Cvičenia č. 6

30. októbra 2019

1. Ak je bod $a \in \mathbb{C}$ koreňom rádu $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ holomorfnej funkcie f a zároveň je tento bod koreňom rádu $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ holomorfnej funkcie g, tak je tento bod zrejme aj koreňom funkcie $f \cdot g$. Charakterizujte rád koreňa a funkcie $f \cdot g$ prostredníctvom čísel p a q. (Rovnaká charakterizácia by mala platiť aj v prípade $p = 0$ a/alebo $q = 0$.)

2. Nájdite Laurentove rozvoje nasledujúcich funkcií v bode $a = 0$:

   a) $f_1(z) = \sin z/z$,
   b) $f_2(z) = \cos z/z$,
   c) $f_3(z) = \sin z/z^5$.

   V každom z uvedených prípadov je bod $a = 0$ izolovanou singularitou danej funkcie – zistite pre jednotlivé funkcie druh tejto izolovanej singularity.

3. Nájdite Laurentov rozvoj funkcie

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

   v bode $a = 0$, konvergentný na medzikruží:

   a) $A_1 = D'(0, 1)$,
   b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$,
   c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < r\}$ pre ľubovoľné $r > 2$.

4. Nech f je holomorfná na $D'(a, r)$ pre nejaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Dokážte, že:

   a) Bod a je odstrániteľnou singularitou funkcie f práve vtedy, keď existuje (vlastná) limita

$$\lim_{z \to a} f(z) =: L,$$

   pričom $f(a)$ je buď nedefinované alebo rôzne od L.

   b) Funkcia f je holomorfná v bode a práve vtedy, keď $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

5. Dokážte, že Laurentov rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ v bode a s konečným počtom nenulových koeficientov pri záporných mocninách vždy konverguje na nejakom prstencovom okolí bodu a. Vždy teda existuje funkcia f taká, že bod a je jej pólom a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je Laurentovým radom tejto funkcie v bode a.

6. Nech f je analytická v bode 0. Pozorujte, že funkcia $1/f$ je analytická v bode 0 práve vtedy, keď $f(0) \neq 0$. Nech navyše pre nejaké $r > 0$ a všetky $z \in D(a, r)$ platí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Nájdite Maclaurinov rad funkcie $1/f$ (vyjadrite jeho koeficienty pomocou koeficientov $a_0, a_1, a_2 \ldots$).

7. Funkcia *kosekans* je pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ daná predpisom

$$\operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}.$$

   Nájdite prvých niekoľko členov Laurentových radov funkcií $\operatorname{cosec} z$ a $\operatorname{cosec}^2 z$ v bode $a = 0$. Vysvetlite, ako by ste popísali n-té členy týchto radov.

Funkcia f je *meromorfná* v bode $a \in \mathbb{C}$, ak je buď definovaná a holomorfná v bode a, alebo je bod a jej pólom (prípadne odstrániteľnou singularitou). Funkcia f je meromorfná na $S \subseteq \mathbb{C}$, ak je meromorfná v každom bode $a \in S$. Množinu všetkých funkcií meromorfných na S označíme symbolom $\mathbf{M}(S)$.

8. Charakterizujte funkcie meromorfné na $S \subseteq \mathbb{C}$ pomocou Laurentových rozvojov v bodoch $a \in S$.

9. Nech f, g sú funkcie meromorfné v bode a. Dokážte, že sú v takom prípade meromorfné aj funkcie $f + g$ a $f \cdot g$. Charakterizujte Laurentove rozvoje funkcií $f + g$ a $f \cdot g$ v bode a pomocou Laurentových rozvojov funkcií f a g.

10. Nech f je funkcia meromorfná v bode a. Dokážte, že je v takom prípade v bode a meromorfná aj funkcia $1/f$. Charakterizujte Laurentov rozvoj funkcie $1/f$ v bode a pomocou Laurentovho rozvoja funkcie f.

11. Nech $r > 0$, nech $\mathbf{0}\colon D(0,r) \to \mathbb{C}$ je funkcia taká, že pre všetky $z \in D(0,r)$ platí $\mathbf{0}(z) = 0$ a $\mathbf{1}\colon D(0,r) \to \mathbb{C}$ je funkcia taká, že pre všetky $z \in D(0,r)$ platí $\mathbf{1}(z) = 1$. Dokážte, že:

    a) $(\mathbf{H}(D(0,r)), +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je obor integrity,

    b) $(\mathbf{M}(D(0,r)), +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je pole.