Prednáška č. 3: Integrovanie funkcií komplexnej premennej

Peter Kostolányi

7. októbra 2019

Budeme sa teraz nejaký čas venovať integrálom funkcií komplexnej premennej. Nepôjde pritom o samoúčelné snaženie – integrovanie v komplexnej rovine sa neskôr ukáže okrem iného ako užitočný nástroj na skúmanie rozličných vlastností analytických funkcií, o ktoré nám na tomto predmete ide predovšetkým. Nasledujúci text čiastočne vychádza z [2] a [1].

Komplexné funkcie reálnej premennej

V súvislosti s integrálmi budeme potrebovať narábať s komplexnými funkciami reálnej premennej – čiže funkciami $f\colon S \to \mathbb{C}$, kde $S \subseteq \mathbb{R}$. V podstate tu nejde o žiaden nový objekt: každú takúto funkciu f totiž možno reprezentovať pomocou dvojice reálnych funkcií $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ definovaných pre všetky $t \in S$ predpismi $(\operatorname{Re} f)(t) := \operatorname{Re}(f(t))$ a $(\operatorname{Im} f)(t) := \operatorname{Im}(f(t))$; zjavne potom platí $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$. V stručnosti si teraz zhrnieme niekoľko základných faktov o takýchto funkciách.

Ako definície *limity* a *spojitosti* môžu pre takéto funkcie poslúžiť definície pre funkcie komplexnej premennej z prvej prednášky. Platia pritom nasledujúce očakávateľné vlastnosti.

Tvrdenie P3.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Potom:*

a) Pre ľubovoľný hromadný bod a množiny S existuje limita $\lim_{t\to a} f(t)$ práve vtedy, keď existujú obidve limity $\lim_{t\to a} \operatorname{Re} f(t)$ a $\lim_{t\to a} \operatorname{Im} f(t)$. V takom prípade platí

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} \operatorname{Re} f(t) + i \lim_{t\to a} \operatorname{Im} f(t).$$

b) Funkcia f je spojitá v bode $a \in S$ (resp. na množine $T \subseteq S$) práve vtedy, keď sú v bode a (resp. na množine S) spojité obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.

Dôkaz. Ide o špeciálny prípad tvrdenia P1.7. □

Definíciu derivácie môžeme takisto zrecyklovať z prvej prednášky, musíme však pracovať s verziou pre ľubovoľný hromadný bod množiny $\mathbb{C}$ (a nielen pre body z otvorených podmnožín $\mathbb{C}$).

Definícia P3.2. Nech $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a a je hromadný bod množiny S. *Deriváciou* funkcie f v bode a nazveme, ak existuje, hodnotu limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ak má funkcia f v bode a konečnú deriváciu, nazveme ju *diferencovateľnou* v bode a. Funkcia f je diferencovateľná na množine $T \subseteq S$, ak T pozostáva výhradne z hromadných bodov množiny S a f je diferencovateľná v každom bode $a \in S$.

Tvrdenie P3.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Funkcia f je diferencovateľná v hromadnom bode a množiny S práve vtedy, keď sú v bode a diferencovateľné obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. V takom prípade navyše*

$$\operatorname{Re}(f'(a)) = (\operatorname{Re} f)'(a),$$
$$\operatorname{Im}(f'(a)) = (\operatorname{Im} f)'(a)$$

a

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a).$$

Dôkaz. Jednoduché cvičenie. □

Parametrické krivky

V reálnej analýze sa určitý integrál funkcie obvykle definuje na intervale. Pri prechode od jednorozmernej reálnej osi k dvojrozmernej komplexnej rovine sa vhodným zovšeobecnením tohto konceptu javí byť integrovanie komplexných funkcií pozdĺž kriviek. Zavedieme preto niekoľko pojmov, ktoré s krivkami súvisia.

Krivku v komplexnej rovine možno vo všeobecnosti zadať (najmenej) dvoma principiálne odlišnými spôsobmi. Jednou možnosťou je chápať krivku ako „statický objekt“, čiže ako vhodnú množinu bodov komplexnej roviny, zadanú napríklad rovnicou. Tak napríklad zápis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ udáva kružnicu so stredom $a \in \mathbb{C}$ a polomerom $r > 0$, zápis $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| = |\mathrm{Im}\, z| \wedge |z| \leq \sqrt{2}\}$ je vyjadrením úsečky spájajúcej body $-1-i$ a $1+i$, a podobne.

Za účelom definície integrálu je však vhodnejší „dynamický“ pohľad, pri ktorom krivku chápeme ako dráhu opísanú pohybujúcim sa bodom v nejakom časovom intervale. Ak sa bod začal pohybovať v čase $t = \alpha$ a prestal sa pohybovať v čase $t = \beta$, je ním opísaná dráha jednoznačne určená funkciou, ktorá pre každý čas z intervalu $[\alpha, \beta]$ vráti „aktuálnu polohu“ pohybujúceho sa bodu v komplexnej rovine. Aby sme o opísanej dráhe mohli zmysluplne hovoriť ako o krivke, pohybujúci sa bod by nemal mať možnosť „skákať“ z jedného miesta na druhé – zobrazenie udávajúce krivku by teda malo byť spojité. Krivka je tu teda daná spojitou funkciou reálneho časového parametra t a nazývame ju preto *krivkou danou parametricky* alebo *parametrickou krivkou*. Zvyčajne však budeme prívlastok „parametrická“ vynechávať a hovoriť jednoducho o *krivke*.

