Cvičenia č. 2

2. októbra 2019

1. Uvažujme funkciu $f(z) = \overline{z}$. Nájdite všetky body $a \in \mathbb{C}$, v ktorých je táto funkcia diferencovateľná.

2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Dokážte, že každá funkcia $f\colon S \to \mathbb{R}$ holomorfná na S je na oblasti S nutne konštantná.

3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na S taká, že funkcia $\operatorname{Re} f$ je na S konštantná. Dokážte, že v takom prípade musí byť na S konštantná aj samotná funkcia f.

4. Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí $1/e^z = e^{-z}$. Dokážte, že uvedené tvrdenie je zrejmé.

5. Dokážte, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platia vzťahy
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{a} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

6. Funkcia kosínus je na $\mathbb{R}$ párna a funkcia sínus je na $\mathbb{R}$ nepárna. Zostáva táto vlastnosť v platnosti aj na $\mathbb{C}$?

7. Dokážte, že pre všetky $z, w \in \mathbb{C}$ platia *súčtové vzorce*
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$
$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

8. Funkcie sínus a kosínus sú na $\mathbb{R}$ ohraničené. Zostáva táto ich vlastnosť v platnosti aj na $\mathbb{C}$?

9. Nájdite všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že:
   a) $e^z - 1 = 0$,
   b) $e^z + 1 = 0$.

10. Nájdite všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že:
    a) $\sin z = 0$,
    b) $\cos z = 0$.