Cvičenia č. 4: Homotópie a Jordanova veta

Peter Kostolányi

16. októbra 2019

Viac o homotópiách

Homotópie sme na prednáške definovali prostredníctvom elementárnych deformácií. Tento prístup, prebratý z [1], nie je vôbec obvyklý – homotópie sú totiž vo svojej podstate predovšetkým *spojitými transformáciami* kriviek a definícia z prednášky sa zvyčajne považuje len za ich ekvivalentnú charakterizáciu vhodnú pre účely dôkazu Cauchyho integrálnej vety. Teraz preto homotópie uzavretých kriviek definujeme ešte raz obvyklým topologickým spôsobom a následne dokážeme ekvivalenciu takto získaného pojmu s pojmom homotópie zavedeným na prednáške.

Keďže reparametrizácia nemení hodnoty integrálov pozdĺž kriviek, môžeme sa v definícii homotópie bez ujmy na všeobecnosti obmedziť na krivky parametrizované nad rovnakými intervalmi.

Definícia C4.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \overline{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky také, že $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že uzavreté krivky γ a $\overline{\gamma}$ sú *homotopické* v S, ak existuje zobrazenie $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$ spĺňajúce nasledujúce podmienky:

(i) H je spojité (ako funkcia každého zo svojich parametrov, resp. ekvivalentne ako funkcia dvoch premenných).

(ii) Pre všetky $\tau \in [0,1]$ je krivka $\gamma_\tau\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ ako $\gamma_\tau(t) = H(\tau, t)$ uzavretá a po častiach hladká.

(iii) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí $H(0,t) = \gamma(t)$ a $H(1,t) = \overline{\gamma}(t)$.

Takéto zobrazenie H nazývame *homotópiou* z γ na $\overline{\gamma}$.

Tvrdenie C4.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \overline{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky také, že $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$. Potom γ a $\overline{\gamma}$ sú – v zmysle definície C4.1 – homotopické v S práve vtedy, keď $\overline{\gamma}$ vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $\overline{\gamma}$ vznikne z γ jedinou elementárnou deformáciou. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a po častiach hladké krivky $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ a $\overline{\gamma}_0, \ldots, \overline{\gamma}_{n-1}$ také, že platí $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1} = \gamma$ a $\overline{\gamma}_0 + \ldots + \overline{\gamma}_{n-1} = \overline{\gamma}$ a pre $k = 0, \ldots, n-1$ existuje konvexná oblasť $S_k \subseteq S$, pre ktorú $\gamma_k^*, \overline{\gamma}_k^* \subseteq S_k$. Bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladajme, že existujú reálne čísla $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{n-1}$ a $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_{n-1} = \beta$ také, že pre $k = 0, \ldots, n-1$ sú krivky γ_k a $\overline{\gamma}_k$ zobrazeniami typu $\gamma_k, \overline{\gamma}_k\colon [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ a pre $k = 0, \ldots, n-2$ platí $\beta_k = \alpha_{k+1}$. Pre $k = 0, \ldots, n-1$ teraz definujme zobrazenie $H_k\colon [0,1] \times [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ predpisom

$$H_k(\tau, t) = \gamma_k(t) + \tau(\overline{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t));$$

od bodu $\gamma_k(t)$ teda k bodu $\overline{\gamma}_k(t)$ prechádzame postupne po úsečke; konvexnosť oblasti S_k pritom zaručuje, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ platí $H_k(\tau, t) \in S_k$. Homotópiu $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ z γ na $\overline{\gamma}$ teraz môžeme pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha, \beta]$ definovať predpisom $H(\tau, t) = H_k(\tau, t)$, kde $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ je také, že $t \in [\alpha_k, \beta_k]$. Je zrejmé, že H spĺňa podmienky *(i)* a *(iii)* z definície C4.1. Ľahko tiež vidieť, že ak sú krivky γ_k a $\overline{\gamma}_k$ po častiach hladké, musí byť po častiach hladká aj krivka daná pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ ako $H_k(\tau, t) = \gamma_k(t) + \tau(\overline{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t))$; splnená je teda aj podmienka *(ii)*. Keďže nakoniec obraz každého zo zobrazení H_k leží pod S_k, musí obraz H ležať pod S, čo dokazuje, že H je naozaj homotópia v S.

