Cvičenia č. 1: Komplexné čísla a komplexná rovina

Peter Kostolányi

23. septembra 2019

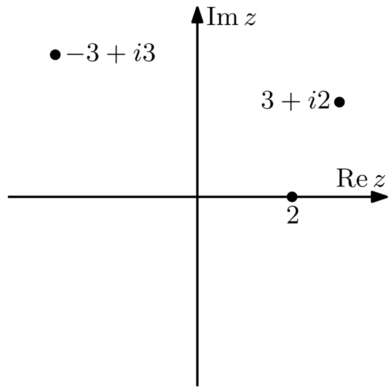
Nasledujúci text už u čitateľa predpokladá určitú oboznámenosť s komplexnými číslami a jeho prezentácia je sčasti ovplyvnená učebnicou [1].

Komplexné čísla

Komplexné číslo možno definovať ako dvojicu reálnych čísel a a b, ktorú zapisujeme ako $a + ib$ alebo $a + bi$.[1] Komplexné číslo $a + i0$ stotožňujeme s reálnym číslom a a komplexné číslo $0 + ib$ píšeme aj ako ib alebo bi; podobne namiesto $a + i1$ budeme väčšinou písať len $a + i$ a namiesto $0 + i1$ len i. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme symbolom $\mathbb{C}$ a množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ chápeme – prostredníctvom vyššie spomenutého stotožnenia $a + i0$ s a – ako podmnožinu množiny $\mathbb{C}$.

Dve komplexné čísla $a + ib$ a $c + id$ považujeme za rovné – a píšeme $a + ib = c + id$ – ak platí $a = c$ a súčasne $b = d$.

Pre komplexné číslo $z = a + ib$ nazývame reálne číslo a jeho *reálnou zložkou* a píšeme $\operatorname{Re} z := a$. Podobne *reálne* číslo b nazývame *imaginárnou zložkou* komplexného čísla z a kladieme $\operatorname{Im} z := b$. Reprezentácia komplexných čísel ako usporiadaných dvojíc – teda pomocou ich reálnej a imaginárnej zložky – sa niekedy nazýva aj ich *karteziánskou reprezentáciou.* Komplexné číslo z tu totiž stotožňujeme s bodom – alebo ekvivalentne vektorom – $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ v rovine $\mathbb{R}^2$, ktorá sa v tomto kontexte nazýva aj *komplexnou rovinou* alebo *Gaussovou rovinou*; grafické znázornenie čísla bodom v rovine, tak ako na obrázku C1.1, sa v literatúre vyskytuje aj pod názvom *Argandov diagram.*



Obr. C1.1: Grafická reprezentácia čísel 2, $3 + i2$ a $-3 + i3$ v komplexnej rovine.

Často býva oproti karteziánskej reprezentácii výhodnejšia polárna reprezentácia komplexných čísel, ako onedlho uvidíme.

Aritmetika komplexných čísel

Operácie sčítania a násobenia komplexných čísel definujeme pre všetky $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nasledovne:

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d),$$
$$(a + ib)(c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc).$$

[1] Na tomto mieste sa často uvádza, že i je prvok, pre ktorý platí $i^2 = -1$. To bude samozrejme pravda, ale nateraz nie je nutné zdôrazňovať to explicitne. V našom ponímaní bude i len skráteným zápisom komplexného čísla $0+i1$ a rovnosť $i^2 = -1$ vyplynie z pravidiel aritmetiky komplexných čísel, ktorú onedlho zavedieme (operácie na komplexných číslach ale budeme samozrejme cielene „konštruovať" tak, aby rovnosť $i^2 = -1$ bola splnená).

Umocňovanie na prirodzený exponent n ďalej definujeme obvyklým induktívnym spôsobom: pre všetky $z \in \mathbb{C}$ kladieme $z^0 = 1$ a $z^{n+1} = z^n z$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.[2] Z uvedených definícií zrejme vyplýva aj rovnosť $i^2 = -1$.

Pre každé komplexné číslo $z = a + ib$ kladieme $-z := (-a) + i(-b)$ a v prípade $z \neq 0$ aj $1/z := (a/(a^2+b^2)) + i(-b/(a^2+b^2))$; ľahko pritom vidieť, že $z + (-z) = 0$ a $z(1/z) = 1$. Čitateľ ľahko overí, že množina $\mathbb{C}$ – s vyššie definovanými operáciami sčítania a násobenia – tvorí pole. Definície operácií ako odčítanie alebo delenie sú už potom rovnaké ako v každom poli. Vlastnosti poľa budeme pri práci s komplexnými číslami používať voľne.

Absolútna hodnota, argument a komplexne združené číslo

Absolútnu hodnotu komplexného čísla $z = a+ib$ definujeme ako bežnú euklidovskú vzdialenosť bodu (a,b) v komplexnej rovine od bodu $(0,0)$ – teda

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Uhol θ, ktorý v komplexnej rovine zviera vektor (a,b) s kladnou reálnou osou nazývame *argumentom* komplexného čísla $z = a+ib$. Tento uhol nie je určený jednoznačne: pre $z \neq 0$ sa môže líšiť o celočíselné násobky čísla 2π a pre $z = 0$ môže byť ľubovoľný. Často si vystačíme s ľubovoľným z možných argumentov θ, prípadne je jeho konkrétna voľba zrejmá z kontextu – v takom prípade môžeme písať $\theta =: \arg z$. *Množinu všetkých argumentov* čísla z označíme symbolom $[\![\arg z]\!]$.