Definícia P3.4. *Parametrická krivka* je spojité zobrazenie $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, kde $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla.

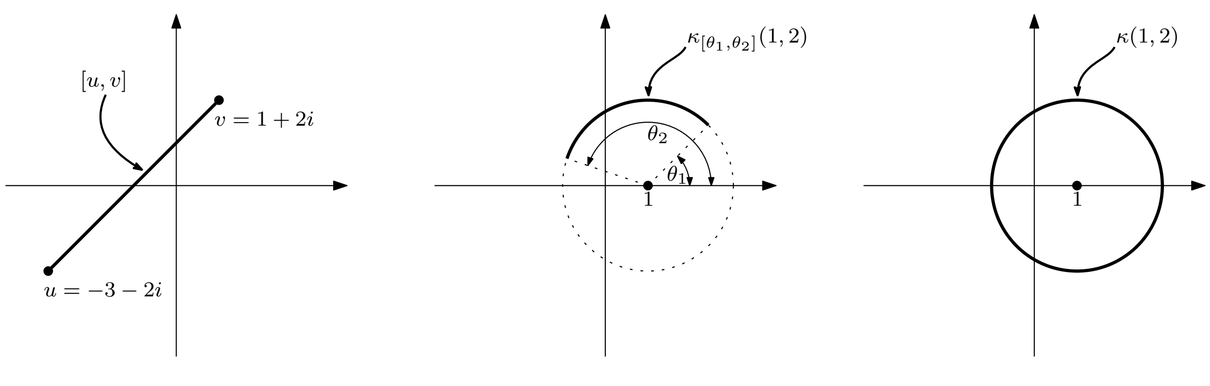
Príklad P3.5. *Úsečku* začínajúcu v bode $u \in \mathbb{C}$ a končiacu v bode $v \in \mathbb{C}$ možno zadať ako parametrickú krivku $[u, v]\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [0, 1]$ predpisom

$$[u, v](t) = u + t(v - u).$$

Kruhový oblúk so stredom $a \in \mathbb{C}$ a polomerom $r > 0$, vymedzený uhlami $\theta_1 \leq \theta_2$, možno zadať ako parametrickú krivku $\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)\colon [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [\theta_1, \theta_2]$ predpisom

$$\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)(t) = a + re^{it}.$$

Pod *kružnicou* $\kappa(a, r)$ so stredom a polomerom r rozumieme kruhový oblúk $\kappa_{[0,2\pi]}(a, r)$. Tieto tri pravdepodobne najdôležitejšie druhy parametrických kriviek sú znázornené na obrázku P3.1.



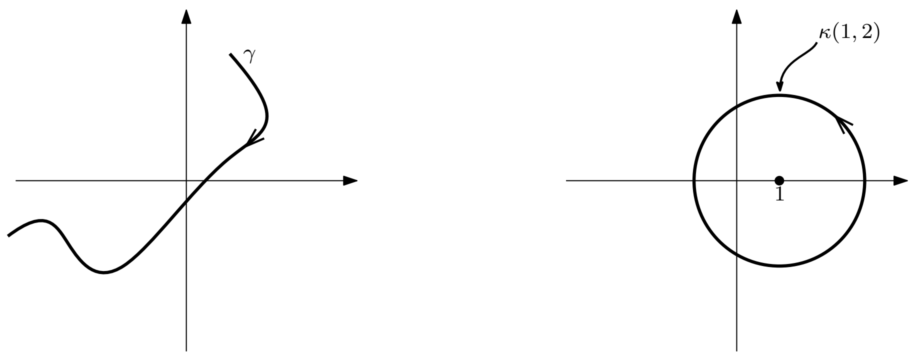
(a) Úsečka $[-3-2i, 1+2i]$. **(b)** Kruhový oblúk $\kappa_{[\theta_1,\theta_2](1,2)}$. **(c)** Kružnica $\kappa(1, 2)$.

Obr. P3.1: Úsečka, kruhový oblúk a kružnica.

Označenie P3.6. V nasledujúcom budeme často používať notáciu z predošlého príkladu – $[u, v]$ pre úsečku, $\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)$ pre kruhový oblúk a $\kappa(a, r)$ pre kružnicu.

