Cvičenia č. 3: Základné multifunkcie a príklady na integrovanie

Peter Kostolányi

9. októbra 2019

Viaceré prirodzené funkcie komplexnej premennej jemne nabúravajú zažitú predstavu o pojme funkcie – pre jedno $z \in \mathbb{C}$ môžu mať viac ako jednu zmysluplnú výstupnú hodnotu. Vieme už, že príkladom takejto funkcie je napríklad argument; dnes uvidíme, že rovnaká situácia nastáva aj pri logaritmoch, či iných ako celočíselných mocninách. Takéto funkcie nazývame *viachodnotovými funkciami* alebo *multifunkciami* a na týchto cvičeniach k nim zaujmeme ten najelementárnejší možný prístup, ktorý nám vystačí zhruba do polovice semestra; o niečo málo viac sa o takto „naivne“ chápaných multifunkciách možno dočítať v [1]. Neskôr ku koncu semestra pôjdeme v súvislosti s multifunkciami do väčšej hĺbky.

Druhá polovica týchto cvičení je venovaná príkladom na integrovanie funkcií komplexnej premennej (čiže na precvičenie látky z minulej prednášky).

Argument ako funkcia

Na prvom cvičení sme videli, že argument komplexného čísla z nie je určený jednoznačne, ale určuje celú množinu hodnôt $[\![\arg z]\!]$: ide o takzvanú *viachodnotovú funkciu* alebo *multifunkciu*. Pre nenulové komplexné čísla sa však rôzne argumenty môžu líšiť iba o celočíselný násobok 2π. Pre každé $k \in \mathbb{Z}$ preto môžeme definovať jednohodnotovú funkciu $\arg_k \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ takú, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\arg_k(z) = \theta \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \theta \in [\![\arg z]\!] \cap [2k\pi, 2(k+1)\pi),$$

t.j. vyberieme jednoznačne danú hodnotu argumentu z intervalu $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$. Takéto funkcie nazývame *vetvami* viachodnotovej funkcie $\arg z$. Každá vetva $\arg_k(z)$ je zjavne spojitá na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ a na takzvanom *reze* komplexnej roviny $(0, \infty)$ spojitá nie je. Pre všetky $a \in (0, \infty)$ ale platí

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg_k(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \arg_{k+1}(z);$$

vetva $\arg_k$ teda akoby „chcela spojito prejsť“ do vetvy $\arg_{k+1}$. Možno si tiež všimnúť, že namiesto rezu $(0, \infty)$ môžeme komplexnú rovinu narezať aj pozdĺž inej polpriamky z bodu 0 a dostaneme obdobnú situáciu – v takom prípade len argument vyberáme z iných intervalov.

V jednohodnotovú funkciu argumentu, ktorá by bola spojitá v bode 0, očividne dúfať nemôžeme: v každom okolí bodu 0 totiž vieme nájsť komplexné číslo ľubovoľného argumentu. Neexistuje však ani funkcia argumentu, ktorá by bola spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. To možno dokázať nasledovne: predpokladajme, že existuje takáto spojitá funkcia $\theta \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Potom by bola spojitá aj funkcia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná pre všetky $t \in \mathbb{R}$ predpisom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(\theta(e^{it}) - t).$$

Ľahko však vidieť, že táto spojitá funkcia nadobúda iba celočíselné hodnoty – musí preto byť konštantná, z čoho dostávame napríklad $\theta(e^{i2\pi}) = \theta(e^0) + 2\pi$. To je však spor, pretože $e^{i2\pi} = e^0 = 1$.

Prirodzený logaritmus

Prirodzený logaritmus $\ln x$ kladného reálneho čísla x je – vďaka injektívnosti reálnej exponenciálnej funkcie – definovaný ako *jediné* reálne číslo y, pre ktoré platí $e^y = x$. Podobne by sme teraz chceli definovať funkciu logaritmu v komplexnom obore. Hľadáme teda všetky komplexné riešenia rovnice

$$e^w = z \tag{1}$$

pre dané $z \in \mathbb{C}$. Z dôsledku P2.27 vyplýva nenulovosť exponenciálnej funkcie na celom $\mathbb{C}$; môžeme preto predpokladať, že $z \neq 0$. Ak teraz položíme $w = u + iv$, vďaka dôsledku P2.27 máme $|e^w| = e^u$

a $[\![\arg e^w]\!] = \{v+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Rovnosť (1) je teda ekvivalentná dvojici rovností $e^u = |z|$ a $v \in [\![\arg z]\!]$. Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ preto

$$e^w = z \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad w = \ln|z| + i\theta, \text{ kde } \theta \in [\![\arg z]\!].$$

Prirodzený logaritmus komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ teda definujeme ako množinu

$$[\![\ln z]\!] := \{\ln|z| + i\theta \mid \theta \in [\![\arg z]\!]\},$$

čím získavame ďalšiu dôležitú viachodnotovú funkciu. Platí $w \in [\![\ln z]\!]$ práve vtedy, keď $e^w = z$.