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a+ib$ nazveme číslo $\overline{z} := a - ib$. Ľahko možno napríklad overiť, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí vzťah $|z|^2 = z\overline{z}$.

Lema C1.1. *Nech $z, w \in \mathbb{C}$. Potom $|zw| = |z||w|$.*

Dôkaz. Nech $z = a+ib$ a $w = c+id$. Potom

$$\begin{aligned} |zw| &= |(ac-bd)+i(ad+bc)| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \\ &= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z||w|, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Lema C1.2. *Nech $z, w \in \mathbb{C}$. Potom platia nasledujúce nerovnosti:*

(*i*) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *a* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(*ii*) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(*iii*) $|z+w| \geq ||z| - |w||$.

Dôkaz. Tvrdenie (*i*) vyplýva bezprostredne zo vzťahu $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2$, kde $|z|$ je nezáporné. Na dôkaz (*ii*) stačí – vďaka nezápornosti $|z+w|$ a $|z|+|w|$ – ukázať rovnosť $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$. Tu však máme

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2+|w|^2+(z\overline{w}+w\overline{z}) = \\ &= |z|^2+|w|^2+\big(z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}\big) = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2\,|z\overline{w}| = \\ &= |z|^2+|w|^2+2|z|\,|\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Napokon (*iii*) vyplýva z nasledujúcich dvoch nerovností:

$$\begin{aligned} |z|-|w| &\leq |z+w-w| - |w| \leq |z+w| + |-w| - |w| = |z+w|, \\ |w|-|z| &\leq |w+z-z| - |z| \leq |w+z| + |-z| - |z| = |z+w|. \end{aligned}$$

Týmto je lema dokázaná. □

[2] V matematickej analýze, kde sa momentálne pohybujeme, sa výraz 0^0 často necháva nedefinovaným. Nám však konvencia $0^0 = 1$, všeobecne prijímaná napríklad v kombinatorike, nebude robiť problémy.

Polárna reprezentácia komplexných čísel: goniometrický a exponenciálny tvar

Komplexnému číslu $z = a+ib$ zodpovedá bod komplexnej roviny s karteziánskymi súradnicami (a, b). Rovnaký bod môžeme zadať aj v *polárnych súradniciach* – je totiž jednoznačne určený absolútnou hodnotou $|z| = r$ a hociktorým z argumentov $\arg z = \theta$. Ľahko pritom vidieť, že v dôsledku rovnosti $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ platí $a = r\cos\theta$ a $b = r\sin\theta$. Číslo z teda môžeme zadať v *goniometrickom tvare*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Takýto zápis je relatívne zdĺhavý; budeme preto častejšie používať ekvivalentný *exponenciálny tvar*, pri ktorom *definujeme*

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Komplexné číslo z s $|z| = r$ a $\arg z = \theta$ teda možno v exponenciálnom tvare písať ako

$$z = re^{i\theta}.$$

Uvedený zápis je čisto formálny a zatiaľ nie je ničím podložené interpretovať ho ako umocňovanie Eulerovho čísla na komplexný exponent (v skutočnosti ani zatiaľ nemáme definované, čo to umocňovanie na komplexný exponent je).

Exponenciálnu funkciu e^z komplexnej premennej z definujeme až na druhej prednáške; tým potom aj odôvodníme zmysluplnosť vyššie zavedenej notácie. *Na formálnej* úrovni však s exponenciálnym tvarom môžeme pracovať už teraz: v nasledujúcej leme totiž overíme, že sa prinajmenšom pri najbežnejších operáciách správa tak, ako by sme od exponenciálnej funkcie očakávali.

Lema C1.3. *Nech $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Potom:*[3]

(i) $(e^{i\theta})(e^{i\phi}) = e^{i(\theta+\phi)}$.

(ii) $(1/e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$.

(iii) $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$.

Dôkaz. Z definície exponenciálneho tvaru a násobenia komplexných čísel a zo súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie dostávame

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})(e^{i\phi}) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = \\ &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = e^{i(\theta+\phi)}.\end{aligned}$$

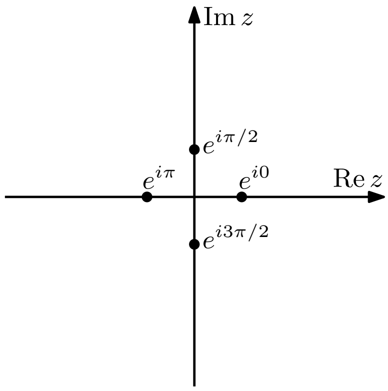
Z definície prevrátenej hodnoty, rovnosti $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, párnosti funkcie kosínus a nepárnosti funkcie sínus ďalej

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{i\theta}} &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} + i\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.\end{aligned}$$