Ak ďalej $\overline{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ vznikne z $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ postupnosťou m elementárnych deformácií, z predchádzajúceho vyplýva, že existujú homotópie $H_1, \ldots, H_m\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$ také, že pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí $H_1(0,t) = \gamma(t)$, $H_m(1,t) = \overline{\gamma}(t)$ a $H_\ell(1,t) = H_{\ell+1}(0,t)$ pre $\ell = 1, \ldots, m-1$. Potom ale ľahko vidieť, že zobrazenie $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$, dané pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha, \beta]$ predpisom

$H(\tau, t) = H_\ell(\tau', t)$, kde $\ell \in \{1, \dots, m\}$ je také, že $\tau \in [(\ell-1)/m, \ell/m]$ a $\tau = (\ell-1)/m + \tau'/m$, je homotópiou kriviek γ a $\overline{\gamma}$ v S.

Predpokladajme nakoniec, že $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$ je homotópiou uzavretej krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ na uzavretú krivku $\overline{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ v oblasti S. Ľahko možno dokázať, že obraz homotópie H – čiže množina $H([0,1], [\alpha, \beta])$ – je uzavretou podmnožinou T množiny S. Keby navyše množina T obsahovala body ľubovoľne blízko množiny $\mathbb{C} \setminus S$, mala by množina T hromadný bod v $\mathbb{C} \setminus S$, čo by spoločne s jej uzavretosťou bolo v spore s inklúziou $T \subseteq S$. Existuje teda $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $a \in T$ platí $D(a, \varepsilon) \subseteq S$. Keďže sú intervaly $[0,1]$ a $[\alpha, \beta]$ uzavreté, je homotópia H na $[0,1] \times [\alpha, \beta]$ rovnomerne spojitá.[1] V dôsledku toho existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky dvojice bodov $(\tau_1, t_1), (\tau_2, t_2) \in [0,1] \times [\alpha, \beta]$ platí $|H(\tau_1, t_1) - H(\tau_2, t_2)| < \varepsilon/2$ kedykoľvek súčasne máme $|\tau_2 - \tau_1| < \delta$ a $|t_2 - t_1| < \delta$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\delta = 1/m$ pre nejaké kladné prirodzené číslo m. „Dostatočne hustým“ konečným pokrytím krivky $H(k/m, \cdot)$ okoliami s polomerom ε tak pre $k = 0, \dots, m-1$ získavame konvexné oblasti zaručujúce existenciu elementárnej deformácie tejto krivky na krivku $H((k+1)/m, \cdot)$.[2] Krivka $\overline{\gamma}$ teda skutočne vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií. □

Doposiaľ sme sa zaoberali iba homotopickými *uzavretými* krivkami. Obdobný – a v topológii významnejší – koncept homotópie možno zaviesť aj pre vo všeobecnosti neuzavreté krivky, pre ktoré ale predpokladáme, že majú rovnaké počiatočné a koncové body.

Definícia C4.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \overline{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú po častiach hladké krivky také, že $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = \overline{\gamma}(\alpha)$ a $\gamma(\beta) = \overline{\gamma}(\beta)$. Hovoríme, že krivky γ a $\overline{\gamma}$ sú *homotopické* v S (ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi), ak existuje zobrazenie $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$ spĺňajúce nasledujúce podmienky:

- (*i*) H je spojité (ako funkcia každého zo svojich parametrov, resp. ekvivalentne ako funkcia dvoch premenných).
- (*ii*) Pre všetky $\tau \in [0,1]$ je krivka $\gamma_\tau\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ ako $\gamma_\tau(t) = H(\tau, t)$ po častiach hladká a platí $\gamma_\tau(\alpha) = \gamma(\alpha)$ a $\gamma_\tau(\beta) = \gamma(\beta)$.
- (*iii*) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí $H(0, t) = \gamma(t)$ a $H(1, t) = \overline{\gamma}(t)$.

Takéto zobrazenie H nazývame *homotópiou* z γ na $\overline{\gamma}$.

Vlastnosti homotópií kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú v mnohom podobné ako pre uzavreté krivky, ako sa čitateľ môže presvedčiť riešením nasledujúcich dvoch úloh.