Počiatočným bodom takto definovanej krivky γ nazveme bod $\gamma(\alpha)$ a jej *koncovým bodom* bod $\gamma(\beta)$. Symbolom γ^* označíme množinu všetkých bodov ležiacich na krivke γ, t.j. $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$; táto množina sa nazýva *obrazom* krivky γ. Krivku nazveme *uzavretou* ak $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ a *jednoduchou* ak pre všetky $t_1 \leq t_2$ z $[\alpha, \beta]$ rovnosť $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implikuje $t_1 = t_2$, alebo súčasne $t_1 = \alpha$ a $t_2 = \beta$; jednoduchá krivka sa teda nikde „nekríži", pričom môže alebo nemusí byť uzavretá. Jednoduchú a súčasne uzavretú krivku nazývame *Jordanovou krivkou.*

Každá jednoduchá parametrická krivka udáva okrem svojho obrazu γ^* aj smer, v ktorom je táto množina bodov opísaná. Túto skutočnosť graficky vyjadrujeme šípkami, podobne ako na obrázku P3.2. O jednoduchej uzavretej krivke navyše hovoríme, že je *kladne orientovaná*, ak je opísaná „proti smeru hodinových ručičiek". Takáto definícia orientácie je však značne neexaktná – ozajstnú definíciu sformulujeme až neskôr s využitím krivkového integrálu.



(a) Smer opísania krivky γ znázornený šípkou. **(b)** Kružnica $\kappa(1, 2)$ je orientovaná kladne.

Obr. P3.2: Orientované krivky.

Poznámka P3.7. Grafické znázornenie na obrázku P3.2 vyjadruje spôsob, akým jednoduché parametrické krivky obvykle chápeme – väčšinou ich *stotožňujeme* s ich obrazom spoločne s ich orientáciou. Pri práci s krivkovými integrálmi sa týmto stotožnením zvyčajne nedopustíme chyby. Treba však mať na pamäti, že táto skutočnosť nie je nijak samozrejmá: dve rovnako orientované krivky s rovnakými obrazmi môžu byť definované pomocou rozdielnych intervalov časového parametra, a teda nemusí ísť o jeden a ten istý objekt. Budeme preto neskôr musieť *dokazovať*, že v uvedenom zmysle „ekvivalentné" krivky sa za určitých okolností naozaj „správajú rovnako".

Na krivkách tiež môžeme definovať tri jednoduché operácie. Pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ označíme symbolom $-\gamma$ k nej *opačnú* krivku $-\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, definovanú pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ predpisom

$$(-\gamma)(t) = \gamma(\alpha + \beta - t).$$

Táto krivka má rovnaký obraz ako krivka γ, je však opísaná „opačným smerom". Pre ľubovoľnú dvojicu kriviek $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma_2\colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ takých, že $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_2)$ ďalej symbolom $\gamma_1 + \gamma_2$ označíme ich *spojenie*[1], ktoré definujeme ako krivku $\gamma_1 + \gamma_2\colon [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2]$ predpisom

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{ak } t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(\alpha_2 - \beta_1 + t) & \text{ak } t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2]. \end{cases}$$

Nakoniec definujme *zúženie* $\gamma \restriction [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ na interval $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$, kde $\alpha \leq \hat{\alpha} \leq \hat{\beta} \leq \beta$, ako krivku $\left(\gamma \restriction [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]\right) : [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ spĺňajúcu $\left(\gamma \restriction [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]\right)(t) = \gamma(t)$ pre všetky $t \in [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$.

[1] Operácia spojenia kriviek je zrejme asociatívna, čo nám umožňuje používať aj notáciu $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ pre spojenie n (vhodných) kriviek $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Poznámka P3.8. Notácia $-\gamma$ pre opačnú krivku a $\gamma_1 + \gamma_2$ pre spojenie dvoch kriviek je síce zaužívaná, ale nie je konzistentná s operáciami na funkciách, ktoré sú nositeľkami rovnakých označení. Je preto dôležité zakaždým rozlišovať, či krivku chápeme naozaj ako krivku, alebo nás zaujíma funkcia, pomocou ktorej je táto krivka definovaná. V nasledujúcom to bude vždy zrejmé z kontextu.

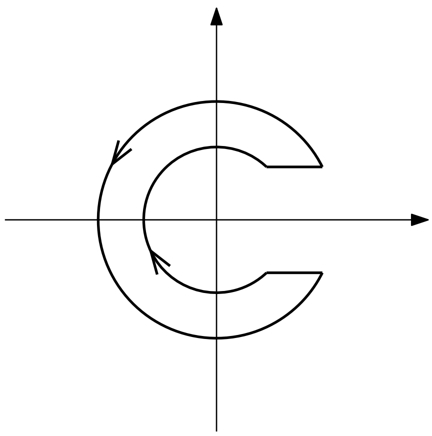
Zmysel nasledujúcej definície *hladkých* a *po častiach hladkých* kriviek sa ukáže v súvislosti s krivkovými integrálmi.

Definícia P3.9. Nech $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla. Krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ nazveme:

a) *Hladkou*[2], ak je funkcia γ na intervale $[\alpha, \beta]$ spojite diferencovateľná (v bodoch α a β stačí existencia jednostrannej derivácie).

b) *Po častiach hladkou*, ak je spojením niekoľkých hladkých kriviek.

