Prednáška č. 2: Analytické funkcie

Peter Kostolányi

30. septembra 2019

Na tejto prednáške definujeme triedu *analytických funkcií* – to znamená funkcií lokálne reprezentovateľných mocninovými radmi – a preskúmame niektoré jej základné vlastnosti. Neskôr cez semester dokážeme, že analytickosť funkcie je v skutočnosti ekvivalentná jej holomorfnosti; nech pritom zvolíme akékoľvek pomenovanie, ide o bezpochyby najvýznamnejšiu triedu funkcií skúmanú v komplexnej analýze. Dnes dokážeme jeden smer tejto ekvivalencie: ukážeme, že každá analytická funkcia je holomorfná. Navyše ukážeme, že holomorfné sú aj derivácie analytických funkcií; každá analytická funkcia tak má derivácie všetkých rádov. Čitateľa odkazujeme aj na [1].

Našu cestu k analytickým funkciám začneme skúmaním radov komplexných čísel – uvidíme, že mnohé ich kľúčové vlastnosti sú rovnaké ako u radov reálnych čísel. Následne preskúmame základné vlastnosti mocninových radov, definujeme analytické funkcie a dokážeme vetu o derivovaní mocninových radov ukazujúcu, že každá analytická funkcia je holomorfná. Definujeme tiež exponenciálnu funkciu a goniometrické funkcie a opodstatníme tak zápis $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, ktorý sme doposiaľ používali čisto formálne.

Nekonečné rady komplexných čísel

Nekonečný rad komplexných čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ možno chápať ako postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ktorú interpretujeme odlišným spôsobom. Hovoríme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje k súčtu* $s \in \mathbb{C}$, ak je s limitou postupnosti čiastočných súčtov tohto radu, teda ak pre postupnosť $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ danú pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

V takom prípade tiež hovoríme, že s je *súčtom* radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Ak pre nejaký rad neexistuje žiaden súčet $s \in \mathbb{C}$, hovoríme, že tento rad *diverguje.*

Keďže sú uvedené definície navlas rovnaké ako pre rady reálnych čísel, dostávame nasledujúce tvrdenie umožňujúce previesť skúmanie radov komplexných čísel na skúmanie radov reálnych čísel.

Tvrdenie P2.1. *Rad komplexných čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konvergujú obidva rady reálnych čísel $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$. V takom prípade platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Dôkaz. Ide o bezprostredný dôsledok tvrdenia P1.7. □

Oddiel o radoch komplexných čísel uzavrieme krátkou zbierkou tvrdení, kde niektoré vyplynú priamo z analogických tvrdení pre rady reálnych čísel a z tvrdenia P2.1 (dôkaz vtedy neuvádzame).

Tvrdenie P2.2. *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad komplexných čísel. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ je zhora ohraničená.*

Tvrdenie P2.3. *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je rad komplexných čísel a $k \in \mathbb{N}$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=k}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}$ a v takom prípade platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Tvrdenie P2.4. *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady komplexných čísel a $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom:*

a) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ je konvergentný a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

b) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Podobne ako pre rady reálnych čísel hovoríme, že rad komplexných čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne*, ak konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Tvrdenie P2.5. *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.*

Dôkaz. Keďže pre všetky $a \in \mathbb{C}$ platí $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$ a $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$, z porovnávacieho kritéria pre rady *reálnych* čísel vyplýva, že rady $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergujú absolútne. Stačí už teda využiť známu skutočnosť, že z absolútnej konvergencie radu reálnych čísel vyplýva jeho konvergencia a odvolať sa na tvrdenie P2.1. $\square$

Veta P2.6 (Porovnávacie kritérium konvergencie)**.** *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad nezáporných reálnych čísel a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je a_n komplexné číslo také, že $|a_n| \leq b_n$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne (a teda konverguje).*

Veta P2.7 (D'Alembertovo kritérium konvergencie[1])**.** *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je rad komplexných čísel taký, že existuje limita*