Cvičenie C4.4. Definujte elementárne deformácie po častiach hladkých kriviek s pevne danými počiatočnými a koncovými bodmi tak, aby bola dvojica takýchto kriviek homotopická práve vtedy, keď jedna vznikne z druhej postupnosťou elementárnych deformácií.

Cvičenie C4.5. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $\gamma, \overline{\gamma}$ sú homotopické po častiach hladké krivky s rovnakým počiatočným a koncovým bodom spĺňajúce $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$. Dokážte, že potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta

Uvedieme teraz dve významné topologické vety vyznačujúce sa intuitívnou zrejmosťou ich tvrdení, no na druhej strane značnou netriviálnosťou ich dôkazov – *Jordanovu vetu* (o kružnici) a *Jordanovu-Schoenfliesovu vetu*. Tieto vety nebudeme dokazovať, ale občas ich budeme využívať. Vždy, keď sa tak stane, explicitne na to upozorníme.

[1] Inými slovami: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ a $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ spĺňajúce $|\tau_2 - \tau_1| < \delta$ a $|t_2 - t_1| < \delta$ platí $|H(\tau_2, t_2) - H(\tau_1, t_1)| < \varepsilon$. Dôkaz je podobný ako pre funkcie jednej reálnej premennej a prenechávame ho čitateľovi ako cvičenie.

[2] Môžeme vziať napríklad okolia $D(H(k/m, \alpha + j\delta), \varepsilon)$ pre $j = 0, \dots, \lceil(\beta - \alpha)/\delta\rceil$.

Jordanova veta hovorí o tom, že každá jednoduchá uzavretá krivka – čiže každá Jordanova krivka – γ rozdeľuje komplexnú rovinu na dve podoblasti (t.j. súvislé otvorené podmnožiny). Jedna z nich je pritom ohraničená a nazveme ju *vnútrom* krivky γ; ďalšia je neohraničená a nazveme ju *vonkajškom krivky* γ. Hoci je toto tvrdenie intuitívne očividné, jeho dôkaz nie je zďaleka triviálny.

Veta C4.6 (Jordanova veta)**.** *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Množina $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je potom disjunktným zjednotením dvojice oblastí $\mathbf{I}(\gamma)$ a $\mathbf{O}(\gamma)$, kde $\mathbf{I}(\gamma)$ je ohraničená a $\mathbf{O}(\gamma)$ je neohraničená. Oblasť $\mathbf{I}(\gamma)$ potom nazývame* vnútrom *krivky γ a oblasť $\mathbf{O}(\gamma)$ nazývame jej* vonkajškom.

Pre naše účely bude podstatný ešte jeden súvisiaci fakt: vnútro každej Jordanovej je nielen súvislé, ale dokonca jednoducho súvislé. To je intuitívne zrejmé, pretože vo vnútre *jednoduchej* uzavretej krivky „nemajú ako vzniknúť diery“. Dôkaz tohto tvrdenia je však ešte náročnejší ako v prípade Jordanovej vety. Prísť k nemu možno s využitím nasledujúcej *Jordanovej-Schoenfliesovej vety*; pod *homeomorfizmom* chápeme spojitú bijekciu $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ktorá má aj spojitú inverznú funkciu.

Veta C4.7 (Jordanova-Schoenfliesova veta)**.** *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Potom existuje homeomorfizmus $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taký, že $\varphi(\mathbf{I}(\gamma)) = D(0,1)$, $\varphi(\gamma^*) = \kappa(0,1)^*$ a $\varphi(\mathbf{O}(\gamma)) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$.*

Jednoduchá súvislosť množiny $\mathbf{I}(\gamma)$ je dôsledkom Jordanovej-Schoenfliesovej vety. Dá sa totiž ukázať, že jednoduchú súvislosť možno ekvivalentne definovať aj ako homotopickosť ľubovoľnej (nie nutne po častiach hladkej) uzavretej krivky s bodom. Takto zmenená definícia jednoduchej súvislosti je zjavne topologickým invariantom: množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá práve vtedy, keď je jednoducho súvislá množina $\varphi(S)$ pre ľubovoľný homeomorfizmus φ. Ak totiž v definícii homotópie upustíme od podmienky, aby všetky deformované krivky boli po častiach hladké, možno homotópie s homeomorfizmami „skladať“. Druhá časť nasledujúceho dôsledku vyplýva z toho, že sa hranica množiny $\mathbf{I}(\gamma)$ – čiže množina γ^* – pri homeomorfizme zobrazí na $\kappa(0,1)^*$.

