0,1\}^*$. Následne môže spustiť univerzálny Turingov stroj na vstupe $\langle A\rangle\#u$ a po prípadnom zastavení tohto výpočtu aj na vstupe $\langle B\rangle\#v$. V prípade, že sa obidva tieto simulované výpočty zastavia v akceptačnom stave, môže stroj svoj vstup akceptovať.

Problém ale *nie je rozhodnuteľný* – čiže $L \notin \mathscr{L}_{rec}$ – čo dokážeme redukciou univerzálneho problému na problém zo zadania. Za účelom sporu predpokladajme, že problém zo zadania je rozhodnuteľný – existuje teda deterministický Turingov stroj akceptujúci L, ktorý sa na každom svojom vstupe zastaví. V takom prípade by sme ale vedeli rozhodovať aj univerzálny problém, o ktorom vieme, že rozhodnuteľný nie je: vstup $\langle A\rangle\#w$ univerzálneho problému by sme totiž mohli transformovať na $\langle A\rangle\#\langle A_\varepsilon\rangle\#w$, kde A_ε je ľubovoľný pevne daný deterministický Turingov stroj nad abecedou $\{0,1\}$ taký, že $L(A_\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. Na tomto vstupe by sme následne mohli spustiť stroj rozhodujúci problém zo zadania (zodpovedajúci jazyku L). Vstup $\langle A\rangle\#\langle A_\varepsilon\rangle\#w$ je ale strojom pre L akceptovaný práve vtedy, keď $w \in L(A)L(A_\varepsilon)$ – čiže práve vtedy, keď $w \in L(A)\{\varepsilon\} = L(A)$. Výstup stroja pre L teda možno priamo použiť ako výstup stroja rozhodujúceho univerzálny problém. Schéma redukcie je na nasledujúcom obrázku.



Môžeme teda uzavrieť, že $L \in \mathscr{L}_{RE} - \mathscr{L}_{rec}$. □

Úloha 7 (Bonus)**.** Nájdite nekonečnú postupnosť jazykov $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ takých, že pre všetky $i, j \in \mathbb{N} - \{0\}$ je $L_i \cap L_j \in \mathscr{L}_{CF}$ práve vtedy, keď $i = j$ – alebo dokážte, že takáto postupnosť jazykov neexistuje.

Riešenie. Nech $L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ a $L' = \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. Evidentne $L, L' \in \mathscr{L}_{CF}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ďalej položme

$$L_n := (L\#)^{n-1}(L'\#)(L\#)^*.$$

Dokážeme, že postupnosť jazykov $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ má požadovanú vlastnosť.

Z uzáverových vlastností triedy $\mathscr{L}_{CF}$ vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ je $L_n = L_n \cap L_n \in \mathscr{L}_{CF}$.

Uvažujme teraz ľubovoľné $i, j \in \mathbb{N} - \{0\}$ také, že $i < j$ – treba dokázať, že $L_i \cap L_j \notin \mathscr{L}_{CF}$. Za účelom sporu predpokladajme opak; z uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{CF}$ na prienik s regulárnym jazykom ale potom vyplýva, že je bezkontextový aj jazyk

$$(L_i \cap L_j) \cap \#^{j-1} a^* b^* c^* \# = \{\#^{j-1} a^m b^m c^m \# \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Napríklad s použitím pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky by sme ale ľahko dokázali, že tento jazyk bezkontextový nie je: spor. $\square$