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Ak $\ell < 1$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne. Ak $\ell > 1$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dôkaz. Z d'Alembertovho kritéria konvergencie pre rady nezáporných reálnych čísel v prípade $\ell < 1$ priamo vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, a teda aj absolútna konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ak naopak $\ell > 1$, pre všetky dostatočne veľké n nutne $|a_{n+1}| > |a_n|$; nemôže teda platiť $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ a rad diverguje podľa tvrdenia P2.2. $\square$

Veta P2.8 (Cauchyho odmocninové kritérium)**.** *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je rad komplexných čísel a nech $\ell = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ak $\ell < 1$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne. Ak $\ell > 1$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Dôkaz. Ak $\ell < 1$, pre všetky dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, a teda aj $|a_n| < q^n$ pre nejaké $q \in (0, 1)$. Keďže rad $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje (viď aj príklad P2.10 nižšie), stačí sa odvolať na porovnávacie kritérium a tvrdenie P2.3.

Ak naopak $\ell > 1$, zrejme nemôže platiť $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ a rad diverguje podľa tvrdenia P2.2. $\square$

Nasledujúce Dirichletovo kritérium konvergencie je pomerne „špecializované“ a využijeme ho v príklade P2.13. Čitateľ toto kritérium pravdepodobne ocení lepšie, ak sa najprv oboznámi so spomínaným príkladom.

[1] Presnejšie ide o relatívne slabú verziu tohto kritéria.

Veta P2.9 (Dirichletovo kritérium konvergencie)**.** *Nech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *je postupnosť nezáporných reálnych čísel,* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *je postupnosť komplexných čísel a sú splnené nasledujúce podmienky:*

(*i*) *Pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq a_{n+1}$.

(*ii*) *Platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*iii*) *Existuje konštanta* $M \geq 0$ *taká, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|\sum_{k=0}^{n} b_k| \leq M$.

Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Dôkaz. Označme n-tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ symbolom S_n:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Podobne označme

$$T_n := \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

Potom

$$S_n = T_n a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} T_k(a_k - a_{k+1}). \tag{1}$$

Rad $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(a_k - a_{k+1})$ konverguje absolútne podľa porovnávacieho kritéria: pre všetky $k \in \mathbb{N}$ totiž platí $|T_k(a_k - a_{k+1})| = |T_k|(a_k - a_{k+1}) \leq M(a_k - a_{k+1})$ a rad $\sum_{k=0}^{\infty} M(a_k - a_{k+1})$ konverguje, keďže

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(a_k - a_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} M(a_j - a_{j+1}) = M \lim_{k\to\infty} (a_0 - a_{k+1}) = M a_0.$$

Keďže $a_n \geq a_{n+1}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a keďže $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, zo vzťahu (1) dostávame

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n a_{n+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T_k(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T_k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(a_k - a_{k+1}),$$

v dôsledku čoho konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. □

Mocninové rady

Pod *mocninovým radom* so stredom v bode $a \in \mathbb{C}$ a s komplexnými koeficientmi rozumieme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde z je komplexná premenná a $c_n \in \mathbb{C}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Mocninový rad môžeme opäť formálne chápať len ako inak interpretovanú postupnosť komplexných koeficientov $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, ktorou je takýto rad jednoznačne určený.

Príklad P2.10. Typickým príkladom mocninového radu je geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Z tvrdenia P2.2 je jasné, že tento rad diverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| \geq 1$. Ak ale $|z| < 1$, platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{1-z}.$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ teda konverguje práve pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| < 1$.

Kľúčovým pojmom súvisiacim s mocninovými radmi je *polomer konvergencie* radu. Hoci sa jeho nasledujúca definícia môže na prvý pohľad zdať zvláštna, veta P2.12 nás hneď vzápätí ubezpečí, že je v súlade s intuitívnou predstavou o tomto koncepte.

Definícia P2.11. *Polomerom konvergencie* mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nazveme hodnotu $\varrho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ danú ako

$$\varrho := \sup \left\{ |z-a| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \text{ a číselný rad } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| \text{ konverguje} \right\}.$$

Z pozorovaní učinených v príklade P2.10 teda okrem iného vyplýva, že polomerom konvergencie geometrického radu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je $\varrho = 1$. Geometrický rad P2.10 navyše konverguje pre všetky z spĺňajúce $|z| < \varrho$ a diverguje pre všetky z spĺňajúce $|z| > \varrho$. Nasledujúca veta ukazuje, že rovnaká vlastnosť platí aj vo všeobecnosti. Ako ale neskôr ukážeme v príklade P2.13, pre z spĺňajúce $|z| = \varrho$ sa situácia môže rad od radu líšiť.