Dôkaz vzorca pre umocňovanie je už len záležitosťou jednoduchej matematickej indukcie. □

S použitím exponenciálneho (alebo ekvivalentne goniometrického) tvaru teda môžeme násobiť, deliť a umocňovať omnoho jednoduchšie, než pri karteziánskych súradniciach. Pre $z = re^{i\theta}$ a $w = se^{i\phi}$ napríklad platí

$$\begin{aligned} zw &= rse^{i(\theta+\phi)}, \\ z/w &= (r/s)e^{i(\theta-\phi)} && (\text{ak } s \neq 0), \\ z^k &= r^k e^{ik\theta} && (\text{pre všetky } k \in \mathbb{Z} \text{ pre } r \neq 0 \text{ a pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ pre } r = 0). \end{aligned}$$



Obr. C1.2: Čísla $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ a $e^{i3\pi/2} = -i$.

Z definície exponenciálneho tvaru je zrejmé, že napríklad $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ a $e^{i3\pi/2} = -i$ (obrázok C1.2). Okrem iného tak aj dostávame „formálnu verziu“ *Eulerovej rovnosti* $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Zo vzorca pre umocňovanie komplexných čísel v exponenciálnom tvare dostávame ako dôsledok aj *de Moivreovu veta*:

Tvrdenie C1.4 (De Moivreova veta)**.** *Nech* $\theta \in \mathbb{R}$ *a* $k \in \mathbb{Z}$. *Potom* $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$.

Dôkaz. Platí $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\sin k\theta$. □

Spomeňme ešte, že ako bezprostredný dôsledok periodicity funkcií sínus a kosínus (prípadne ako bezprostredný dôsledok rovnosti $e^{i2\pi} = 1$ a vzorca pre násobenie komplexných čísel v exponenciálnom tvare) dostávame pre všetky $k \in \mathbb{Z}$ rovnosť $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$. Navyše platí $e^{i\theta} = e^{i(\theta+\phi)}$ práve vtedy, keď $\phi = 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$.

Komplexné odmocniny jednej

Dôležitými špeciálnymi komplexnými číslami sú n-té odmocniny jednej pre $n \in \mathbb{N}$, pod ktorými rozumieme riešenia rovnice

$$z^n = 1 \tag{1}$$

o premennej z. Položme $z = re^{i\theta}$, kde $r \geq 0$ a $\theta \in \mathbb{R}$. Zisťujeme potom, že rovnica (1) je ekvivalentná rovnici

$$r^n e^{in\theta} = 1.$$

Dve komplexné čísla sa zrejme môžu rovnať iba vtedy, keď sa rovnajú ich absolútne hodnoty; musí teda platiť $r^n = 1$, z čoho pre nezáporné reálne číslo r nutne vyplýva $r = 1$. Preto $e^{in\theta} = 1$, čo je po prevedení do goniometrického tvaru ekvivalentné požiadavke

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = 1.$$

Keďže dve komplexné čísla sa očividne rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a imaginárne zložky, zisťujeme, že musia súčasne platiť rovnosti $\cos n\theta = 1$ a $\sin n\theta = 0$, z čoho vyplýva

$$\theta = 2k\pi/n, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Riešeniami rovnice (1) sú teda práve všetky komplexné čísla $e^{i2k\pi/n}$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Z pozorovaní na konci predchádzajúceho oddielu ale vyplýva, že stačí uvažovať argument $\theta \in [0, 2\pi)$. Riešeniami rovnice (1) tak sú práve všetky komplexné čísla $e^{i2k\pi/n}$ pre $k = 0, \ldots, n-1$, ktoré sú *po dvoch rôzne* a ktoré nazývame *n-tými komplexnými odmocninami jednej*. Napríklad na obrázku C1.2 sú teda znázornené všetky štvrté komplexné odmocniny jednej.

[3] Umocňovanie na celočíselný exponent sme síce explicitne nedefinovali, môžeme však použiť definíciu „zdedenú“ z teórie polí. Pod $e^{-i\theta}$ máme na mysli $e^{i(-\theta)}$; tu ide o drobnú nedôslednosť, ktorú snáď čitateľ prepáči.

Základy topológie komplexnej roviny

V tomto a v nasledujúcich dvoch oddieloch sa budeme zaoberať elementárnou topológiou komplexnej roviny – čiže pojmami ako okolie, otvorená a uzavretá množina, či hromadný bod. To nám umožní na prednáške definovať limitu a spojitosť funkcií komplexnej premennej. Veľkú časť nasledujúceho textu možno zhrnúť do jediného pozorovania: množina $\mathbb{C}$ tvorí, spoločne s bežnou euklidovskou metrikou, úplný metrický priestor. Čitateľovi oboznámenému so základmi teórie metrických priestorov sa tak nasledujúce pasáže tohto textu budú miestami zdať dôverne známe. Metrické priestory ale na tomto predmete využívať nebudeme a k topológii komplexnej roviny budeme pristupovať *ad hoc*. O základoch teórie metrických priestorov a topológie sa možno dočítať napríklad v [3].

