Cvičenia č. 10

27. novembra 2019

1. Zistite, či je bod $a = 0$ singularitou niektorých vetiev nasledujúcich funkcií:

   a) $f_1(z) = \sqrt{z}$,
   b) $f_2(z) = \sqrt{1-z}$,
   c) $f_3(z) = e^{\sqrt{z}}$,
   d) $f_4(z) = \sqrt{1/z}$,
   e) $f_5(z) = \sqrt{1+1/z}$,
   f) $f_6(z) = \sqrt{z(z-1)}$,
   g) $f_7(z) = \sqrt[3]{z}\sqrt{z-1}$,
   h) $f_8(z) = \frac{1}{z}\sqrt{1-z}$,
   i) $f_9(z) = \frac{1}{z}\sqrt{2z(z-1)}$,

   V prípade, že je bod a singularitou, zistite typ tejto singularity. Ak existuje, nájdite Puiseuxov (alebo Laurentov, či Taylorov) rozvoj tej-ktorej vetvy v bode a.

2. Dokážte, že bod vetvenia b funkcie $\mathbf{f}$ konečného rádu je algebraický práve vtedy, keď existuje vlastná alebo nevlastná limita príslušnej vetvy funkcie $\mathbf{f}$ v bode b.

Hviezdou nazveme ľubovoľnú oblasť $S \subseteq \mathbb{C}$, v ktorej existuje bod $c \in S$ taký, že pre všetky $a \in S$ platí $[c, a] \subseteq S$.

3. Pozorujte, že každá konvexná oblasť je hviezdou, ale nie každá hviezda musí byť konvexná.

4. Dokážte, že každá hviezda je jednoducho súvislá. Preskúmajte dôsledky tohto tvrdenia.

Mittagova-Lefflerova hviezda analytického prvku (f, D) v oblasti S so stredom v $c \in S$ je množina $\mathrm{ML}_f(c)$ všetkých bodov $z \in S$ takých, že prvok (f, D) možno analyticky predĺžiť pozdĺž úsečky $[c, z]$.

5. Dokážte, že Mittagova-Lefflerova hviezda je skutočne hviezda.

6. Dokážte, že prvok (f, D) možno predĺžiť na (nutne jedinú) globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ v $\mathrm{ML}_f(c)$, ktorá je na $\mathrm{ML}_f(c)$ jednohodnotová, a teda ju možno stotožniť s „bežnou“ holomorfnou funkciou $f\colon \mathrm{ML}_f(c) \to \mathbb{C}$.

Mittagova-Lefflerova hviezda je koncept dôležitý predovšetkým z toho dôvodu, že existuje jednotný spôsob, ako každú holomorfnú funkciu $f\colon \mathrm{ML}_f(c) \to \mathbb{C}$ rozvinúť do radu, ktorý na $\mathrm{ML}_f(c)$ konverguje – ide o takzvané *Mittagove-Lefflerove rady* a možno sa o nich dočítať v [1].

Literatúra

[1] Markushevich, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 3.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.