Dôsledok C4.8. *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Potom je množina $\mathbf{I}(\gamma)$ jednoducho súvislá. Navyše existuje jednoducho súvislá oblasť G taká, že $G \supseteq \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$.*

Prijatie takto netriviálnych viet za „axiómy“ môže u čitateľa vzbudiť oprávnenú nevôľu. V nasledujúcom ale tieto výsledky budeme využívať čo možno „najzodpovednejšie“:

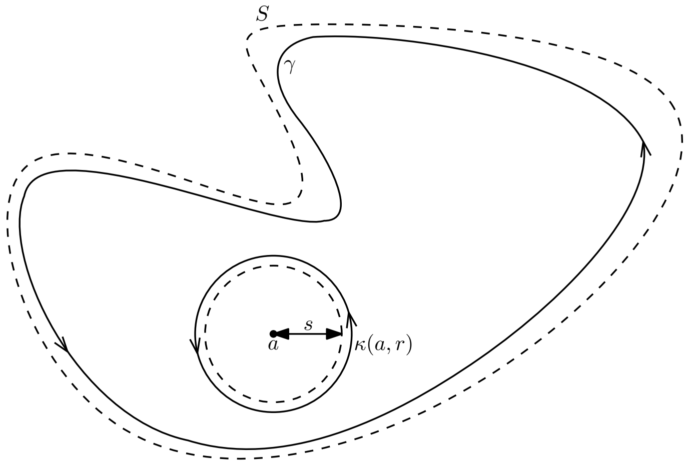
- Jordanovu vetu a dôsledok C4.8 budeme potrebovať v nasledujúcom oddiele a na nasledujúcej prednáške pri formulácii a dôkaze niektorých všeobecnejších variantov Cauchyho integrálneho vzorca. Vždy, keď bude v znení alebo dôkaze niektorého tvrdenia Jordanova alebo Jordanova-Schoenfliesova veta ukrytá, explicitne na to upozorníme.

- Slabšie varianty Cauchyho integrálneho vzorca dokážeme bez použitia spomínaných nedokázaných tvrdení. Pre ďalšie krivky v praxi používané v súvislosti s Cauchyho integrálnym vzorcom (napríklad pre uzavreté krivky zložené z konečného počtu úsečiek a kruhových oblúkov) je navyše ľahké dokázať Jordanovu vetu aj dôsledok C4.8 *ad hoc*; nedôverčivý čitateľ teda môže závislosť tvrdení od Jordanovej vety a dôsledku C4.8 interpretovať aj ako dodatočný predpoklad, ktorý je pri ich použití potrebné overiť.

- Neskôr v priebehu semestra dokážeme iný – a dokonca ešte o niečo všeobecnejší – variant Cauchyho integrálneho vzorca, pri formulácii a dôkaze ktorého nebude potrebná ani Jordanova veta, ani dôsledok C4.8. Cesta k tomuto variantu Cauchyho integrálneho vzorca je ale o niečo menej intuitívna, než je tomu pre varianty Jordanovu vetu využívajúce (čo je aj dôvodom, prečo sa týmito variantmi vôbec budeme zaoberať).

Ďalšie tvrdenie o deformácii

Nasledujúce tvrdenie, pri formulácii a dôkaze ktorého budeme používať Jordanovu vetu ako aj dôsledok C4.8, využijeme na nasledujúcej prednáške pri dôkaze niektorých všeobecnejších variantov Cauchyho integrálneho vzorca.



Obr. C4.1: Krivky zo znenia tvrdenia C4.9.