Väčšina matematickej analýzy, ak nie matematická analýza celá, je nejakým spôsobom spätá s konceptom blízkosti. V komplexnom obore bude naším kľúčom k nemu spôsob, akým budeme merať vzdialenosť dvoch komplexných čísel. Tu ale jednoducho aplikujeme bežnú euklidovskú vzdialenosť v komplexnej rovine. *Vzdialenosťou* čísel $z, w \in \mathbb{C}$ teda nazveme hodnotu

$$\mathrm{dist}(z, w) := |z - w|.$$

Symbol $\mathrm{dist}(z, w)$ zvyčajne v budúcnosti používať nebudeme a budeme rozumieť samo sebou, že $|z - w|$ je vzdialenosť čísel z a w.

V reálnej analýze sa pod okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ rozumie otvorený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pre nejaké $\varepsilon > 0$. Tento interval obsahuje práve všetky reálne čísla vzdialené od a o menej ako ε. Podobne definujeme uzavreté alebo prstencové okolie bodu a. V nasledujúcej definícii tieto pojmy priamočiaro rozšírime do oboru komplexných čísel.

Definícia C1.5. Nech $a \in \mathbb{C}$ je komplexné číslo.

a) *Okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

b) *Uzavretým okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$\overline{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

c) *Prstencovým okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$D'(a, r) := D(a, r) \setminus \{a\}.$$

d) *Medzikružím* so stredom v bode a nazveme ľubovoľnú množinu typu

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\},$$

kde $0 \leq r_1 < r_2$ sú reálne čísla. Prstencové okolie je špeciálnym prípadom medzikružia.

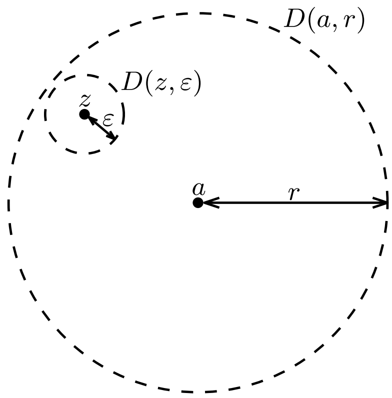
Otvorenou množinou teraz nazveme ľubovoľnú podmnožinu S množiny $\mathbb{C}$, ktorá pre každý bod z tejto množiny obsahuje aj nejaké jeho okolie. Inými slovami: nech zvolíme ľubovoľný bod otvorenej množiny S, vždy sa ešte z neho môžeme aspoň o nejakú malú vzdialenosť „pohnúť ľubovoľným smerom“ bez toho, aby sme množinu S opustili.

Definícia C1.6. Množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je *otvorená*, ak pre všetky $z \in S$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$.

Príklad C1.7. Každé okolie $D(a, r)$ pre $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ je otvorená množina. Ak totiž vezmeme ľubovoľné $z \in D(a, r)$, musí platiť $|z - a| < r$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že $\varepsilon < r - |z - a|$. Potom $D(z, \varepsilon) \subseteq D(a, r)$, pretože pre $w \in D(z, \varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}|w - a| = |w - z + z - a| \leq |w - z| + |z - a| < \varepsilon + |z - a| < \\ < r - |z - a| + |z - a| = r.\end{aligned}$$

Situácia je znázornená na obrázku C1.3.



Obr. C1.3: Každé okolie $D(a,r)$ je otvorená množina.

Príklad C1.8. Podobne možno ukázať, že aj množina $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > r\}$ je otvorená pre všetky $a \in \mathbb{C}$ a $r \geq 0$.

Príklad C1.9. Prázdna množina $\emptyset$ a množina $\mathbb{C}$ sú triviálne otvorené.

Tvrdenie C1.10.

a) *Ak S_k je otvorená množina pre všetky k z nejakej množiny K, tak aj množina $\bigcup_{k\in K}$ je otvorená.*

b) *Ak $S_1,\ldots,S_n \subseteq \mathbb{C}$ sú otvorené množiny, tak aj množina $\bigcap_{k=1}^{n} S_k$ je otvorená.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie. □

Príklad C1.11. Ľubovoľné medzikružie je prienikom dvoch otvorených množín; tiež teda ide o otvorenú množinu. V dôsledku toho je otvorenou množinou aj každé prstencové okolie.

Nasledujúcu definíciu opäť získame priamočiarou úpravou analogickej definície v reálnom obore.

Definícia C1.12. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina. *Hromadným bodom* množiny S nazveme ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ také, že pre všetky $\varepsilon > 0$ obsahuje prstencové okolie $D'(z,\varepsilon)$ aspoň jeden bod množiny S. Ak $z \in \mathbb{C}$ patrí do S a súčasne nie je hromadným bodom S, nazýva sa *izolovaným bodom* množiny S.

Ďalšími základnými topologickými pojmami, ktoré teraz potrebujeme definovať, sú pojmy *uzavretej množiny* a *uzáveru*.

Definícia C1.13. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina.

a) Množina S je *uzavretá*, ak je množina $\mathbb{C} \setminus S$ otvorená.

b) *Uzáverom* množiny S nazveme množinu $\overline{S}$ danú zjednotením S s množinou všetkých jej hromadných bodov.

