Prednáška č. 1: Holomorfné funkcie

Peter Kostolányi

24. septembra 2019

Za hlavný objekt skúmania komplexnej analýzy možno považovať *analytické funkcie*, teda funkcie lokálne reprezentovateľné mocninovými radmi. Uvidíme, že komplexné obdoby mnohých prirodzených funkcií reálnej premennej – akými sú napríklad exponenciálna funkcia alebo goniometrické funkcie – sa prostredníctvom mocninových radov už *definujú.* Neskôr – predovšetkým na piatej prednáške – sa tiež ukáže, že pojem analytickej funkcie je úzko previazaný s existenciou derivácií a triedou takzvaných *holomorfných funkcií* (jemné „zrobustnenie" pojmu diferencovateľných funkcií).

Dnes sa teda zameriame na derivácie funkcií komplexnej premennej a na holomorfné funkcie. Na budúci týždeň zas preskúmame základné vlastnosti mocninových radov a definujeme analytické funkcie spolu s ich najvýznamnejšími predstaviteľkami – exponenciálnou funkciou a goniometrickými funkciami. Okrem iného tak aj odôvodníme zápis komplexných čísel v exponenciálnom tvare, ktorý zatiaľ chápeme čisto formálne.

Naše štúdium komplexnej analýzy ale samozrejme musíme začať od najjednoduchších konceptov – teda od pojmu funkcie komplexnej premennej a od definícií limity a spojitosti. Odporúčaným doplňujúcim čítaním k dnešnej prednáške je [2].

Funkcie komplexnej premennej

Komplexná analýza sa zaoberá *komplexnými funkciami komplexnej premennej.* Prevažnú časť prvej polovice semestra budeme takéto funkcie chápať zvyčajným spôsobom, ako zobrazenia $f\colon S \to \mathbb{C}$ pre nejakú množinu $S \subseteq \mathbb{C}$.

Nie všetky prirodzené funkcie ale možno popísať takýmto spôsobom: už na minulom cvičení sme napríklad narazili na viachodnotovosť argumentu; keby sme teda chceli argument chápať ako funkciu $\arg z$ komplexnej premennej z, šlo by o *viachodnotovú funkciu* alebo *multifunkciu.* Ukáže sa, že viachodnotové sú v komplexnom obore aj funkcie ako logaritmus alebo odmocnina. V prvej časti semestra budeme medzi funkciami a multifunkciami rozlišovať, pričom multifunkciami sa budeme zaoberať len okrajovo (väčšinou z nich budeme „vyrábať" jednohodnotové funkcie vhodnou voľbou „správnej" výstupnej hodnoty). Neskôr už však bude situácia neúnosná a budeme nútení pojem funkcie komplexnej premennej zrevidovať tak, aby prirodzeným spôsobom zahŕňal jednohodnotové aj viachodnotové funkcie.

Zatiaľ ale komplexnou funkciou komplexnej premennej rozumieme obyčajné zobrazenie $f\colon S \to \mathbb{C}$. Ku každej takejto funkcii môžeme definovať jej *reálnu časť* ako funkciu $\operatorname{Re} f\colon S \to \mathbb{R}$ definovanú pre všetky $z \in S$ predpisom $(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re}(f(z))$ a jej *imaginárnu časť* ako funkciu $\operatorname{Im} f\colon S \to \mathbb{R}$ danú pre všetky $z \in S$ ako $(\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im}(f(z))$. Zjavne potom $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

Limita a spojitosť funkcií komplexnej premennej

Definujeme teraz *limitu postupnosti* komplexných čísel, *limitu funkcie* komplexnej premennej a *spojité funkcie* komplexnej premennej. Pôjde pritom o očakávateľné analógie definícií z reálnej analýzy; okolia bodov na reálnej osi akurát nahradíme okoliami bodov v komplexnej rovine.

Definícia P1.1. Hovoríme, že postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *konverguje k (vlastnej) limite* $b \in \mathbb{C}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $a_n \in D(b, \varepsilon)$. V takom prípade píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ alebo $a_n \to b$ pre $n \to \infty$.

Definícia P1.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in \mathbb{C}$ je hromadným bodom množiny S. Hovoríme, že *funkcia f má v bode a (vlastnú) limitu* $b \in \mathbb{C}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a, \delta) \cap S$ platí $f(z) \in D(b, \varepsilon)$. V takom prípade píšeme $\lim_{z\to a} f(z) = b$ alebo $f(z) \to b$ pre $z \to a$.