Veta P2.12 (O polomere konvergencie). *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninový rad s polomerom konvergencie ϱ. Potom:*

(*i*) *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z-a| < \varrho$ číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje absolútne.*

(*ii*) *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z-a| > \varrho$ číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ diverguje.*

Polomer konvergencie ϱ je navyše daný vzťahom

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

kde pre účely tejto vety $0^{-1} = \infty$ a $\infty^{-1} = 0$.

Dôkaz. Na dôkaz tvrdenia (*i*) vezmime ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z-a| < \varrho$. Podľa definície P2.11 existuje aspoň jedno $w \in \mathbb{C}$ také, že $|z-a| < |w-a| \leq \varrho$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(w-a)^n|$ konverguje. Keďže pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|c_n(z-a)^n| \leq |c_n(w-a)^n|$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje absolútne vďaka porovnávaciemu kritériu.

Dokážeme teraz tvrdenie (*ii*). Sporom. Nech $|z-a| > \varrho$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje. Vďaka tvrdeniu P2.2 potom existuje konštanta $M \geq 0$ taká, že $|c_n(z-a)^n| \leq M$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Zvoľme si ľubovoľné $w \in \mathbb{C}$ také, že $|z-a| > |w-a| > \varrho$. Potom

$$\frac{1}{M} |c_n(w-a)^n| = \frac{1}{M} |c_n(z-a)^n| \left| \frac{w-a}{z-a} \right|^n \leq \left| \frac{w-a}{z-a} \right|^n.$$

Platí $|(w-a)/(z-a)| < 1$; podľa pozorovania z príkladu P2.10 teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} |(w-a)/(z-a)|^n$ konverguje a z porovnávacieho kritéria vyplýva, že konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M} |c_n(w-a)^n|$. Vďaka tomu podľa tvrdenia P2.4 konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(w-a)^n|$. Keďže ale $|w-a| > \varrho$, číslo ϱ nemôže byť polomerom konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Dokážme napokon vzťah

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{2}$$

Z Cauchyho odmocninového kritéria vyplýva, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje kedykoľvek

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 \tag{3}$$

a diverguje kedykoľvek

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1. \tag{4}$$

Nerovnosť (3) je splnená kedykoľvek, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ také, že pre dostatočne veľké n platí

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-a| < 1 - \varepsilon,$$

alebo ekvivalentne[2],

$$|z-a| < \frac{1-\varepsilon}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

[2]Pre naše terajšie účely $(1-\varepsilon)/0 = \infty$.

Rad teda konverguje kedykoľvek, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ a $\delta > 0$ tak, že

$$|z-a| < \frac{1-\varepsilon}{\delta + \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

čo je pravda kedykoľvek, keď

$$|z-a| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

Nerovnosť (4) je splnená kedykoľvek, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ také, že pre nekonečne veľa n platí

$$|z-a| > \frac{1+\varepsilon}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

a podobne ako vyššie zisťujeme, že rad diverguje kedykoľvek

$$|z-a| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Z dokázaných tvrdení (i) a (ii) teda vyplýva, že skutočne platí vzťah (2). □

Príklad P2.13. Veta o polomere konvergencie nehovorí nič o konvergencii alebo divergencii mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ v bodoch z, ktorých hodnota $|z-a|$ je rovná polomeru konvergencie ϱ. Ukážeme teraz, že situácia tu môže byť pre rôzne mocninové rady veľmi rozdielna.

a) V príklade P2.10 sme dokázali, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ má polomer konvergencie $\varrho = 1$, pričom tento rad diverguje na celej kružnici $|z| = \varrho$.

b) Uvažujme mocninový rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$. Pre polomer konvergencie tohto radu platí