Príklad C1.14. Z príkladu C1.8 je zrejmé, že každé uzavreté okolie $\overline{D}(a,r)$ pre $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ je uzavretá množina.

Príklad C1.15. Z príkladu C1.9 vyplýva, že množiny $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ sú súčasne otvorené aj uzavreté.

Ukážeme, že ide o jediné dve podmnožiny $\mathbb{C}$ s touto vlastnosťou. Skutočne: nech $S \subsetneq \mathbb{C}$ je neprázdna množina s neprázdnym komplementom $\mathbb{C} \setminus S$. Aby bola S otvorená a súčasne uzavretá, musia byť obidve množiny S a $\mathbb{C} \setminus S$ otvorené. Vezmime ľubovoľné $a \in S$ a $b \in \mathbb{C} \setminus S$ a spojme ich úsečkou $\{a+t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$. Uvažujme $z = a+t_0(b-a)$, kde $t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid a+t(b-a) \in S\}$. Určite pritom $0 < t_0 < 1$: z otvorenosti množiny S totiž vyplýva, že do S patrí aj nejaké dostatočne malé okolie bodu a; podobne z otvorenosti množiny $\mathbb{C} \setminus S$ vyplýva, že do $\mathbb{C} \setminus S$ patrí aj nejaké dostatočne malé okolie bodu b.

Keby teraz platilo $z \in S$, z otvorenosti S dostávame existenciu $\varepsilon > 0$ takého, že $D(z,\varepsilon) \subseteq S$. Z toho vyplýva, že existuje aj nejaké $\delta > 0$ také, že $a + (t_0+\delta)(b-a) \in S$, čo je spor s voľbou t_0. Podobne v prípade $z \in \mathbb{C} \setminus S$ dostávame existenciu čísla $\varepsilon > 0$ takého, že $D(z,\varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$, z čoho vyplýva, že pre nejaké $\delta > 0$ a všetky $t \in [t_0-\delta, t_0]$ platí $a + t(b-a) \in \mathbb{C} \setminus S$, čo je opäť spor s voľbou t_0. Množina S teda nemôže byť otvorená a súčasne uzavretá.

Dá sa očakávať, že pojem uzáveru bude s pojmom uzavretej množiny úzko súvisieť. Nasledujúce tvrdenie na tento súvis poukazuje.

Tvrdenie C1.16. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina. Potom platí:*

(i) *Množina S je uzavretá práve vtedy, keď obsahuje všetky svoje hromadné body.*

(ii) *Množina S je uzavretá práve vtedy, keď platí $\overline{S} = S$.*

(iii) *Uzáver $\overline{S}$ množiny S je najmenšou uzavretou množinou T spĺňajúcou $S \subseteq T \subseteq \mathbb{C}$.*

Dôkaz. Množina S je uzavretá práve vtedy, keď je množina $\mathbb{C} \setminus S$ otvorená. To je pravda práve vtedy, keď pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus S$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$, čiže $D'(z, \varepsilon)$ neobsahuje žiaden bod množiny S. To je práve vtedy, keď žiadne $z \in \mathbb{C} \setminus S$ nie je hromadným bodom S, t.j. keď S obsahuje všetky svoje hromadné body. Tým je dokázané tvrdenie (i) a aj tvrdenie (ii).

Zostáva dokázať (iii). Z (i) vyplýva, že každá uzavretá nadmnožina S musí obsahovať $\overline{S}$. Stačí teda ukázať, že množina $\overline{S}$ je uzavretá. Nech $z \in \mathbb{C}$ je hromadný bod množiny $\overline{S}$. Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom $D'(z, \varepsilon)$ obsahuje aspoň jeden bod $a \in \overline{S}$. Potom buď $a \in S$, alebo je bod a hromadným bodom množiny S, a teda pre všetky $\delta > 0$ obsahuje $D'(a, \delta)$ aspoň jeden bod množiny S; v druhom prípade zvoľme δ tak, aby platilo $\delta < \min\{|z-a|, \varepsilon - |z-a|\}$. Zisťujeme potom, že $D'(z, \varepsilon)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny S; keďže je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, je z hromadným bodom množiny S, a teda patrí do $\overline{S}$. Množina $\overline{S}$ teda obsahuje všetky svoje hromadné body a je uzavretá podľa (i). □

Ukončíme tento oddiel definíciou *ohraničených* a *kompaktných* množín.

Definícia C1.17. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina.

a) Množinu S nazveme *ohraničenou*, ak existuje $M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $z \in S$ platí $|z| \leq M$.

b) Množinu S nazveme *kompaktnou*, ak je súčasne ohraničená a uzavretá.