Poznámka P1.3. Rovnako dobre je možné uvažovať aj *nevlastné limity*; stačí prejsť do rozšírenej komplexnej roviny a v obidvoch definíciách vyššie uvažovať $b \in \tilde{\mathbb{C}}$. Podobne možno uvažovať limitu funkcie v nekonečne jednoduchým nahradením predpokladu $a \in \mathbb{C}$ predpokladom $a \in \tilde{\mathbb{C}}$. Tieto koncepty sú však pre naše potreby viac-menej druhotného významu.

Definícia P1.4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Hovoríme, že funkcia f je *spojitá v bode* a, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,\delta) \cap S$ platí $f(z) \in D(f(a),\varepsilon)$.

Definícia P1.5. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Hovoríme, že funkcia f je *spojitá na množine* T, ak je spojitá vo všetkých bodoch $a \in T$.

Tvrdenie P1.6. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia, $a \in S$ a f je spojitá v bode a. Potom je buď bod a izolovaným bodom množiny S, alebo existuje limita funkcie f v bode a a platí $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$. Ak naopak $a \in S$ a $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$, je funkcia f v bode a spojitá.*

Dôkaz. Jednoduché cvičenie. □

Takto definované limity majú podobné vlastnosti ako limity reálnych funkcií resp. postupností – čitateľ napríklad sám ľahko overí platnosť vzťahov pre limitu súčtu, rozdielu, súčinu a podielu (podobne aj pre spojitosť funkcií). Tieto vlastnosti sú natoľko elementárne, že ich budeme v prípade potreby „po tichu“ používať.

Nasledujúce tvrdenie umožňuje previesť skúmanie komplexných limít na skúmanie reálnych limít.

Tvrdenie P1.7. *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Potom:*

(*i*) *Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje k vlastnej limite práve vtedy, keď konvergujú obidve postupnosti $(\operatorname{Re} a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(\operatorname{Im} a_n)_{n=0}^{\infty}$. V takom prípade $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n$.*

(*ii*) *Nech a je hromadný bod množiny S. Limita $\lim_{z\to a} f(z)$ existuje práve vtedy, keď existujú obidve limity $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z)$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z)$. Vtedy $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) + i \lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z)$.*

(*iii*) *Nech $a \in S$. Potom je funkcia f spojitá v bode a práve vtedy, keď sú v bode a spojité obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.*

Dôkaz. Dokážeme napríklad tvrdenie (*ii*); dôkazy zvyšných dvoch tvrdení sú analogické. Ak existuje limita $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ platí $f(z) \in D(b,\varepsilon)$, čiže $|f(z) - b| < \varepsilon$. Keďže ale pre všetky $w \in \mathbb{C}$ platí $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$ a $|\operatorname{Im} w| \leq |w|$, musí v takom prípade platiť aj $|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} b| = |\operatorname{Re}(f(z) - b)| < \varepsilon$ a $|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} b| = |\operatorname{Im}(f(z) - b)| < \varepsilon$, v dôsledku čoho $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} b$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} b$.

Nech teraz naopak existujú limity $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = c$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = d$. Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ vieme zvoliť[1] $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ platí $|\operatorname{Re} f(z) - c| < \varepsilon/2$ *a súčasne* $|\operatorname{Im} f(z) - d| < \varepsilon/2$. Z trojuholníkovej nerovnosti potom ale pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ dostávame

$$|f(z) - (c + id)| = |(\operatorname{Re} f(z) - c) + i(\operatorname{Im} f(z) - d)| \leq |\operatorname{Re} f(z) - c| + |\operatorname{Im} f(z) - d| < \varepsilon.$$

Skutočne teda $\lim_{z\to a} f(z) = c + id$. □

Tvrdenie P1.8. *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Potom:*

(*i*) *Ak existuje $b \in \mathbb{C}$ také, že $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, tak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |b|$.*

(*ii*) *Nech a je hromadný bod S. Ak existuje $b \in \mathbb{C}$ také, že $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak $\lim_{z\to a} |f(z)| = |b|$.*

(*iii*) *Nech $a \in S$. Ak je $f(z)$ spojitá v bode a, je v bode a spojitá aj funkcia $|f(z)|$.*

[1] Pre každú z funkcií $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ dostaneme jednu hodnotu δ; stačí potom vybrať tú menšiu.