V komplexnej analýze sa typicky pracuje s krivkami, ktoré sú spojením konečného počtu kruhových oblúkov a úsečiek – príklad takejto krivky je na obrázku P3.3. Ľahko možno overiť, že všetky takéto krivky sú po častiach hladké. V nasledujúcom budeme pracovať výhradne s po častiach hladkými krivkami.



Obr. P3.3: Krivky vzniknuté spojením konečného počtu kruhových oblúkov a úsečiek sú v komplexnej analýze najčastejšie používaným druhom po častiach hladkých kriviek.

Integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

Vo zvyšku tohto textu budeme hojne využívať určité integrály reálnych funkcií reálnej premennej. Môže pritom vždy ísť o Riemannov integrál alebo o ľubovoľný iný integrál taký, že všetky funkcie po častiach spojité na intervale $[\alpha, \beta]$ – čiže všetky funkcie, ktoré sú na tomto intervale nespojité v nanajvýš konečnom počte bodov – sú na intervale $[\alpha, \beta]$ integrovateľné, pričom hodnota tohto integrálu sa zhoduje s hodnotou Riemannovho integrálu. Môže ísť teda napríklad aj o Lebesgueov integrál; znalosť jeho teórie však u čitateľa samozrejme nepredpokladáme.

Ako medzikrok k pojmu krivkového integrálu definujeme určitý integrál komplexnej funkcie *reálnej* premennej; základom pre definíciu takéhoto integrálu je jeho očakávaná linearita.

Definícia P3.10. Nech $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla, $S \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Funkciu f nazveme *integrovateľnou* na intervale $[\alpha, \beta]$, ak sú na tomto intervale integrovateľné funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. V takom prípade definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left(\operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)\right)\,\mathrm{d}t := \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka P3.11. Z vyššie uvedeného vyplýva, že všetky po častiach spojité komplexné funkcie reálnej premennej sú integrovateľné.

[2] Pojem hladkej krivky nemožno zamieňať s pojmom hladkej funkcie, čo je reálna funkcia s deriváciami všetkých rádov. Pri hladkej krivke požadujeme iba existenciu jedinej spojitej derivácie.

Krivkový integrál funkcie komplexnej premennej

Definujeme teraz krivkové integrály komplexných funkcií komplexnej premennej. Ako už bolo povedané, pôjde o zovšeobecnenie určitého integrálu funkcií reálnej premennej, pri ktorom budeme namiesto intervalov integrovať pozdĺž kriviek v komplexnej rovine. Ako je dobre známe, pre funkciu g reálnej premennej t integrovateľnú na intervale $[0,1]$ platí

$$\int_1^0 g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Očakávali by sme teda napríklad, že ak γ je úsečka dĺžky 1 zvierajúca so smerom reálnej osi uhol θ a f je funkcia komplexnej premennej z taká, že pre každé $t \in [0,1]$ platí $f(\gamma(t)) = g(t)$, bude pre integrál funkcie f pozdĺž γ platiť

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = e^{i\theta}\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pre všeobecnú krivku $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ požadujeme podobnú vlastnosť: chceli by sme „sčítať nekonečne veľa hodnôt funkcie f nad krivkou γ", pričom „každý infinitezimálny kúsok" nad bodom $\gamma(t)$ by sme chceli prenásobiť „smerovým vektorom" parametrickej krivky v danom bode, ktorý je daný jej deriváciou (ak, pravda, existuje). Prichádzame tak k vzťahu

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

ktorý môžeme neformálne odôvodniť aj symbolicky: ak $z = \gamma(t)$, tak $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. Derivácia $\gamma'(t)$ však na danom intervale nemusí všade existovať, prípadne nemusí byť spojitá; aby teda bol vyššie uvedený integrál dobre definovaný, obmedzíme sa na po častiach hladké krivky. Tak prichádzame k nasledujúcej definícii.

Definícia P3.12. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. *Integrál funkcie f pozdĺž krivky γ* potom definujeme predpisom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka P3.13. Korektnosť uvedenej definície vyplýva z nasledujúceho: funkcie f aj γ sú spojité, teda je spojité aj ich zloženie. Krivka γ je navyše po častiach hladká, čo znamená, že funkcia γ' je na intervale $[\alpha,\beta]$ – až na konečne veľa jeho bodov[3] – dobre definovaná a po častiach spojitá. V dôsledku toho je po častiach spojitá aj funkcia $(f\circ\gamma)\gamma'$ – táto funkcia je teda integrovateľná.

Poznámka P3.14. Krivkový integrál možno definovať aj pre všeobecnejšiu triedu kriviek, než sú po častiach hladké krivky – takýto prístup by si však vyžadoval vybudovať pomerne netriviálnu teóriu, hoci z hľadiska porozumenia základným princípom komplexnej analýzy by sme tým veľa nezískali. Aj pre praktické účely sú po častiach hladké krivky viac ako plne postačujúce.

