Cvičenia č. 8

13. novembra 2019

1. Nájdite rezíduum:

   a) Funkcie $f_1(z) = (e^{iz} - 1)/(z^2 + 1)^2$ v bode $a = i$.

   b) Funkcie $f_2(z) = e^{iz}/(z^3 - 1)$ v bode $a = e^{i\pi/3}$.

   Vypočítajte integrály týchto funkcií pozdĺž krivky $\kappa(a, 10^{-100})$.

2. Vypočítajte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Zovšeobecnite Cauchyho vetu o rezíduách aj na prípad podstatných izolovaných singularít.

4. Dokážte nasledujúci variant Cauchyho princípu argumentu, založený na pojme indexu a nezávislý od Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety: nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná a nenulová na γ^* a pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ platí $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$. Nech $Z(f)$ je množina koreňov a $P(f)$ je množina pólov funkcie f. Potom je v oboch týchto množinách iba konečný počet prvkov s nenulovým indexom vzhľadom ku krivke γ a platí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in Z(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\deg(a) - \sum_{b\in P(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(b)\deg(b),$$

   kde $\deg(w)$ označuje rád koreňa resp. pólu w.

5. Dokážte *Rouchého vetu* (presnejšie jej variant predpokladajúci Jordanovu vetu): nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcie f, g sú holomorfné na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $|f(z)| > |g(z)|$. Potom majú funkcie f a $f+g$ rovnaký počet koreňov v $\mathbf{I}(\gamma)$.

6. Nájdite počet koreňov funkcie $z^2 + 5 - e^{iz}$ takých, že $\mathrm{Im}\, z > 0$.