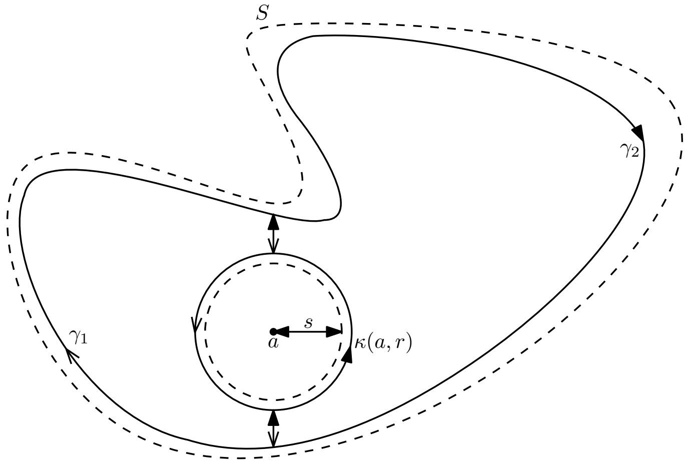
Tvrdenie C4.9. *Nech S je oblasť, γ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá krivka s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$, $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ je bod, $s > 0$ je číslo také, že $\overline{D}(a,s) \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ a $f\colon S \setminus \overline{D}(a,s) \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na $S \setminus \overline{D}(a,s)$. Nech ďalej $r > s$ je číslo také, že $\kappa(a,r)^* \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Nech γ je zobrazenie typu $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Veďme z bodu $\kappa(a,r)(\pi/2)$ polpriamku v smere rastúcej imaginárnej zložky; z ohraničenosti $\mathbf{I}(\gamma)$ vyplýva, že sa táto polpriamka v niektorom bode $\gamma(\mu)$ po prvý raz pretne s krivkou γ. Podobne môžeme viesť polpriamku z bodu $\kappa(a,r)(3\pi/2)$ v smere klesajúcej imaginárnej zložky a táto sa s krivkou γ po prvý raz pretne v nejakom inom bode $\gamma(\nu)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mu = \alpha$, a teda $\gamma(\mu) = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$; v opačnom prípade stačí krivku γ reparametrizovať. Označme teraz

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &:= (\kappa(a,r) \restriction [\pi/2, 3\pi/2]) + [\kappa(a,r)(3\pi/2), \gamma(\nu)] + (-(\gamma \restriction [\alpha,\nu])) + [\gamma(\alpha), \kappa(a,r)(\pi/2)],\\
\gamma_2 &:= (\kappa(a,r) \restriction [3\pi/2, 2\pi]) + (\kappa(a,r) \restriction [0,\pi/2]) + [\kappa(a,r)(\pi/2), \gamma(\alpha)] + (-(\gamma \restriction [\nu,\beta])) +\\
&\qquad + [\gamma(\nu), \kappa(a,r)(3\pi/2)].
\end{aligned}$$

Tieto krivky sú znázornené na obrázku C4.2.



Obr. C4.2: Konštrukcia kriviek γ_1 a γ_2 v dôkaze tvrdenia C4.9.

Krivky γ_1 a γ_2 sú jednoduché a uzavreté – z dôsledku C4.8 teda vyplýva, že $\gamma_1^* \cup \mathbf{I}(\gamma_1)$ a $\gamma_2^* \cup \mathbf{I}(\gamma_2)$ sú podmnožinami nejakých jednoducho súvislých oblastí. Tie navyše možno zvoliť tak, aby na nich bola funkcia f holomorfná. Z Cauchyho integrálnej vety teda dostávame

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

z čoho už priamo vyplýva

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tvrdenie je dokázané. □

Tvrdenie C4.9 môžeme použiť napríklad na zosilnenie tvrdenia P3.16 hovoriaceho o hodnotách pravdepodobne najvýznamnejších konkrétnych integrálov v komplexnej analýze – v ňom už teraz nemusíme uvažovať integrály pozdĺž kružníc okolo bodu $a \in \mathbb{C}$; rovnaké hodnoty dostaneme aj integrovaním pozdĺž ľubovoľnej jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky takej, že bod a leží v jej vnútri.

Dôsledok C4.10. *Nech $a \in \mathbb{C}$, γ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \notin \gamma^*$ a $k \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\int_{\gamma} (z-a)^k\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{ak } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 2\pi i & \text{ak } k = -1 \text{ a } a \in \mathbf{I}(\gamma), \\ 0 & \text{ak } k = -1 \text{ a } a \in \mathbf{O}(\gamma). \end{cases}$$

Dôkaz. Pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ stačí použiť tvrdenie P3.16 a tvrdenie C4.9. Tvrdenie pre $a \in \mathbf{O}(\gamma)$ vyplýva buď zo „základnej vety o krivkových integráloch“ alebo z Cauchyho integrálnej vety v súčinnosti s dôsledkom C4.8. □

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.