Riešenie druhej prémiovej domácej úlohy

Peter Kostolányi

22. novembra 2023

Úloha 1. Zistite, či je trieda grupových jazykov $\mathscr{G}$ z prvej prémiovej úlohy uzavretá na nasledujúce operácie:

a) zjednotenie jazykov nad rovnakou abecedou Σ (otázka teda znie, či pre všetky abecedy Σ a všetky jazyky L_1, L_2 grupové **nad abecedou** Σ musí byť $L_1 \cup L_2 \in \mathscr{G}$);

b) prienik jazykov nad rovnakou abecedou Σ (otázka teda znie, či pre všetky abecedy Σ a všetky jazyky L_1, L_2 grupové **nad abecedou** Σ musí byť $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{G}$);

c) komplement uvažovaný pre jazyk L v rámci univerza Σ_L^* (otázka teda znie, či pre všetky $L \in \mathscr{G}$ obsahujúce aspoň jedno neprázdne slovo je aj $\Sigma_L^* - L \in \mathscr{G}$);

d) komplement uvažovaný pre jazyk L v rámci ľubovoľného univerza Σ^*, kde Σ je abeceda taká, že $L \subseteq \Sigma^*$ (otázka teda znie, či pre všetky $L \in \mathscr{G}$ a každú abecedu Σ spĺňajúcu $L \subseteq \Sigma^*$ musí byť aj $\Sigma^* - L \in \mathscr{G}$).

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *permutačným*, ak spĺňa podmienku z definície grupových jazykov: pre všetky $c \in \Sigma$ je teda $\delta(K, c) = K$.

Nech ďalej $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ sú ľubovoľné dva deterministické konečné automaty nad rovnakou abecedou Σ a $F \subseteq K_1 \times K_2$. Deterministický konečný automat $\Pi(A_1, A_2, F) = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ potom definujeme takto: $K = K_1 \times K_2$, $q_0 = [q_{0,1}, q_{0,2}]$ a pre všetky $p \in K_1$, $q \in K_2$ a $c \in \Sigma$ je $\delta([p, q], c) = [\delta_1(p, c), \delta_2(q, c)]$. Konštrukciu z prednášky, dokazujúcu uzavretosť triedy $\mathscr{R}$ na prienik, potom možno v krátkosti vyjadriť pozorovaním, že pre ľubovoľné dva deterministické konečné automaty $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ je

$$L(\Pi(A_1, A_2, F_1 \times F_2)) = L(A_1) \cap L(A_2).$$

Ľahko tiež vidieť, že

$$L(\Pi(A_1, A_2, (F_1 \times K_2) \cup (K_1 \times F_2))) = L(A_1) \cup L(A_2),$$

čo možno považovať za alternatívny dôkaz uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na zjednotenie.

Dokážeme teraz, že trieda $\mathscr{G}$ *je uzavretá na zjednotenie a prienik* jazykov nad rovnakou abecedou – vďaka uvedenému pritom stačí ukázať, že pre ľubovoľné dva *permutačné* deterministické konečné automaty $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ a ľubovoľnú množinu $F \subseteq K_1 \times K_2$ je aj $\Pi(A_1, A_2, F) = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ permutačný automat. Uvažujme ale ľubovoľné $c \in \Sigma$, $p \in K_1$ a $q \in K_2$. Keďže je automat A_1 permutačný, existuje $p' \in K_1$ také, že $\delta_1(p', c) = p$. Podobne pre automat A_2 musí existovať $q' \in K_2$ také, že $\delta_2(q', c) = q$. V dôsledku toho ale $\delta([p', q'], c) = [p, q]$ a keďže sú $p \in K_1$ a $q \in K_2$ ľubovoľné, je $\delta(K, c) = K$ – automat $\Pi(A_1, A_2, F)$ je teda naozaj permutačný.

Dokážme ďalej, že *pre všetky $L \in \mathscr{G}$ obsahujúce aspoň jedno neprázdne slovo*[1] *je* $\Sigma_L^* - L \in \mathscr{G}$. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je permutačný deterministický konečný automat taký, že $L(A) = L$. Potom $\Sigma_L \subseteq \Sigma$ a automat $A' = (K, \Sigma_L, \delta', q_0, F)$, kde $\delta'(q, c) = \delta(q, c)$ pre všetky $q \in K$ a $c \in \Sigma_L$, je očividne ekvivalentný automatu A; z nezmenenosti prechodov na písmená $c \in \Sigma_L$ navyše vyplýva, že automat A' je takisto permutačný. Automat A'' akceptujúci jazyk $\Sigma_L^* - L$ získame z automatu A' štandardnou konštrukciou: $A'' = (K, \Sigma_L, \delta', q_0, K - F)$. Keďže prechody automatu v tejto konštrukcii zostali nezmenené, je aj automat A'' permutačný a jazyk $\Sigma_L^* - L$ preto musí byť grupový.

[1] Nie je ťažké ukázať, že $\{\varepsilon\}$ nie je grupovým jazykom nad žiadnou abecedou – uvedená podmienka je tým pádom ekvivalentná neprázdnosti jazyka L.

Dokážme napokon, že *pre* $L \in \mathscr{G}$ *a abecedu* Σ *spĺňajúcu* $L \subseteq \Sigma^*$ *ešte nemusí byť* $\Sigma^* - L \in \mathscr{G}$. Nech napríklad $L = b^*$ a $\Sigma = \{a, b\}$. Jazyk L je grupový nad abecedou $\Sigma_L = \{b\}$, pretože je akceptovaný jednostavovým permutačným automatom. Dokážeme, že jazyk $\Sigma^* - L = \Sigma^* a \Sigma^*$ nie je grupový. Sporom: nech tento jazyk grupový je a nech $A = (K, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je permutačný deterministický konečný automat taký, že $L(A) = \Sigma^* a \Sigma^*$; evidentne pritom $\Gamma \supseteq \Sigma$. Uvažujme deterministický konečný automat $A' = (K, \{a\}, \delta', q_0, F)$ taký, že pre všetky $q \in K$ je $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$. Zrejme potom $L(A') = L(A) \cap a^* = a^+$, pričom $\delta'(K, a) = \delta(K, a) = K$ – automat A' je teda permutačný. Z toho ale vyplýva $a^+ \in \mathscr{G}$, čo je spor s naším pozorovaním z riešenia prvej prémiovej úlohy. $\square$