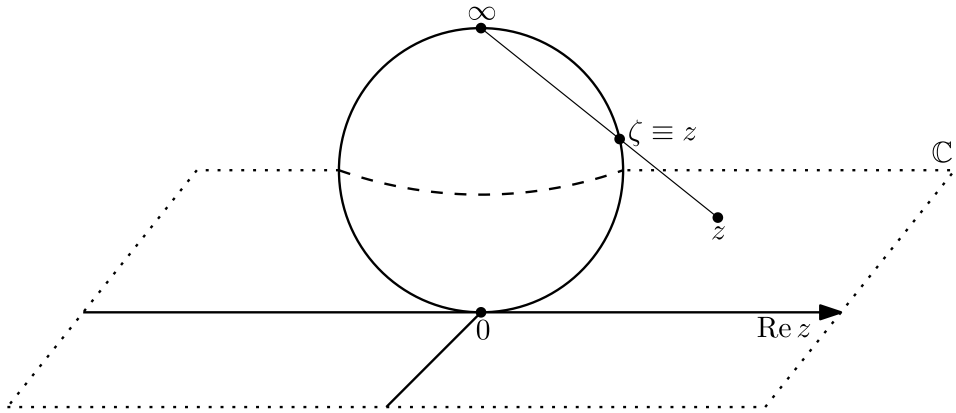
Rozšírená komplexná rovina

V reálnej analýze je často užitočné pracovať s rozšírenou reálnou osou $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. V nasledujúcom obdobným spôsobom rozšírime komplexnú rovinu. Na rozdiel od reálnej osi teraz máme viac ako dve možnosti ako „prísť do nekonečna“: môžeme sa tam totiž vydať napríklad po ľubovoľnej priamke v komplexnej rovine. Uvažovať komplexnú rovinu rozšírenú o nekonečne veľa bodov v nekonečne by bolo trochu ťažkopádne; oveľa užitočnejším konceptom sa javí byť *rozšírená komplexná rovina* $\widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, v ktorej všetky body v nekonečne stotožníme – všetky priamky teda oboma smermi vedú do jedného a toho istého nekonečna.

Prirodzeným modelom rozšírenej komplexnej roviny je takzvaná *Riemannova sféra.* Ide o povrch gule (napríklad o polomere 1/2) položenej svojím „južným pólom“ na bod $z = 0$ komplexnej roviny tak, ako na obrázku C1.4. Každý bod ζ Riemannovej sféry, okrem jej „severného pólu“, môžeme stotožniť s práve jedným bodom komplexnej roviny nasledujúcim spôsobom: veďme priamku pretínajúcu Riemannovu sféru v jej „severnom póle“ a v bode ζ. Táto priamka pretne komplexnú rovinu v jedinom bode z; body z a ζ následne stotožníme. Špeciálne teda napríklad „južný pól“ Riemannovej sféry zodpovedá bodu 0. Takéto zobrazenie Riemannovej sféry do komplexnej roviny $\mathbb{C}$ nazývame *stereografickou projekciou.*

Jediným bodom Riemannovej sféry, ktorý sa pri stereografickej projekcii do komplexnej roviny nezobrazí, je jej „severný pól“. Čím bližšie je však bod k „severnému pólu“, tým väčšia je absolútna hodnota komplexného čísla, na ktorý sa tento bod zobrazí. Je preto prirodzené „severný pól“ Riemannovej sféry stotožniť s bodom ∞, čím získavame užitočný model rozšírenej komplexnej roviny.

Dá sa ukázať, že vzorom ľubovoľnej kružnice v komplexnej rovine je pri stereografickej projekcii kružnica na Riemannovej sfére neprechádzajúca cez ∞ a naopak. Podobne vzorom ľubovoľnej priamky v komplexnej rovine je kružnica na Riemannovej sfére *prechádzajúca* cez ∞ a naopak. Detaily možno nájsť v [1].



Obr. C1.4: Riemannova sféra a stereografická projekcia.

Pojem okolia a prstencového okolia je možné definovať aj v rozšírenej komplexnej rovine: pre všetky $r > 0$ kladieme

$$D'(\infty, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} = \left\{ z \in \tilde{\mathbb{C}} \;\middle|\; \left|\frac{1}{z}\right| < r \right\} \setminus \{\infty\},$$
$$D(\infty, r) := D'(\infty, r) \cup \{\infty\} = \left\{ z \in \tilde{\mathbb{C}} \;\middle|\; \left|\frac{1}{z}\right| < r \right\},$$

kde $1/0 := \infty$ a $1/\infty := 0$. Opodstatnenie týchto definícií sa ukáže najmä vtedy, keď sa pozrieme na ich vzory na Riemannovej sfére.[4] Pomocou uvedených pojmov je možné definovať otvorené a uzavreté množiny v $\tilde{\mathbb{C}}$, hromadné body podmnožín $\tilde{\mathbb{C}}$, a podobne.

Súvislé množiny a oblasti

Intuitívne je viac ako zrejmé, čo máme na mysli pod *súvislou* množinou $S \subseteq \mathbb{C}$ – ide o množinu, ktorá pozostáva „z jedného kusu“ a nie z „viacerých kusov“. Formálna definícia už tak jednoduchá nie je. Náš prístup teda bude nasledujúci: súvislosť množiny najprv definujeme štandardným topologickým spôsobom [2], ktorý interpretujeme aj z intuitívneho hľadiska. Následne vo vete C1.21 dokážeme ekvivalentnú charakterizáciu súvislosti pre otvorené množiny, ktorá ukáže, že pojem súvislej otvorenej množiny je možné zachytiť aj „elementárnejším“ spôsobom a naozaj zodpovedá tomu, čo by sme intuitívne očakávali.