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(\ln n)/n}} = 1,$$

z čoho $\varrho = 1$. Pre $z = 1$ ide o harmonický rad, o ktorom je známe, že diverguje. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ spĺňajúce $|z| = 1$ môžeme na druhej strane pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ položiť $a_n := 1/n$ a $b_n := z^n$. Pre všetky kladné prirodzené n zjavne $a_n \geq a_{n+1}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; navyše

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right| \leq \frac{2}{|z-1|}.$$

Môžeme teda aplikovať Dirichletovo kritérium konvergencie,[3] podľa ktorého rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ pre uvedené z konverguje. Rad teda konverguje na celej kružnici $|z| = \varrho$ s výnimkou bodu $z = 1$.

c) Uvažujme mocninový rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. Pre polomer konvergencie opäť dostávame

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(2\ln n)/n}} = 1,$$

čiže $\varrho = 1$. Pre $z = 1$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; tam však pre $n \geq 2$ máme

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teda

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Postupnosť čiastočných súčtov $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je teda zhora ohraničená; keďže je aj neklesajúca, musí konvergovať k vlastnej limite, v dôsledku čoho konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Použitím porovnávacieho kritéria tak dostávame konvergenciu mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ na celej kružnici $|z| = \varrho$.

[3] Zjavne je možné rad preindexovať tak, aby začínal nultým členom.

Analytické funkcie

Analytickou funkciou nazveme funkciu komplexnej premennej, ktorá je lokálne reprezentovateľná mocninovým radom (s nenulovým polomerom konvergencie).

Definícia P2.14. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Funkcia f je *analytická* v bode a, ak existuje $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a, r)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sú nejaké komplexné čísla a rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje pre všetky $z \in D(a, r)$.[4]

Definícia P2.15. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *analytická* na množine T, ak je analytická v každom bode $a \in T$.

Príklad P2.16. Z príkladu P2.10 vyplýva, že funkcia $f(z) = 1/(1-z)$ je analytická v bode 0, pričom pre $z \in D(0, 1)$ platí

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

V skutočnosti je však táto funkcia analytická aj na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, hoci uvedený rad pre $z \notin D(0, 1)$ diverguje. Pre ľubovoľné $a, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ totiž

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-(z-a)/(1-a)}$$

a pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ spĺňajúce

$$\left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1,$$

– to znamená pre $z \in D(a, |1-a|)$ – platí

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

Príklad P2.17. Podobne pre ľubovoľné čísla $c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je funkcia $f(z) = 1/(cz + d)$ analytická na $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. V bode $a = 0$ je pritom táto funkcia daná mocninovým radom

$$\frac{1}{cz+d} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1+(c/d)z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^n}{d^{n+1}} z^n$$

s polomerom konvergencie $\varrho = |d/c|$. Podobne pre ľubovoľné $a \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ máme

$$\frac{1}{cz+d} = \frac{1}{c(z-a)+(ca+d)} = \frac{1}{ca+d} \cdot \frac{1}{1+(c/(ca+d))(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{(ca+d)^{n+1}} (z-a)^n,$$

kde polomer konvergencie mocninového radu je $\varrho = |(ca + d)/c|$.

Derivovanie mocninových radov

Dokážeme teraz, že mocninové rady možno derivovať člen po člene. To znamená, že každá funkcia f analytická v bode $a \in \mathbb{C}$ je v tomto bode aj holomorfná, pričom funkcia f' je v bode a opäť analytická a mocninový rad reprezentujúci f' v bode a získame zderivovaním jednotlivých členov mocninového radu pre f. Ukážeme navyše, že polomer konvergencie mocninového radu pre deriváciu je rovnaký ako pre mocninový rad reprezentujúci pôvodnú funkciu.

Keďže túto úvahu možno ľubovoľný počet ráz zopakovať, zisťujeme, že ľubovoľná funkcia analytická v bode $a \in \mathbb{C}$ má v tomto bode derivácie všetkých rádov, ktoré sú taktiež analytické.

[4] Inak povedané: pre polomer konvergencie ϱ daného radu musí platiť $\varrho \geq r$.

Lema P2.18. *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninový rad s polomerom konvergencie $\varrho > 0$. Polomer konvergencie radu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \tag{5}$$

je potom tiež rovný ϱ.

