Cvičenia č. 5

23. októbra 2019

1. Vypočítajte
$$\int_{\kappa(a,r)} \frac{e^z+1}{z}\,\mathrm{d}z$$
pre
   a) $a = 3$ a $r = 2$,
   b) $a = 2$ a $r = 3$.

2. Vypočítajte
$$\int_{\kappa(i,1)} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítajte
$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{e^z}{z^4}\,\mathrm{d}z.$$

4. Každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ s polomerom konvergencie ϱ môžeme stotožniť s radom funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, kde f_n je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ daná ako $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ (pre z také, že $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje). Dokážte, že pri takejto interpretácii rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje rovnomerne na $D(a,r)$ pre všetky r také, že $0 < r < \varrho$.

5. Ukážte, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ s polomerom konvergencie $\varrho > 0$ *nemusí* konvergovať rovnomerne na $D(a,\varrho)$.

6. Odôvodnite, že mocninové rady definujúce funkcie e^z, $\sin z$ a $\cos z$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ sú v skutočnosti aj ich Maclaurinovými radmi.

7. Nájdite Maclaurinov rozvoj funkcie $f(z) = \frac{1}{2}z^3 \cos 3z$ a jeho polomer konvergencie.

8. Uvažujme holomorfné vetvy logaritmu, ktoré sú – na rozdiel od cvičení č. 3 – definované na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; to znamená, že pre $k \in \mathbb{Z}$ sa vo funkcii $\ln_k z$ obmedzíme na argumenty z intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$. *Hlavnou holomorfnou vetvou* logaritmu ďalej nazvime vetvu $\operatorname{Ln} z := \ln_0 z$. Dokážte, že na $D(0,1)$ je funkcia $\operatorname{Ln}(1+z)$ daná *Mercatorovým radom*
$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$
Nájdite Maclaurinove rady na $D(0,1)$ aj pre $\ln_k(1+z)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Nájdite Taylorove rady so stredom v bode 1 pre funkcie $\ln_k z$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

9. Uvažujme *hlavnú vetvu* mocninovej funkcie z^α definovanú pre $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ako $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$; ide teda o holomorfnú vetvu multifunkcie z^α na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, pre ktorú platí $1^\alpha = 1$. Označme ďalej $f(z) = (1+z)^\alpha$, kde umocňujeme s použitím tejto hlavnej vetvy.
   a) Dokážte, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{C}$ a $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$.
   b) Funkcia f je očividne holomorfná na $D(0,1)$. Z predchádzajúceho vzťahu odvoďte, že pre všetky $z \in D(0,1)$ platí $(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$.

c) Ukážte, že pre $z \in D(0,1)$ je funkcia $f(z)$ daná *binomickým rozvojom*

$$f(z) = (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

kde pre $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}.$$

d) Nájdite obdobné Maclaurinove rozvoje aj pre ďalšie holomorfné vetvy mocninovej funkcie $(1+z)^\alpha$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

10. Nech f je funkcia holomorfná na $D(0,R)$ pre nejaké $R > 0$ a nech r je také, že $0 < r < R$. Nech $|f(z)|$ je pre $z \in \kappa(0,r)^*$ zhora ohraničená konštantou $M \geq 0$. Dokážte odhad

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right| \leq r^{-n} M.$$

11. Nech f je celá funkcia. Dokážte, že ak $|f(z)| \leq C|z|^k$ pre nejaké $C \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ a všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ pre nejaké $R > 0$, tak je funkcia f polynomická stupňa najviac k.

12. Nech pre nejaké $r > 0$ na $D(0,r)$ platí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Dokážte, že potom sú na $D(0,r)$ analytické aj funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ a nájdite mocninové rady reprezentujúce tieto funkcie.