Cvičenia č. 9

20. novembra 2019

Úlohy na analytické predĺženie

1. Nájdite globálnu analytickú funkciu obsahujúcu ako svoju vetvu:

   a) Funkciu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ definovanú na $D(0,1)$.

   b) Funkciu $\operatorname{Ln} z$ definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   c) Hlavnú vetvu funkcie $z^{1/n}$ pre nejaké prirodzené $n \geq 2$, definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   d) Hlavnú vetvu funkcie z^α pre $\alpha \in \mathbb{C}$, definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   e) Nejakú funkciu meromorfnú na $\mathbb{C}$.

2. Na prednáške bolo dokázané, že každé analytické predĺženie je analytickým predĺžením pozdĺž nejakej lomenej čiary. Dokážte, že rovnaké tvrdenie je pravidvé aj pre lomené čiary také, že až na ich prvý a posledný bod je každý tvaru $p + iq$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.

3. Dokážte *Poincarého-Volterrovu* vetu, podľa ktorej je pre každú globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ a každé $z \in \mathbb{C}$ množina $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ nanajvýš spočítateľne nekonečná.

Ďalšie úlohy

4. Nech $a \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita (jednohodnotovej) holomorfnej funkcie f. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

   - Ak je a odstrániteľná singularita, existuje vlastná limita $\lim_{z \to a} f(z)$.
   - Ak je a pól, existuje nevlastná limita $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ (t.j. $|f(z)|$ rastie nad všetky medze).

5. Nech $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkcia g je holomorfná na $D'(a, r)$. Dokážte, že ak $\lim_{z \to a} (z - a) g(z) = 0$, tak má funkcia g v bode a nanajvýš odstrániteľnú singularitu.

6. Dokážte *Casoratiho-Weierstrassovu vetu*: ak $a \in \mathbb{C}$ je podstatná izolovaná singularita (jednohodnotovej) funkcie f holomorfnej na nejakom prstencovom okolí bodu a, tak pre každé $\ell \in \mathbb{C}$ existuje postupnosť bodov $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.