Dôkaz. Opäť dokážeme len tvrdenie (*ii*), pričom dôkaz zvyšných dvoch tvrdení je analogický. Ak existuje limita $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta)\cap S$ platí $f(z) \in D(b,\varepsilon)$, čiže $|f(z) - b| < \varepsilon$. Potom však $||f(z)| - |b|| = ||f(z)| - |-b|| \leq |f(z) - b| < \varepsilon$, a teda $\lim_{z\to a}|f(z)| = |b|$. □

Na záver tohto oddielu už len vyslovme niekoľko viet o limitách, ktoré sú komplexnými analógiami dobre známych tvrdení z reálnej analýzy. Dôkazy prvých dvoch z nich, založené na využití reálneho náprotivku toho-ktorého tvrdenia, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

Veta P1.9 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie). *Postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=0}^\infty$ konverguje k vlastnej limite práve vtedy, keď pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n, m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Veta P1.10 (Bolzanova-Weierstrassova veta). *Z každej ohraničenej[2] postupnosti komplexných čísel $(a_n)_{n=0}^\infty$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť.*

Veta P1.11 (Heineho definícia limity). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia, $a \in \mathbb{C}$ je hromadným bodom množiny S a $b \in \mathbb{C}$. Potom $\lim_{z\to a} f(z) = b$ práve vtedy, keď pre každú postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ čísel z $S \setminus \{a\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $\lim_{z\to a} f(z) = b$ a súčasne existuje postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ čísel z $S \setminus \{a\}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ a súčasne limita $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ neexistuje alebo sa nerovná b. Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ tak, že $|f(z_n) - b| \geq \varepsilon$. Pre ľubovoľné $\delta > 0$ teraz zvoľme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pre všetky $n \geq n_0$ platilo $|z_n - a| < \delta$; to ide, lebo $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Zisťujeme, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $\delta > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $z_n \in D'(a,\delta) \cap S$ a súčasne $z_n \notin D(b,\varepsilon)$. To je v spore s predpokladom $\lim_{z\to a} f(z) = b$.

Na dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že pre každú postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ čísel z $S\setminus\{a\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$. Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ platí $f(z) \in D(b,\varepsilon)$. Sporom, nech to nie je pravda. Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ potom môžeme položiť $\delta_n = 1/n$, pričom pre každé takéto n existuje $w_n \in D'(a,\delta_n) \cap S$ také, že $f(w_n) \notin D(b,\varepsilon)$. Zrejme ale potom $\lim_{n\to\infty} w_n = a$, kým limita $\lim_{n\to\infty} f(w_n)$ nemôže súčasne existovať a byť rovná b. To je spor s naším predpokladom. □

Veta P1.12 (O spojitosti na kompakte). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktná množina $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá na S. Potom je funkcia f na množine S ohraničená, čiže existuje $M \geq 0$ také, že pre všetky $z \in S$ platí $|f(z)| \leq M$. Funkcia $|f(z)|$ navyše na S nadobúda maximum a minimum, čiže existujú $a_1, a_2 \in S$ také, že pre všetky $z \in S$ platí $|f(a_1)| \leq |f(z)| \leq |f(a_2)|$.*

Dôkaz. Za účelom sporu predpokladajme, že funkcia f nie je na S ohraničená. Potom existuje postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ bodov S taká, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|f(z_n)| \geq n$. Z ohraničenosti S vyplýva, že je ohraničená aj postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$, a teda z nej podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety možno vybrať podpostupnosť $(z_{n_k})_{k=0}^\infty$ konvergujúcu k nejakému $a \in \mathbb{C}$, ktoré je nutne hromadným bodom množiny S. Keďže je S uzavretá, $a \in S$. Zo spojitosti f na S potom $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$; na druhej strane ale $\lim_{k\to\infty}|f(z_{n_k})| = \infty$, a teda nemôže platiť $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(a)$. Dostávame teda spor s vetou P1.11.

Z ohraničenosti funkcie f na S vyplýva, že existuje reálne číslo $H = \sup_{z\in S}|f(z)|$. Keby neexistovalo žiadne $a_2 \in S$ také, že $|f(a_2)| = H$, bola by na S funkcia $1/(H - |f(z)|)$ spojitá a súčasne neohraničená, lebo pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $z \in S$ také, že $|H - |f(z)|| < \varepsilon$. To je spor s prvou časťou vety. Existenciu minima možno dokázať analogicky. □

Derivácia a diferencovateľnosť

Deriváciu funkcie komplexnej premennej f definujeme, podobne ako pre funkcie reálnej premennej, pre ľubovoľný hromadný bod a jej definičného oboru, ktorý súčasne do tohto definičného oboru patrí.