Definícia C1.18. Množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je *súvislá*, ak *neexistuje* dvojica neprázdnych množín $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ takých, že $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$ a $X \cup Y = S$. Množina S je *nesúvislá*, ak nie je súvislá.

Poznámka C1.19. Množina S je teda súvislá práve vtedy, keď platí nasledujúca vlastnosť: kedykoľvek rozdelíme množinu S na dve disjunktné neprázdne množiny X a Y – t.j. kedykoľvek $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ a $X \cup Y = S$ – musí buď uzáver množiny X obsahovať bod množiny Y, alebo naopak. To znamená, že tieto dve množiny spolu musia v určitom zmysle slova „susediť“ – jedna z nich musí obsahovať nejaký hromadný bod tej druhej.

Dokážeme najprv užitočné kritérium súvislosti pre *otvorené* množiny, ktoré sa nám neskôr zíde pri dôkazoch.

Tvrdenie C1.20. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je* otvorená *množina. Potom je S súvislá práve vtedy, keď neexistujú disjunktné neprázdne otvorené množiny $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ také, že $S = X \cup Y$.*

Dôkaz. Množina S je nesúvislá práve vtedy, keď existuje dvojica neprázdnych množín $U, V \subseteq \mathbb{C}$ takých, že $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ a $U \cup V = S$. To znamená

$$U \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{V} \qquad \text{a} \qquad V \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{U}, \tag{2}$$

[4] Jediné, čo tu trochu nesedí je, že okolie sa so zväčšujúcim sa polomerom zmenšuje. Táto skutočnosť však až tak podstatná nie je.

kde množiny $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ a $\mathbb{C} \setminus \overline{V}$ sú otvorené. Množiny $X := S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{V})$ a $Y := S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U})$ sú otvorené podľa tvrdenia C1.10. Z (2) a zo vzťahu $S = U \cup V$ vyplýva $U \subseteq X$ a $V \subseteq Y$. Z disjunktnosti množín U a $\overline{V}$ a zo vzťahu $S = U \cup V$ ale na druhej strane dostávame $X = S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{V}) \subseteq U$; podobne z disjunktnosti $\overline{U}$ a V vyplýva $Y = S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U}) \subseteq V$. Teda $X = U$ a $Y = V$, pričom tieto množiny sú disjunktné, neprázdne a otvorené a platí $S = X \cup Y$; tým je jedna z implikácií dokázaná. Opačnú (ľahšiu) implikáciu prenechávame čitateľovi. □

Definujme pre účely nasledujúcej vety[5] *úsečku* $[a, b]$ z bodu $a \in \mathbb{C}$ do bodu $b \in \mathbb{C}$ ako množinu

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

a *lomenú čiaru* z $a \in \mathbb{C}$ do $b \in \mathbb{C}$ ako zjednotenie úsečiek

$$L = [a_1, a_2] \cup [a_2 \cup a_3] \cup \ldots \cup [a_n, a_{n+1}],$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$, $a_1 = a$ a $a_{n+1} = b$. Budeme pritom hovoriť, že L je lomená čiara v $S \subseteq \mathbb{C}$, ak $L \subseteq S$.

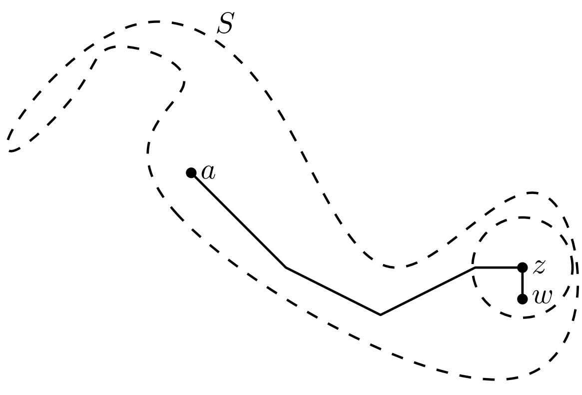
Veta C1.21. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je* otvorená *množina. Potom je S súvislá práve vtedy, keď pre všetky $a, b \in S$ existuje v S lomená čiara z bodu a do bodu b.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že je množina S súvislá. Zvoľme pevné $a, b \in S$ a dokážme existenciu lomenej čiary z a do b. Definujme množinu $F \subseteq S$ nasledovne:

$$F := \{z \in S \mid \text{v množine } S \text{ existuje lomená čiara z } a \text{ do } z\}.$$

Dokážeme, že množiny F a $S \setminus F$ sú obidve otvorené, z čoho vďaka otvorenosti a predpokladanej súvislosti množiny S z tvrdenia C1.20 vyplynie prázdnosť jednej z týchto množín. Keďže očividne $a \in F$, bude musieť byť prázdna množina $S \setminus F$, a teda aj platiť $F = S$; v dôsledku toho $b \in F$, čím bude prvá z implikácií dokázaná.

Zvoľme ľubovoľné $z \in F$. Potom existuje lomená čiara L z a do z. Keďže je množina S otvorená, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Ak teraz $w \in D(z, \varepsilon)$, predĺžením lomenej čiary L úsečkou $[z, w]$ tiež dostávame lomenú čiaru v S. Platí teda $D(z, \varepsilon) \subseteq F$ a F je otvorená množina (obrázok C1.5).



