Riešenie prvej prémiovej domácej úlohy

Peter Kostolányi

22. novembra 2023

Úloha 1. Nech Σ je abeceda. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme *grupovým* (nad abecedou Σ), ak $L = L(A)$ pre nejaký deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že pre všetky $c \in \Sigma$ určujú prechody automatu A na c permutáciu množiny stavov K – pre všetky $c \in \Sigma$ je teda

$$\delta(K, c) = \{\delta(q, c) \mid q \in K\} = K.$$

Triedu všetkých grupových jazykov budeme označovať $\mathscr{G}$.

Porovnajte triedy jazykov $\mathscr{G}$ a $\mathscr{R}$ – t. j. preverte platnosť oboch inklúzií medzi týmito triedami. Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Keďže je každý grupový jazyk akceptovaný nejakým deterministickým konečným automatom, je $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{R}$. Dokážeme, že táto inklúzia je vlastná.

Jazyk a^+ je evidentne regulárny; ukážeme, že nie je grupový. Za účelom sporu predpokladajme opak: nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat taký, že $L(A) = a^+$ a pre všetky $c \in \Sigma$ je $\delta(K, c) = K$. Zrejme $a \in \Sigma$. Nech $n = |K|$ a uvažujme výpočet automatu A na slove a^n:

$$(q_0, a^n) \vdash (q_1, a^{n-1}) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1}, a) \vdash (q_n, \varepsilon), \tag{1}$$

kde $q_1, \ldots, q_n$ sú nejaké stavy z K. Z Dirichletovho princípu potom dostávame existenciu indexov $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ takých, že $i < j$ a súčasne $q_i = q_j$; bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že i je najmenšie možné. Ak pritom $i > 0$, z (1) dostávame $\delta(q_{i-1}, a) = \delta(q_{j-1}, a) = q_i$, pričom z minimality indexu i vyplýva $q_{i-1} \neq q_{j-1}$ – spor s predpokladom $\delta(K, a) = K$. Preto $i = 0$ a z (1) dostávame

$$(q_0, \varepsilon) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \qquad \text{a súčasne} \qquad (q_0, a^j) \vdash^* (q_0, \varepsilon).$$

Ak teda $q_0 \in F$, je $\varepsilon \in L(A)$; v opačnom prípade zas $a^j \notin L(A)$, pričom $j > 0$. V obidvoch prípadoch ide o spor s predpokladom $L(A) = a^+$, ktorý tak musel byť nepravdivý. $\square$