Príklad P3.15. Vypočítame integrál z funkcie $f(z) = z^2$ pozdĺž úsečky $\gamma = [-i, 2i]$:

$$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (-i+3it)^2 3i\,\mathrm{d}t = 3i\int_0^1 (-9t^2+6t-1)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 3i\left[-3t^3+3t^2-t\right]_{t=0}^1 = 3i\,(-1-0) = -3i.$$

Význam nasledujúceho tvrdenia nemožno preceniť – hovorí o azda najdôležitejších konkrétnych integráloch v komplexnej analýze vôbec.

[3] V týchto bodoch ju však možno ľubovoľne dodefinovať, a teda túto skutočnosť v súlade s dobrým zvykom ignorujeme.

Tvrdenie P3.16. *Nech $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $k \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\int_{\kappa(a,r)} (z-a)^k \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{ak } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 2\pi i & \text{ak } k = -1. \end{cases}$$

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned} \int_{\kappa(a,r)} (z-a)^k \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^k ire^{it} \, \mathrm{d}t = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} \, \mathrm{d}t = \\ &= ir^{k+1} \int_0^{2\pi} (\cos(k+1)t + i \sin(k+1)t) \, \mathrm{d}t = \\ &= ir^{k+1} \left(\int_0^{2\pi} \cos(k+1)t \, \mathrm{d}t + i \int_0^{2\pi} \sin(k+1)t \, \mathrm{d}t \right) = \\ &= \begin{cases} ir^{k+1} \left(\left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} \right]_{t=0}^{2\pi} - i \left[\frac{\cos(k+1)t}{k+1} \right]_{t=0}^{2\pi} \right) & \text{ak } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ i \, [t]_{t=0}^{2\pi} & \text{ak } k = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Na zavŕšenie dôkazu už len stačí využiť skutočnosť, že pre všetky $\ell \in \mathbb{Z}$ platí $\sin 2\ell\pi = \sin 0 = 0$ a $\cos 2\ell\pi = \cos 0 = 1$. □

Elementárne vlastnosti krivkového integrálu

Dokážeme najprv, že integrály pozdĺž opačných kriviek a pozdĺž spojení kriviek majú očakávateľné hodnoty.

Tvrdenie P3.17. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f \colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom:*

(*i*) *Platí*

$$\int_{-\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

(*ii*) *Ak $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ pre nejaké dve po častiach hladké krivky $\gamma_1 \colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma_2 \colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$, tak*

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Dôkaz.

(*i*) Z definície opačnej krivky dostávame

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t) \, \mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\gamma(\alpha+\beta-t))\gamma'(\alpha+\beta-t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_\beta^\alpha f(\gamma(s))\gamma'(s) \, \mathrm{d}s = -\int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\gamma'(s) \, \mathrm{d}s = -\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

(*ii*) Z definície spojenia kriviek dostávame $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2$ a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1+\beta_2-\alpha_2} f((\gamma_1+\gamma_2)(t))(\gamma_1+\gamma_2)'(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t + \int_{\beta_1}^{\beta_1+\beta_2-\alpha_2} f(\gamma_2(\alpha_2-\beta_1+t))\gamma_2'(\alpha_2-\beta_1+t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s) \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$ □

Dôsledok P3.18. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Ak $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ pre nejakú n-ticu po častiach hladkých kriviek*

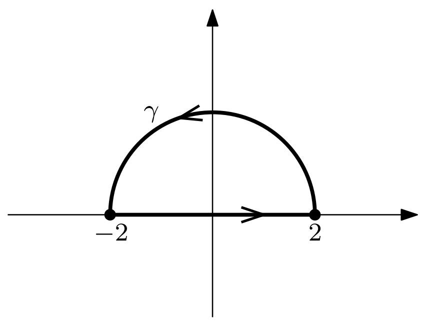
$$\gamma_1\colon [\alpha_1,\beta_1] \to \mathbb{C}, \ldots, \gamma_n\colon [\alpha_n,\beta_n] \to \mathbb{C},$$

tak

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Príklad P3.19. Vypočítame integrál funkcie $f(z) = z^2$ pozdĺž uzavretej krivky $\gamma = [-2,2] + \kappa_{[0,\pi]}(0,2)$ na obrázku P3.4. Táto integračná krivka je očividne po častiach hladká. Z tvrdenia P3.17 a definície krivkového integrálu:

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z &= \int_{[-2,2]} z^2\,\mathrm{d}z + \int_{\kappa_{[0,\pi]}(0,2)} z^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (-2+4t)^2 4\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi (2e^{it})^2 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\int_0^1 (16t^2 - 16t + 4)\,\mathrm{d}t + 8i\int_0^\pi \cos 3t\,\mathrm{d}t - 8\int_0^\pi \sin 3t\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\left[\frac{16t^3}{3} - 8t^2 + 4t\right]_{t=0}^{1} + 8i\left[\frac{\sin 3t}{3}\right]_{t=0}^{\pi} + 8\left[\frac{\cos 3t}{3}\right]_{t=0}^{\pi} = \frac{16}{3} + 0 - \frac{16}{3} = 0.\end{aligned}$$



Obr. P3.4: Uzavretá integračná krivka γ.