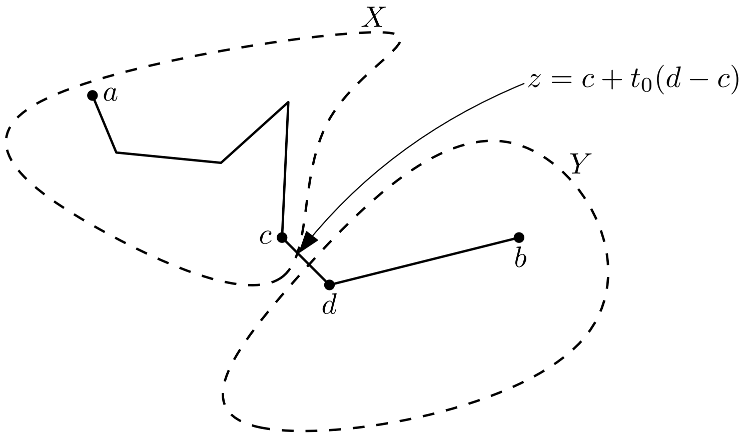
Obr. C1.5: Dôkaz, že množina F je otvorená.

Zvoľme teraz ľubovoľné $z \in S \setminus F$. Keďže je množina S otvorená, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Keby pre niektoré $w \in D(z, \varepsilon)$ platilo $w \in F$, existovala by v S lomená čiara L z a do w. Tú by ale úsečkou $[w, z]$ bolo možné predĺžiť na lomenú čiaru z a do z, tiež ležiacu v S; išlo by teda o spor s predpokladom $z \in S \setminus F$. Preto $D(z, \varepsilon) \subseteq S \setminus F$ a množina $S \setminus F$ je otvorená.

Za účelom dôkazu opačnej implikácie predpokladajme, že množina S nie je súvislá a súčasne z každého $a \in S$ do každého $b \in S$ možno viesť v S lomenú čiaru. Podľa tvrdenia C1.20 potom existujú disjunktné otvorené množiny $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ také, že $X \cup Y = S$. Zvoľme $a \in X$ a $b \in Y$ a uvažujme lomenú

[5] Neskôr úsečku definujeme viac „dynamickým“, aj keď v princípe ekvivalentným, spôsobom.

čiaru z a do b. Jej súčasťou musí byť úsečka $[c, d] = \{c + t(d - c) \mid t \in [0, 1]\}$ vedúca z bodu $c \in X$ do bodu $d \in Y$, ako je to znázornené na obrázku C1.6. Položme $t_0 := \sup\{t \in [0, 1] \mid c + t(d - c) \in X\}$. Z otvorenosti množín X a Y pritom vyplýva $0 < t_0 < 1$. Uvažujme bod $z = c + t_0(d - c)$. Keby platilo $z \in X$, z otvorenosti X by sme dostali existenciu okolia $D(z, \varepsilon) \subseteq X$, a teda aj existenciu čísla $\delta > 0$ takého, že $c + (t_0 + \delta)(d - c) \in X$; to by bol spor s definíciou t_0. Keby na druhej strane platilo $z \in Y$, z otvorenosti Y by vyplývala existencia okolia $D(z, \varepsilon) \subseteq Y$; existovalo by preto $\delta > 0$ také, že pre všetky $t \in [t - \delta, t_0]$ platí $c + t(d - c) \in X$, čo je opäť spor s definíciou t_0. Prišli sme teda k sporu a implikácia je dokázaná. $\square$



Obr. C1.6: Dôkaz, že nesúvislosť znemožňuje existenciu lomenej čiary medzi niektorými dvojicami bodov.

Poznámka C1.22. Veta C1.21 zostane v platnosti, aj keď v jej znení nahradíme existenciu lomenej čiary napríklad existenciou vhodne definovanej krivky alebo existenciou lomenej čiary pozostávajúcej iba z „horizontálnych a vertikálnych úsečiek“. Čitateľ sa o tom môže presvedčiť sám v rámci jednoduchého cvičenia.

Na záver ešte uveďme definíciu *oblasti*, čo bude počas semestra najčastejšie využívaný typ definičného oboru (jednohodnotovej) funkcie komplexnej premennej. Pôjde o množinu, ktorá je súvislá – čo je celkom logický predpoklad umožňujúci vyhnúť sa nutnosti uvažovať „pôsobenie na diaľku“ – a zároveň otvorená – čo znamená, že v každom bode oblasti môžeme skúmať lokálne vlastnosti funkcie „v ľubovoľnom smere“, čím sa zbavíme väčšiny nepríjemných okrajových prípadov. Všimnime si tiež, že vďaka otvorenosti je súvislosť oblasti daná aj ekvivalentnými podmienkami z tvrdenia C1.20 a vety C1.21.

Definícia C1.23. *Oblasť* je ľubovoľná súvislá otvorená množina $S \subseteq \mathbb{C}$.

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.

[2] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.

[3] Simmons, G. F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1963.