[2]Postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=0}^\infty$ je ohraničená, ak je ohraničená postupnosť reálnych čísel $(|a_n|)_{n=0}^\infty$.

Väčšina neskoršej teórie však bude zameraná na prípad, keď derivácia existuje „v ľubovoľnom smere“, t.j. keď je f definovaná na nejakej otvorenej množine obsahujúcej bod a. V komplexnej analýze sa preto často derivácia a diferencovateľnosť funkcie definujú len v uvedenom menej všeobecnom prípade a čitateľ sa nedopustí veľkej chyby, ak si nasledujúcu definíciu v tomto duchu preformuluje.[3] Samotná definícia derivácie pritom bude relatívne očakávateľná.

Definícia P1.13. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$ je hromadným bodom množiny S. Ak existuje (vlastná) limita

$$D = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{1}$$

hovoríme, že je funkcia f *diferencovateľná* v bode a a číslo D nazývame *deriváciou* funkcie f v bode a. V takom prípade tiež píšeme

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(a) := D.$$

Definícia P1.14. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *diferencovateľná* na množine T, ak T pozostáva iba z hromadných bodov S a f je diferencovateľná v každom $a \in T$.

Ak je teda množina S otvorená a $a \in S$, môže sa h k nule približovať „z ľubovoľného smeru“ v komplexnej rovine; nech sa ale h približuje k nule akýmkoľvek spôsobom, podiel (1) musí vždy konvergovať k tej istej limite. Špeciálne sa teda musia rovnať limity pre h približujúce sa k nule po reálnej resp. po imaginárnej osi. Dôsledkom tohto jednoduchého pozorovania sú nasledujúce užitočné *nutné* podmienky diferencovateľnosti funkcie v danom bode, známe ako *Cauchyho-Riemannove podmienky.* Nesplnenie týchto podmienok znamená, že funkcia nemôže byť diferencovateľná.

Poznámka P1.15. Formulácia Cauchyho-Riemannových podmienok využíva pojem *parciálnej derivácie* funkcie dvoch reálnych premenných, s ktorým sa čitateľ doposiaľ nemusel stretnúť. Nech $S \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f\colon S \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia dvoch reálnych premenných x a y. *Parciálnu deriváciu funkcie f podľa x* získame tak, že y zafixujeme – teda ho vyhlásime za konštantu – a f zderivujeme ako funkciu premennej x. Pre hromadný bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ množiny $S \cap (\mathbb{R} \times \{b\})$ teda píšeme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

(ak táto limita existuje). Podobne definujeme aj *parciálnu deriváciu $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkcie f podľa y*. Ak teda napríklad $f(x, y) = 2x^2y + y^2$, pre všetky $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 2y.$$

Veta P1.16 (Cauchyho-Riemannove podmienky)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je* otvorená *množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a u, v sú funkcie dvoch reálnych premenných x a y také, že pre všetky $z \in S$ s $\operatorname{Re} z =: x$ a $\operatorname{Im} z =: y$ platí $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, čiže*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode $a \in S$, tak existujú obidve parciálne derivácie funkcií u a v v bode $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$, pre ktoré navyše platí

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) \qquad a \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).$$

[3] Všeobecnejšiu definíciu uvádzame z dôvodu, aby sme neskôr mohli do vety o derivácii zloženej funkcie zahrnúť prípad zloženia komplexnej funkcie komplexnej premennej s komplexnou funkciou reálnej premennej definovanej na uzavretom intervale; deriváciu takejto zloženej funkcie budeme potrebovať na *jednom* mieste tretej prednášky.