V nasledujúcom dokážeme, že integrály pozdĺž po častiach hladkých kriviek „s rovnakým obrazom a smerom", líšiacich sa iba parametrizáciou, majú za istých podmienok rovnaké hodnoty. Inými slovami: každú po častiach hladkú krivku $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ môžeme za určitých podmienok reparametrizovať – t.j. zadať ako funkciu nejakého iného intervalu $[\hat{\alpha},\hat{\beta}]$ – bez toho, aby sa zmenili hodnoty integrálov pozdĺž nej. Podmienky, ktoré musí táto reparametrizácia spĺňať, bývajú v praxi v podstate vždy splnené; to nás do určitej miery oprávňuje hovoriť o integráloch pozdĺž kriviek bez toho, aby sme tieto krivky explicitne parametrizovali.[4]

Definícia P3.20. Nech $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka. Krivku $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha},\hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ nazveme *reparametrizáciou* krivky γ, ak existuje nejaká (rýdzo) rastúca spojite diferencovateľná[5] funkcia $\varphi\colon [\hat{\alpha},\hat{\beta}] \to [\alpha,\beta]$ taká, že $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Podmienka rastúcosti reparametrizácie vyjadruje vlastnosť, že obidve krivky sú „opísané rovnakým smerom". Podmienka jej spojitej diferencovateľnosti je technická a využíva sa pri dôkaze nasledujúceho tvrdenia.

[4] Presnejšie povedané: krivky používané v komplexnej analýze sú často zložené z úsečiek, kruhových oblúkov a podobných „elementárnych" kriviek, pre ktoré je známa nejaká ich „obvyklá" parametrizácia (pre úsečky a kruhové oblúky je to parametrizácia z príkladu P3.5). Podľa nasledujúceho tvrdenia o reparametrizácii môžeme intervaly parametrov bezo zmeny hodnoty integrálu prinajmenšom škálovať a posúvať, prípadne vykonávať ďalšie transformácie v súlade s technickými podmienkami tvrdenia. Ak teda niekedy budeme hovoriť o integrále pozdĺž krivky bez explicitne danej parametrizácie, budeme mať na mysli niektorú z jej „obvyklých" parametrizácií, ktorá prípadne môže byť „povoleným spôsobom" transformovaná.

[5] V krajných bodoch intervalu stačí existencia jednostrannej derivácie.

Tvrdenie P3.21 (O reparametrizácii)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$ a $\hat{\gamma}$ je reparametrizácia krivky γ taká, že $\hat{\gamma}^* \subseteq S$. Potom $\hat{\gamma}$ je po častiach hladká a platí*

$$\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Vďaka tvrdeniu P3.17(*ii*) stačí uvažovať prípad, keď je krivka γ hladká. Nech $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ a $\varphi\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ je rastúca spojite diferencovateľná funkcia taká, že $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Keďže sú obidve funkcie γ, φ spojite diferencovateľné, je podľa vety P1.25 na intervale $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ spojite diferencovateľná aj funkcia $\hat{\gamma}$, ktorá teda je – ak ju chápeme ako krivku – hladká. Platí pritom

$$\hat{\gamma}' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Zisťujeme teda, že

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} f(\hat{\gamma}(t))\hat{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Poznámka P3.22. V dôkazoch predošlých tvrdení sme po tichu použili metódu substitúcie pre určité integrály reálnych funkcií komplexnej premennej; dôkaz, že táto metóda skutočne funguje, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

Viacero vlastností krivkových integrálov vyplýva priamo z vlastností určitých integrálov reálnych funkcií (napríklad Riemannovho integrálu). Tieto vlastnosti budeme zvyčajne používať voľne – na ukážku uvedieme len dôkaz tvrdenia o linearite krivkových integrálov.

Tvrdenie P3.23 (Linearita krivkových integrálov)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú spojité funkcie, $a, b \in \mathbb{C}$ a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))\,\mathrm{d}z = a\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Funkcia $af(z) + bg(z)$ je očividne tiež spojitá, takže znenie tvrdenia dáva zmysel. Z definície krivkového integrálu ďalej

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} (af + bg)(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} (af + bg)(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \big(af(\gamma(t))\gamma'(t) + bg(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \\ &= a\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + b\int_{\alpha}^{\beta} g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= a\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Veta o odhade

Nasledujúca veta je užitočná napríklad v prípadoch, keď je integrál ťažké vypočítať presne alebo jednoducho v prípadoch, keď nás zaujíma najmä absolútna hodnota integrálu.

