Cvičenia č. 7

6. novembra 2019

Reťazou nazveme ľubovoľnú konečnú postupnosť Γ po častiach hladkých kriviek $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Píšeme potom $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$ a pre funkciu f spojitú na Γ^* *definujeme*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Môžeme teda integrovať naraz pozdĺž niekoľkých kriviek. Uvedená notácia nie je úplne jednoznačná, pretože $+$ môže označovať ako spojenie kriviek, tak aj "formálne $+$" z definície reťaze. Nie je to však na škodu, keďže hodnoty integrálov sú pri obidvoch interpretáciách tie isté.

Na reťaziach možno zaviesť podobné operácie ako na krivkách: pre reťaze $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\overline{\Gamma} = \overline{\gamma}_1 + \ldots + \overline{\gamma}_n$ píšeme $-\Gamma = (-\gamma_1) + \ldots + (-\gamma_n)$ a $\Gamma + \overline{\Gamma} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n + \overline{\gamma}_1 + \ldots + \overline{\gamma}_n$.

Cyklom nazveme reťaz $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ takú, že všetky po častiach hladké krivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sú uzavreté. Pojem indexu možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na cykly: pre všetky $a \notin \Gamma^*$ kladieme

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

1. Dokážte, že pre všetky cykly $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a všetky $a \notin \Gamma^*$ platí

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(a).$$

2. Sformulujte a dokážte všeobecný Cauchyho integrálny vzorec a všeobecnú Cauchyho integrálnu vetu pre cykly. *Pozor*: nie je to tak triviálne, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať.

3. Využite všeobecnú Cauchyho integrálnu vetu pre cykly na jednoduchý dôkaz všeobecnej vety o deformácii: nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú uzavreté po častiach hladké krivky také, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ platí $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(b) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(b)$. Potom

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

   Sformulujte a dokážte aj variant tejto vety pre cykly.

Na predchádzajúcej prednáške sme používali nasledujúce tvrdenie: ak je γ po častiach hladká krivka a $\varepsilon > 0$, tak možno krivku γ pokryť konečným počtom okolí typu $D(z, \varepsilon)$, kde $z \in \gamma^*$.

4. Videli sme, že tvrdenie uvedené vyššie je dôsledkom tvrdenia nasledujúceho: nech $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka. Potom $|\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)| \leq L(\gamma)$. Dokážte toto tvrdenie.

5. *Otvoreným pokrytím* množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ nazveme množinu typu $\{S_j \mid j \in J\}$, kde J je ľubovoľná množina a:

   (*i*) Pre všetky $j \in J$ je $S_j \subseteq \mathbb{C}$ otvorená množina.

   (*ii*) Platí $S \subseteq \bigcup_{j \in J} S_j$.

   Otvorené pokrytie $\{S_j \mid j \in J\}$ množiny S je *konečné*, ak je konečná množina J. *Podpokrytím* pokrytia $\{S_j \mid j \in J\}$ nazveme ľubovoľnú množinu $\{S_j \mid j \in J'\}$ s $J' \subseteq J$, ktorá je pokrytím množiny S.

   Dokážte, že množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktná práve vtedy, keď z *každého* otvoreného pokrytia množiny S možno vybrať konečné podpokrytie. (Ide o topologickú definíciu kompaktnosti.)

6. Využite predchádzajúcu charakterizáciu kompaktných množín na alternatívny dôkaz horeuvedeného tvrdenia.

Niekedy je užitočné skúmať vlastnosti funkcií v nekonečne (v rozšírenej komplexnej rovine $\tilde{\mathbb{C}}$, ktorej modelom je napríklad Riemannova sféra). Položme $1/0 = \infty$ a $1/\infty = 0$. Nech $S \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Môžeme potom vziať množinu $S^{-1} = \{1/z \mid z \in S\} \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a definovať funkciu $\tilde{f}\colon S^{-1} \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S^{-1}$ predpisom

$$\tilde{f}(z) = f(1/z).$$

Limitu, spojitosť, či holomorfnosť funkcie f v bode ∞ potom definujeme prostredníctvom týchto vlastností funkcie $\tilde{f}$ v bode 0. Rovnako môžeme definovať aj izolované singularity v nekonečne, vrátane ich klasifikácie, ako aj funkcie meromorfné v ∞ a na $\tilde{\mathbb{C}}$.

7. Zistite, či sú nasledujúce funkcie v bode ∞ holomorfné, alebo tam majú izolovanú singularitu (pre uvedené funkcie vždy nastane jeden z týchto prípadov). V prípade izolovanej singularity určte jej druh:

   a) Funkcia $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako $f_1(z) = z^2$.
   b) Funkcia $f_2\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ako $f_2(z) = 1/z^2$.
   c) Funkcia $f_3\colon \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ako $f_3(z) = 1/z^2$.
   d) Funkcia $f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako $f_4(z) = \sin z$.
   e) Funkcia $f_5\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ako $f_5(z) = \sin(1/z)$.

8. Dokážte, že každá funkcia holomorfná na $\tilde{\mathbb{C}}$ je konštantná.

9. Dokážte, že každá funkcia meromorfná na $\tilde{\mathbb{C}}$ je racionálna.