Dôkaz. Z diferencovateľnosti funkcie f v bode a podľa definície P1.13 dostávame

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \left(\frac{u(\operatorname{Re} a + h, \operatorname{Im} a) - u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{h} + i\frac{v(\operatorname{Re} a + h, \operatorname{Im} a) - v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{h} \right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a),
\end{aligned}
$$

kde existencia parciálnych derivácií vyplýva z tvrdenia P1.7. Podobne tiež

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih} = \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \left(\frac{u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a + h) - u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{ih} + \frac{v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a + h) - v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{h} \right) = \\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).
\end{aligned}
$$

Z toho

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).
$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí jednotlivých strán predchádzajúcej rovnosti teda zisťujeme, že

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a),
$$

čo bolo treba dokázať. □

Príklad P1.17. Uvažujme funkciu $f(z) = \operatorname{Re} z$ definovanú na $\mathbb{C}$. Funkcie u, v prislúchajúce k f podľa znenia predchádzajúcej vety sú dané predpismi $u(x, y) = x$ a $v(x, y) = 0$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Pre ľubovoľné $a \in \mathbb{C}$ preto dostávame

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0.
$$

Nie je teda splnená podmienka

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)
$$

a funkcia f nie je diferencovateľná v žiadnom bode $a \in \mathbb{C}$.

Príklad P1.18. Treba pamätať na to, že Cauchyho-Riemannove podmienky sú len *nutnými* a nie postačujúcimi podmienkami diferencovateľnosti. Vezmime napríklad $a = 0$ a funkciu $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danú ako

$$
f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \operatorname{Re} z = 0 \text{ alebo } \operatorname{Im} z = 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}
$$

S použitím notácie z vyššia ľahko vidieť, že $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$ a Cauchyho-Riemannove podmienky sú teda splnené. Napríklad limita

$$
\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(e^{i\pi/4}h) - f(0)}{e^{i\pi/4}h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} -\frac{1}{e^{i\pi/4}h} = -\frac{1}{e^{i\pi/4}} \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{1}{h}
$$

ale neexistuje a funkcia f teda nie je diferencovateľná v bode $a = 0$.

Označenie P1.19. Derivácie vyšších rádov definujeme a označujeme rovnako ako v reálnej analýze: napríklad $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}$ označuje druhú deriváciu funkcie f a $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}$ jej n-tú deriváciu.

Holomorfné funkcie

Môžeme teraz zadefinovať najdôležitejšiu triedu diferencovateľných funkcií komplexnej premennej – takzvané *holomorfné funkcie* (z gr. *holos* = úplný a *morfé* = tvar).

Definícia P1.20. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Funkcia f je *holomorfná* v bode a, ak existuje $r > 0$ také, že funkcia f je diferencovateľná na množine $D(a, r)$.

Definícia P1.21. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *holomorfná* na množine T, ak je holomorfná v každom bode $a \in T$. Množinu všetkých funkcií holomorfných na T označíme symbolom $\mathbf{H}(T)$.

Holomorfnosť funkcie f v bode je teda silnejšou podmienkou, než diferencovateľnosť v bode – vyžaduje sa totiž aj diferencovateľnosť vo všetkých ostatných bodoch nejakého dostatočne malého okolia. Na druhej strane možno bez problémov vidieť, že holomorfnosť funkcie f na *otvorenej* množine T je ekvivalentná s jej diferencovateľnosťou na T.

Poznámka P1.22. Práve zavedená terminológia – ktorú sme v princípe prebrali z [2] – nie je úplne štandardná. Holomorfnosť funkcie v bode mnohí autori ani nedefinujú, prípadne pod ňou môžu chápať diferencovateľnosť v bode. Najpodstatnejšia je však definícia holomorfnosti na *otvorenej* množine; táto štandardná je a zhoduje sa s tou našou. Niektorí autori – napríklad Ahlfors [1] – tiež namiesto o *holomorfných* funkciách hovoria o funkciách *analytických*. My pojem analytickej funkcie nabudúce definujeme odlišným spôsobom, ktorý o niečo lepšie odzrkadľuje historické súvislosti. Neskôr počas semestra ale ukážeme, že analytickosť funkcie je s jej holomorfnosťou ekvivalentná – používanie nejednotnej terminológie teda v tomto prípade nepredstavuje žiaden problém.

Príklad P1.23. Zakončíme tento oddiel príkladom funkcie diferencovateľnej v bode $a = 0$, ktorá tam ale nie je holomorfná: pre všetky $z \in \mathbb{C}$ položme $f(z) = |z|^2$. Funkcia f je v bode 0 diferencovateľná, lebo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{|h|e^{i\theta(h)}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{e^{i\theta(h)}} = 0,$$

kde $\theta(h) \in [\![\arg h]\!]$ je *ľubovoľný* z argumentov komplexného čísla h. Pre $z \neq 0$ ale máme – používajúc notáciu z vety P1.16 – $u(x, y) = x^2 + y^2$ a $v(x, y) = 0$, z čoho

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 2\operatorname{Re} z, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 2\operatorname{Im} z, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 0.$$

Pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z \neq 0$ teda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z),$$

kým pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Im} z \neq 0$ zisťujeme, že

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \neq -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

Funkcia f teda nie je diferencovateľná v žiadnom $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; nie je teda holomorfná v bode 0.