Veta P3.24. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \int_\alpha^\beta \left| f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t.$$

Ak navyše existuje $M \ge 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $|f(z)| \le M$, tak

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le M \cdot L(\gamma),$$

kde $L(\gamma)$ označuje dĺžku krivky γ *definovanú ako*

$$L(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Z definície krivkového integrálu

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Dokážeme, že platí

$$\left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_\alpha^\beta \left| f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Skutočne: nech $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = re^{i\theta}$ pre nejaké $r \ge 0$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Potom

$$\begin{aligned} r &= \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re} \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) \right) \,\mathrm{d}t \le \int_\alpha^\beta \left| e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \left| f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Keďže ale tiež zrejme

$$r = \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right|,$$

je nerovnosť (1) a tým aj prvá časť tvrdenia dokázaná. Ďalej platí

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \left| f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))| \cdot \left| \gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t \le \\ &\le \int_\alpha^\beta M \left| \gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t = M \int_\alpha^\beta \left| \gamma'(t) \right| \,\mathrm{d}t = M \cdot L(\gamma), \end{aligned}$$

čo dokazuje aj druhú časť tvrdenia. □

Poznámka P3.25. Pojem *dĺžky po častiach hladkej krivky* zo znenia predchádzajúcej vety súhlasí s jeho bežnou definíciou v reálnej analýze – ak totiž pre $t \in [\alpha, \beta]$ označíme $x(t) := \mathrm{Re}\,\gamma(t)$ a $y(t) := \mathrm{Im}\,\gamma(t)$, tak

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left| (\mathrm{Re}\,\gamma)'(t) + i(\mathrm{Im}\,\gamma)'(t) \right| \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \left| x'(t) + iy'(t) \right| \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ak navyše $x(t) = t$ a $y(t) = f(t)$, dostávame vzorec

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z uvedených skutočností vyplýva, že dĺžka „bežných“ kriviek – akými sú napríklad úsečky alebo kruhové oblúky – má skutočne vždy hodnotu, akú by sme očakávali.

„Základná veta o krivkových integráloch“

Primitívne funkcie možno pre funkcie komplexnej premennej definovať podobným spôsobom ako v reálnej analýze.

Definícia P3.26. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Hovoríme, že funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ je *primitívnou funkciou* k funkcii f na oblasti S, ak je funkcia F na množine S holomorfná, pričom pre všetky $z \in S$ platí $F'(z) = f(z)$.

Dokážeme teraz tvrdenie o vzťahu krivkových integrálov a primitívnych funkcií, ktoré je obdobou základnej vety diferenciálneho a integrálneho počtu pre funkcie komplexnej premennej. Preto sa tiež niekedy nazýva „základnou vetou o krivkových integráloch“ – toto pomenovanie je však relatívne zavádzajúce, keďže nasledujúca veta nedosahuje význam Cauchyho integrálnej vety, ktorú dokážeme nabudúce a ktorá je skutočným základným kameňom komplexnej analýzy.

Veta P3.27. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia, ku ktorej na S existuje primitívna funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

Pre uzavretú po častiach hladkú krivku γ teda platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Nech sú predpoklady vety splnené. Predpokladajme najprv, že je krivka γ hladká. Keďže je funkcia F holomorfná na oblasti $S \supseteq \gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$ a funkcia γ je na intervale $[\alpha, \beta]$ diferencovateľná, je – podľa vety o derivácii zloženej funkcie – funkcia $F \circ \gamma$ diferencovateľná na $[\alpha, \beta]$ a pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t);$$

táto derivácia je navyše na $[\alpha, \beta]$ spojitá, pretože sú spojité funkcie γ, γ' a $F' = f$. Zisťujeme teda, že

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}(F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= [\mathrm{Re}(F \circ \gamma)(t)]_{t=\alpha}^\beta + i\,[\mathrm{Im}(F \circ \gamma)(t)]_{t=\alpha}^\beta = \\
&= (\mathrm{Re}\,F(\gamma(\beta)) - \mathrm{Re}\,F(\gamma(\alpha))) + (\mathrm{Im}\,F(\gamma(\beta)) - \mathrm{Im}\,F(\gamma(\alpha))) = \\
&= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).
\end{aligned}$$

Pre po častiach hladkú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ existuje kladné prirodzené číslo n a hladké krivky $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}, \ldots, \gamma_n\colon [\alpha_n, \beta_n] \to \mathbb{C}$ také, že

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n.$$

Špeciálne teda $\gamma(\alpha) = \gamma_1(\alpha_1)$, $\gamma(\beta) = \gamma_n(\beta_n)$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ platí $\gamma_k(\beta_k) = \gamma_{k+1}(\alpha_{k+1})$. Z dôsledku P3.18 a z vyššie dokázaného tvrdenia pre hladké krivky potom dostávame

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \left(F(\gamma(\beta_k)) - F(\gamma(\alpha_k))\right) = \\
&= F(\gamma(\beta_n)) - F(\gamma(\alpha_1)) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(F(\gamma(\beta_k)) - F(\gamma(\alpha_{k+1}))\right) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)),
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Z uvedenej „základnej vety o krivkových integráloch“ vyplýva, že pokiaľ k spojitej funkcii f existuje na oblasti S primitívna funkcia, závisia krivkové integrály tejto funkcie iba na počiatočnom a koncovom bode integračnej krivky. Táto nezávislosť integrálu od integračnej krivky je dokonca existencii primitívnej funkcie ekvivalentná, ako ukazuje nasledujúca veta.