Dôkaz. Rad (5) má vďaka tvrdeniu P2.4 rovnaký polomer konvergencie R ako rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^n = (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Z vety P2.12 potom pre tento polomer konvergencie R dostávame

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varrho^{-1},$$

kde predposledná rovnosť platí vďaka tomu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Presnejšie*: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Keďže $\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ a z $\varrho > 0$ vyplýva $\varrho^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, z definície limes superior dostávame, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_1$ platí $\left|\sup_{m\geq n} \sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| < \varepsilon$. Pre všetky $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ teda

$$\begin{aligned}
\left|\sup_{m\geq n}\left(\sqrt[m]{m}\sqrt[m]{|c_m|}\right) - \varrho^{-1}\right| &= \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|} + \sqrt[m]{|c_m|}\right) - \varrho^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|}\right) + \sup_{m\geq n}\sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|}\right)\right| + \left|\sup_{m\geq n}\sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| < \\
&< \varepsilon \sup_{m\geq n}\left(\sqrt[m]{|c_m|}\right) + \varepsilon < \varepsilon(\varrho^{-1}+\varepsilon) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Keďže $\varrho^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je konštanta, z uvedeného naozaj vyplýva $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|} = \varrho^{-1}$. □

Veta P2.19. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Ak pre nejaké $r > 0$ a všetky $z \in D(a,r)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

(kde mocninový rad konverguje), je funkcia f holomorfná na $D(a,r)$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Dôkaz. Budeme uvažovať iba $a = 0$. Z tohto špeciálneho prípadu vyplynie aj ten všeobecný – stačí uvažovať funkciu $f(z+a)$ a jej deriváciu.

Z reprezentácie funkcie f mocninovým radom na $D(0,r)$ vyplýva, že má tento rad polomer konvergencie $\varrho \geq r$. Preto má podľa lemy P2.18 polomer konvergencie ϱ aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} =: g(z).$$

Zostáva dokázať, že $g(z)$ je na $D(0,r)$ deriváciou funkcie f. Zvoľme preto ľubovoľné $b \in D(0,r)$. Pre všetky $h > 0$ také, že $b+h \in D(0,r)$ potom

$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} - g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1}\right).$$

Stačí dokázať, že pravá strana tejto rovnosti speje pre $h \to 0$ k nule. Vďaka binomickej vete

$$(b+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k b^{n-k},$$

z čoho

$$\begin{aligned}
\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k b^{n-k}}{h} - \binom{n}{1} b^{n-1} = \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^{j+1} b^{n-j-2} = \\
&= h \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^j b^{n-j-2}.
\end{aligned}$$

Ak ďalej číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ konverguje absolútne, s použitím trojuholníkovej nerovnosti a limitného prechodu ľahko dokážeme $|\sum_{n=0}^{\infty} d_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$. Preto

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} \right) \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(h \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^j b^{n-j-2} \right) \right| = \\
&= |h| \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{(j+2)!(n-j-2)!} h^j b^{n-j-2} \right| \leq \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{(j+2)!(n-j-2)!} |h|^j |b|^{n-j-2} \leq \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!(n-2-j)!} |h|^j |b|^{n-2-j} = \\
&= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |h|^j |b|^{n-2-j} = \\
&= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \left(|h| + |b|\right)^{n-2}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Dvojnásobným použitím lemy P2.18 zisťujeme, že rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2}$$

má tiež polomer konvergencie ϱ. Z definície polomeru konvergencie teda vyplýva, že pre h spĺňajúce $|b| + |h| < \varrho$ číselný rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \left(|h| + |b|\right)^{n-2}$$

konverguje k nejakej reálnej konštante. Výraz (6) teda skutočne pre $h \to 0$ speje k nule, čím je veta dokázaná. □

Dôsledok P2.20. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Ak je funkcia f analytická v bode a, je funkcia f v bode a holomorfná a funkcia f' je opäť analytická v bode a. V dôsledku toho má funkcia f v bode a derivácie ľubovoľného rádu, pričom všetky sú analytické v a.*

Týmto pozorovaním nateraz skúmanie základných vlastností analytických funkcií zanechávame. Neskôr počas semestra sa k tejto problematike ešte vrátime a ukážeme okrem iného aj opačnú implikáciu k predošlému tvrdeniu: že totiž každá holomorfná funkcia je analytická. Tiež potom uvidíme, že lokálne reprezentácie analytických funkcií pomocou mocninových radov sú vždy Taylorovými radmi danej funkcie (definovanými obdobne ako v reálnom prípade).