Niektoré vlastnosti holomorfných a diferencovateľných funkcií

Dôkaz nasledujúcej vety, umožňujúcej zo známych holomorfných resp. diferencovateľných funkcií vytvárať ďalšie, je v zásade identický ako v reálnej analýze a prenechávame ho preto čitateľovi ako jednoduché cvičenie na manipuláciu s limitami. Vetu sformulujeme naraz pre holomorfnosť a diferencovateľnosť v bode a a na množine R.

Veta P1.24. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú funkcie, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in S$ a $R \subseteq S$. Potom:*

a) Ak je funkcia f holomorfná (resp. diferencovateľná) v bode a [resp. na množine R], je v bode a [resp. na množine R] holomorfná (resp. diferencovateľná) aj funkcia λf a $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ [resp. $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$ pre všetky $z \in R$].

b) *Ak sú funkcie f, g holomorfné (resp. diferencovateľné) v bode a [resp. na množine R], je v bode a [resp. na množine R] holomorfná (resp. diferencovateľná) aj funkcia $f + g$, pričom platí $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ [resp. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ pre všetky $z \in R$].*

c) *Ak sú funkcie f, g holomorfné (resp. diferencovateľné) v bode a [resp. na množine R], je v bode a [resp. na množine R] holomorfná (resp. diferencovateľná) aj funkcia fg, pričom platí $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ [resp. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ pre všetky $z \in R$].*

d) *Ak je funkcia f holomorfná (resp. diferencovateľná) v bode a [resp. na množine R] a platí $f(z) \neq 0$ pre všetky $z \in D(a, r)$ pre nejaké $r > 0$ (resp. pre $z = a$) [resp. pre všetky z patriace do nejakej otvorenej množiny Q spĺňajúcej $R \subseteq Q \subseteq S$ (resp. pre všetky $z \in R$)], je v bode a [resp. na množine R] holomorfná (resp. diferencovateľná) aj funkcia $1/f$, pričom platí $(1/f)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$ [resp. $(1/f)'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$ pre všetky $z \in R$].*

Je jednoduchým cvičením na limity dokázať, že funkcie $f(z) = 1$ a $f(z) = z$ sú holomorfné na $\mathbb{C}$. Z uvedenej vety teda vyplýva, že sú na $\mathbb{C}$ holomorfné aj všetky polynomické funkcie; rovnako všetky racionálne funkcie $p(z)/q(z)$, kde p a q sú polynomické, sú holomorfné na každej otvorenej množine neobsahujúcej (komplexný) koreň polynómu q.

Dokážeme teraz dva varianty vety o derivácii zloženej funkcie. Prvý z variantov bude hovoriť o diferencovateľnosti a bude dostatočne všeobecný na to, aby zahŕňal aj prípad zloženia funkcie komplexnej premennej s komplexnou funkciou reálnej premennej definovanou na uzavretom intervale (to sa nám zíde na tretej prednáške). Druhý z variantov bude hovoriť o holomorfnosti a práve túto formuláciu budeme neskôr využívať najčastejšie.

Veta P1.25 (O derivácii zloženej funkcie I). *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú množiny, $g \colon S \to \mathbb{C}$, $f \colon T \to \mathbb{C}$ sú funkcie a $T \supseteq g(S)$. Ak g je diferencovateľná na množine S a f je diferencovateľná na množine T, je na množine S diferencovateľná aj funkcia $f \circ g$, pričom pre všetky $a \in S$ platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $a \in S$. Nech $b = g(a) \in T$. Z predpokladov vety vyplýva, že f je diferencovateľná v bode a a g je diferencovateľná v bode b. Položme

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} - g'(a) =: \varepsilon(h),$$
$$\frac{f(b+\ell) - f(b)}{\ell} - f'(b) =: \eta(\ell),$$

kde zjavne $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{\ell \to 0} \eta(\ell) = 0$. Úpravou dostávame

$$g(a+h) - g(a) = (g'(a) + \varepsilon(h))h, \tag{2}$$
$$f(b+\ell) - f(b) = (f'(b) + \eta(\ell))\ell. \tag{3}$$