Opäť sa môžeme obmedziť na vhodný interval argumentov. Napríklad môžeme komplexnú rovinu rozrezať pozdĺž polpriamky $[0, \infty)$ a pre všetky $k \in \mathbb{Z}$ uvažovať funkciu $\ln_k \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definovanú pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ predpisom

$$\ln_k(z) := \ln|z| + i\theta, \qquad \text{kde } \theta \in [\![\arg z]\!] \cap [2k\pi, 2(k+1)\pi).$$

Vidíme potom, že funkcia $\operatorname{Re}\ln_k(z) = \ln|z|$ je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{Im}\ln_k(z)$ je – keďže ide o funkciu argumentu obmedzenú na $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ – spojitá na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ a nespojitá na $(0, \infty)$. Funkcia $\ln_k(z)$ je teda tiež spojitá na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ a nespojitá na $(0, \infty)$. Pre všetky $a \in (0, \infty)$ navyše platí

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \ln_k(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \ln_{k+1}(z).$$

Funkcia $\ln_k(z)$ je pre všetky $k \in \mathbb{Z}$ holomorfná na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Pre $a \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ totiž substitúciou $\ell(h) := \ln_k(a+h) - \ln_k(a)$ a $s := \ln_k(a)$ dostávame

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln_k(a+h) - \ln_k(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ell(h)}{e^{\ell(h)+s} - e^s} = \lim_{h \to 0} \frac{\ell(h)}{e^s(e^{\ell(h)} - 1)} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{a(e^u - 1)} = \frac{1}{a}.$$

Funkcie $\ln_k(z)$ teda nazývame aj *holomorfnými vetvami logaritmu.*

Mocninové funkcie

Nech $z \in \mathbb{C}$. Pre dané $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ najprv nájdime všetky n-té odmocniny čísla z; to znamená všetky čísla $w \in \mathbb{C}$, pre ktoré je splnená rovnosť

$$w^n = z. \tag{2}$$

Ak $z = re^{i\theta}$ a $w = se^{i\phi}$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ a $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, musí platiť $s = r^{1/n}$ a $n\phi = \theta + 2k\pi$ pre nejaké $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Preto kladieme

$$[\![z^{1/n}]\!] := \left\{ |z|^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\} = \left\{ e^{i2k\pi/n} |z|^{1/n} e^{i\theta/n} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}, \tag{3}$$

kde θ je ľubovoľný prvok $[\![\arg z]\!]$. Takto by sme vedeli definovať aj racionálne mocniny komplexného čísla, avšak na definíciu reálnych a komplexných mocnín potrebujeme zvoliť iný prístup. Využijeme funkciu komplexného logaritmu a pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ definujeme

$$[\![z^\alpha]\!] := \{e^{\alpha w} \mid w \in [\![\ln z]\!]\} = \{e^{\alpha(\ln|z| + i\theta)} \mid \theta \in [\![\arg z]\!]\}. \tag{4}$$

Ľahko overíme, že definícia (4) je konzistentná s definíciou (3); pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ totiž

$$e^{(\ln|z| + i\theta)/n} = e^{\ln|z|/n} e^{i\theta/n} = |z|^{1/n} e^{i\theta/n}$$

a všetky rôzne $\theta \in [\![\arg z]\!]$ tak dajú práve množinu (3). Máme teda definovanú ďalšiu spomedzi najvýznamnejších multifunkcií.

Vráťme sa ešte na chvíľu k multifunkcii $[\![z^{1/n}]\!]$. Obmedzme sa na argumenty z intervalu $[0, 2\pi)$ – čiže narežme komplexnú rovinu pozdĺž polpriamky $[0, \infty)$ – a definujme pre $k = 0, \ldots, n-1$ funkciu

$f_k\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ako vetvu multifunkcie $[\![z^{1/n}]\!]$, v ktorej vyberieme k-tu spomedzi jej n-tých odmocnín: pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ teda položme

$$f_k(z) := e^{i2k\pi/n}|z|^{1/n}e^{i\theta/n},$$

kde θ je najmenší nezáporný reálny prvok $[\![\arg z]\!]$. Pre $k = 0, \ldots, n-1$ a všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ potom $f_k(z)^n = z$. Funkcie $f_k(z)$ sú navyše holomorfné na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, keďže

$$f_k(z) = e^{\ln_k(z)/n},$$

kde funkcia $\ln_k(z)$ je k-ta holomorfná vetva logaritmu; holomorfnosť funkcie f_k na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ tak vyplýva z vety o derivácii zloženej funkcie. Ľahko tiež overíme, že funkcie $f_k(z)$ sú nespojité na $(0, \infty)$, pričom ale platí

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} f_k(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f_{k+1}(z),$$

kde sčítanie v indexe funkcie f je modulo n. Funkcie $f_0, \ldots, f_{n-1}$ teda nazývame *holomorfnými vetvami* multifunkcie $[\![z^{1/n}]\!]$. Veľmi podobná je situácia aj pri všeobecnom komplexnom exponente α; takáto mocninová funkcia však môže mať aj nekonečne veľa holomorfných vetiev.

Problematiku viachodnotových funkcií teraz na čas zanecháme. Neskôr sa jej budeme venovať detailnejšie.

Príklady na integrovanie

1. Vypočítajte

   $$\int_\gamma z^2 \,\mathrm{d}z$$

   pre:

   a) $\gamma = \kappa(0, 1)$,
   b) $\gamma = \kappa_{[-\pi/2,\pi/2]}(0, 1)$,
   c) $\gamma = [-i, 1] + [1, 0]$,
   d) $\gamma = [0, -i]$.

2. Nech $\gamma = [-1, 1] + [1, i] + [i, -1]$. Vypočítajte:

   a) $\int_\gamma e^z \,\mathrm{d}z$,
   b) $\int_\gamma \cos z \,\mathrm{d}z$.

3. Použite „základnú vetu o krivkových integráloch" na dôkaz, že neexistuje funkcia prirodzeného logaritmu, ktorá by bola holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Zhora odhadnite absolútnu hodnotu integrálov:

   a) $\int_{[1,2+2i]} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z$,
   b) $\int_{\kappa(3i,1)} \frac{e^z}{(z+i)(z-2)^2} \,\mathrm{d}z$.

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.