Exponenciálna funkcia a goniometrické funkcie

Zavedieme teraz exponenciálnu funkciu a goniometrické funkcie komplexnej premennej. Ako je dobre známe, reálne verzie týchto funkcií sú na celom $\mathbb{R}$ reprezentovateľné ich Maclaurinovými radmi. Komplexné obdoby týchto radov využijeme na to, aby sme spomínané funkcie *definovali* na obore $\mathbb{C}$.

Definícia P2.21.

(i) *Exponenciálnu funkciu* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

(ii) *Funkciu sínus* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(iii) *Funkciu kosínus* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Poznámka P2.22. Korektnosť uvedenej definície nie je úplne zrejmá; je totiž potrebné dokázať, že uvedené rady majú nekonečný polomer konvergencie. Pre polomer konvergencie ϱ radu definujúceho funkciu e^z ale máme

$$\begin{aligned} \varrho^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\ln(n!)/n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(n/2)\ln(n/2)/n}} = \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n\sqrt{e}} = 0 \end{aligned}$$

(kde použitá exponenciálna funkcia je *reálna*), z čoho $\varrho = \infty$. Nekonečný polomer konvergencie radov pre sínus a kosínus potom vyplýva bezprostredne z porovnávacieho kritéria.

Keďže sme na definíciu všetkých troch funkcií použili komplexnú obdobu ich Taylorových radov v reálnom obore, na $\mathbb{R}$ tieto funkcie splývajú s ich reálnymi náprotivkami. Ďalej už teda nemusíme rozlišovať medzi ich reálnymi a komplexnými verziami. V nasledujúcom tvrdení okrem iného vyjadríme pomocou reálnych funkcií sínus a kosínus hodnotu exponenciálnej funkcie na rýdzo imaginárnych vstupoch (stačí zvoliť $z \in \mathbb{R}$). Odôvodníme tak aj zápis komplexných čísel v exponenciálnom tvare, ktorý sme doposiaľ chápali čisto formálne. Na druhej strane bude z nasledujúceho tvrdenia vyplývať, že vlastnosti „formálneho“ exponenciálneho tvaru platia aj pre „ozajstnú“ exponenciálnu funkciu.

Tvrdenie P2.23. *Nech $z \in \mathbb{C}$. Potom $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.*

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z definície P2.21 a tvrdenia P2.4. □

Dôsledok P2.24 (Eulerova rovnosť). *Platí $e^{i\pi} + 1 = 0$.*

Tvrdenie P2.25. *Funkcie e^z, $\sin z$ a $\cos z$ sú holomorfné na $\mathbb{C}$ a platí $(e^z)' = e^z$, $\sin' z = \cos z$ a $\cos' z = -\sin z$.*

Dôkaz. Všetky tri funkcie sú analytické v bode 0 a zodpovedajúce mocninové rady majú nekonečný polomer konvergencie. Stačí teda aplikovať vetu P2.19. □

Tvrdenie P2.26. *Nech $z, w \in \mathbb{C}$. Potom $e^{z+w} = e^z e^w$.*

Dôkaz. Zvoľme $a \in \mathbb{C}$ a položme $f(z) := e^z e^{a-z}$. Z vety P1.24 potom $f'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$. Podľa tvrdenia P1.28 je teda funkcia f konštantná. Navyše platí $f(a) = e^a e^0 = e^a$ – pre všetky $z \in \mathbb{C}$ teda $f(z) = e^a$. Pre ľubovoľné $z, w \in \mathbb{C}$ teraz zvoľme $a = z + w$; zisťujeme, že $f(z) = e^z e^w = e^{z+w}$, čo bolo treba dokázať. □

Dôsledok P2.27. *Nech $z \in \mathbb{C}$. Potom $e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ a $[\![\arg e^z]\!] = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.