Položme teraz $\ell = g(a+h) - b$. Z (3) potom

$$f(g(a+h)) - f(b) = \big(f'(b) + \eta(g(a+h) - b)\big)\,(g(a+h) - b);$$

to je ekvivalentné rovnosti

$$f(g(a+h)) - f(g(a)) = \big(f'(g(a)) + \eta(g(a+h) - g(a))\big)\,(g(a+h) - g(a)),$$

z ktorej použitím vzťahu (2) dostávame

$$f(g(a+h)) - f(g(a)) = \big(f'(g(a)) + \eta(g(a+h) - g(a))\big)\,(g'(a) + \varepsilon(h))h.$$

Keďže teda $\lim_{h\to 0} \eta(g(a+h) - g(a)) = \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, skutočne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \big(f'(g(a)) + \eta(g(a+h) - g(a))\big)\,(g'(a) + \varepsilon(h)) = f'(g(a))g'(a),$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

Veta P1.26 (O derivácii zloženej funkcie II)**.** *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú otvorené množiny, $g\colon S \to \mathbb{C}$, $f\colon T \to \mathbb{C}$ sú funkcie a $T \supseteq g(S)$. Ak g je holomorfná na množine S a f je holomorfná na množine T, je na množine S holomorfná aj funkcia $f \circ g$, pričom pre všetky $a \in S$ platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Dôkaz. V prípade, že funkcie g a f spĺňajú podmienky vety, je funkcia $f \circ g$ podľa vety P1.25 diferencovateľná v každom bode $a \in S$. Keďže je množina S otvorená, je funkcia $f \circ g$ na S aj holomorfná. Vzorec pre deriváciu je daný vetou P1.25. □

Dokážeme teraz, že každá holomorfná funkcia je nutne aj spojitá.

Veta P1.27. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Ak je funkcia f holomorfná na S, je aj spojitá na S.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $a \in S$ a položme

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) =: \varepsilon(h);$$

zjavne $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Preto

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \big(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\big) = f(a)$$

a funkcia f je v bode a spojitá. □

Na záver sformulujme užitočné kritérium konštantnosti funkcie f na oblasti.

Tvrdenie P1.28. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Ak $f'(z) = 0$ pre všetky $z \in S$, tak je funkcia f na S konštantná.*

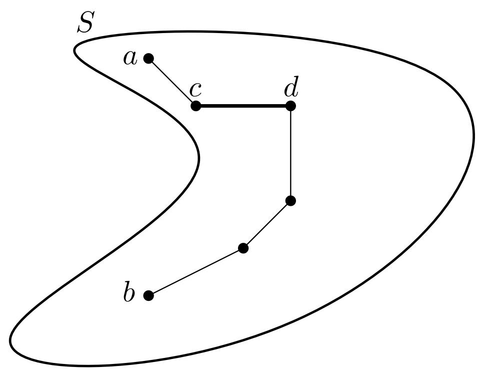
Dôkaz. Dokážeme, že za uvedených predpokladov pre všetky $a, b \in S$ platí $f(a) = f(b)$. Sporom, nech $a, b \in S$ sú také, že $f(a) \neq f(b)$. Keďže je S oblasť, existuje lomená čiara v S spájajúca bod a s bodom b. Musia preto existovať aj dva po sebe idúce vrcholy $c \neq d$ tejto lomenej čiary, pre ktoré $f(c) \neq f(d)$. Uvažujme teraz úsečku z bodu c do bodu d,

$$\{c + t(d-c) \mid t \in [0,1]\} \subseteq S.$$

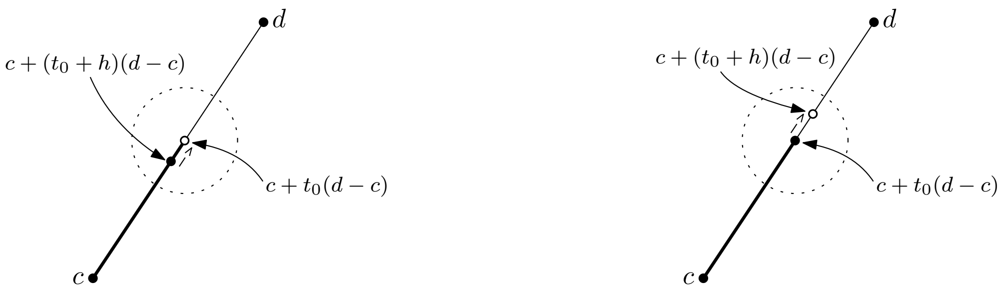
Táto situácia je znázornená na obrázku P1.1.

Dokážeme, že pre všetky $t \in [0,1]$ platí

$$\left|\frac{f(c + t(d-c)) - f(c)}{d-c}\right| \leq \frac{t}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d-c}\right|. \tag{4}$$



Obr. P1.1: Lomená čiara z a do b v S, na ktorej vyberieme úsečku z c do $d$takú, že $f(c) \neq f(d)$.



(a) Z platnosti (4) na $[0, t_0)$ usúdime na platnosť pre t_0. **(b)** Následne usúdime na platnosť (4) na $[0, t_0 + \delta']$.

Obr. P1.2: Schéma kľúčovej časti dôkazu tvrdenia P1.28.

Nerovnosť (4) tak bude musieť platiť aj pre $t = 1$; to bude spor, pretože v takom prípade

$$\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right|,$$

kde číslo v absolútnej hodnote je nenulové.

Nerovnosť (4) ale očividne platí pre $t = 0$; môžeme teda zmysluplne definovať $t_0 \in [0, 1]$ ako

$$t_0 = \sup\left\{t \in [0, 1] \;\middle|\; \forall t' \in [0, t] : \left|\frac{f(c + t'(d - c)) - f(c)}{d - c}\right| \leq \frac{t'}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right|\right\}. \tag{5}$$

Platí $f'(c + t_0(d - c)) = 0$. Pre všetky $\varepsilon > 0$ tak existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $h \in \mathbb{C}$ s $|h| < \delta$ je

$$\left|\frac{f(c + t_0(d - c) + h) - f(c + t_0(d - c))}{h}\right| < \varepsilon.$$

Špeciálne teda existuje aj (vo všeobecnosti iné) $\delta > 0$ také, že pre všetky $h \in \mathbb{R}$ s $|h| < \delta$ platí

$$\left|\frac{f(c + (t_0 + h)(d - c)) - f(c + t_0(d - c))}{h(d - c)}\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Zvoľme

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right|.$$

Dokážeme najprv, že (4) platí pre samotné t_0. Ak $t_0 = 0$, nie je čo dokazovať. Ak $t_0 > 0$, môžeme predpokladať $\delta < t_0$ a v (6) zvoliť h tak, aby $-\delta < h < 0$. Z definície t_0 potom vyplýva, že (4) platí pre $t_0 + h$ a dostávame

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(c + t_0(d - c)) - f(c)}{d - c}\right| = \\
&\quad = \left|\frac{f(c + t_0(d - c)) - f(c + (t_0 + h)(d - c)) + f(c + (t_0 + h)(d - c)) - f(c)}{d - c}\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\frac{f(c + t_0(d - c)) - f(c + (t_0 + h)(d - c))}{d - c}\right| + \left|\frac{f(c + (t_0 + h)(d - c)) - f(c)}{d - c}\right| \leq \\
&\quad \leq -\frac{h}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right| + \frac{t_0 + h}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right| = \frac{t_0}{2}\left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right|.
\end{aligned}$$

Ak teraz $t_0 = 1$, tvrdenie je dokázané. V opačnom prípade môžeme predpokladať $\delta < 1 - t_0$, zvoliť kladné $\delta' < \delta$ a uvažovať ľubovoľné h spĺňajúce $0 < h \leq \delta' < \delta$. Z práve dokázanej platnosti (4) pre t_0 dostávame

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c)}{d-c}\right| = \\
&\quad = \left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c+t_0(d-c))+f(c+t_0(d-c))-f(c)}{d-c}\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c+t_0(d-c))}{d-c}\right| + \left|\frac{f(c+t_0(d-c))-f(c)}{d-c}\right| \leq \\
&\quad \leq \frac{h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| + \frac{t_0}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| = \frac{t_0+h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|.
\end{aligned}$$

Nerovnosť (4) teda platí pre všetky $t \in [0, t_0+\delta']$, čo je spor s (5). Týmto je tvrdenie dokázané. $\square$

Literatúra

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1979.

[2] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.