Veta P3.28. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *K funkcii f existuje na množine S primitívna funkcia.*

(*ii*) *Pre všetky dvojice po častiach hladkých kriviek $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ takých, že $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ a $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_2)$ platí*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(*iii*) *Pre všetky uzavreté po častiach hladké krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ také, že $\gamma^* \subseteq S$ platí*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

V prípade platnosti týchto ekvivalentných tvrdení navyše môže byť primitívna funkcia k f na S daná pre všetky $z \in S$ predpisom

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka spĺňajúca $\gamma^* \subseteq S$ s pevným počiatočným bodom z_0 nezávislým od z a s koncovým bodom z.

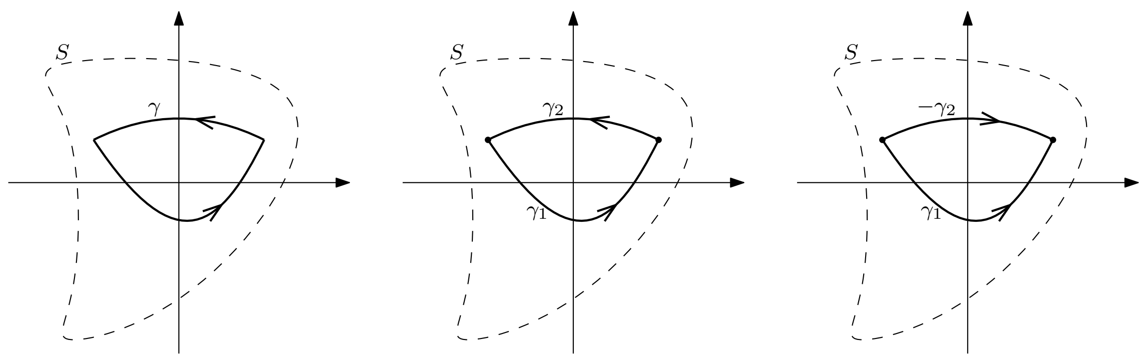
Dôkaz. Implikácia „$(i) \Rightarrow (ii)$“ je bezprostredným dôsledkom vety P3.27. Dokážeme implikáciu „$(ii) \Rightarrow (iii)$“. Nech platí (ii) a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavretá po častiach hladká krivka. Zvoľme bod $\mu \in [\alpha, \beta]$ ľubovoľne a označme $\gamma_1 := \gamma \restriction [\alpha, \mu]$ a $\gamma_2 := \gamma \restriction [\mu, \beta]$ (obrázok P3.5). Potom γ_1 a $-\gamma_2$ sú krivky spĺňajúce podmienky tvrdenia (ii), a teda

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Keďže $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, z tvrdenia P3.17 vyplýva

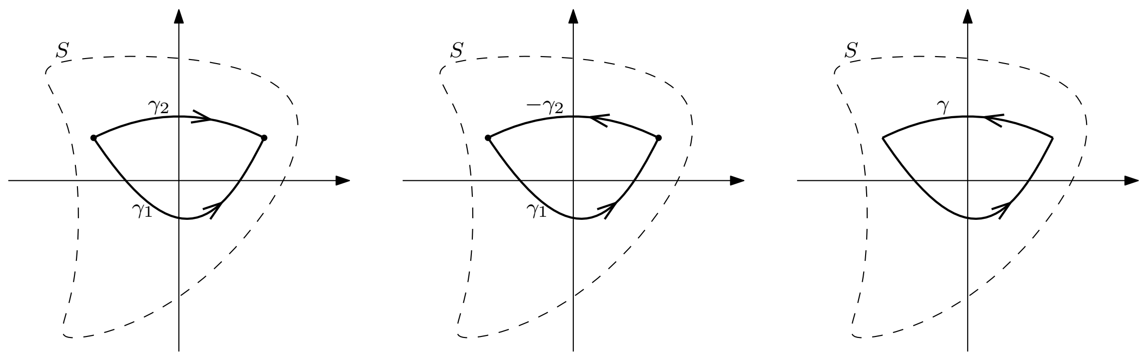
$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

čím je implikácia dokázaná.



(a) Uzavretá krivka γ. **(b)** Rozdelenie krivky γ na dve. **(c)** Výsledná dvojica kriviek.

Obr. P3.5: Situácia z dôkazu implikácie „$(ii) \Rightarrow (iii)$“.



(a) Krivky γ_1 a γ_2. **(b)** Zmena orientácie krivky γ_2. **(c)** Výsledná uzavretá krivka.

Obr. P3.6: Situácia z dôkazu implikácie „$(iii) \Rightarrow (ii)$“.

Opačnú implikáciu „$(iii) \Rightarrow (ii)$“ dokážeme podobne. Nech platí (iii) a $\gamma_1 \colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 \colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ sú dve po častiach hladké krivky, pre ktoré platí $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ a $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_2)$. Položme $\gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$ (obrázok P3.6). Z platnosti (iii) a z tvrdenia P3.17 potom

$$0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

z čoho už priamo dostávame

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Zostáva dokázať implikáciu „$(ii) \Rightarrow (i)$“. Predpokladajme, že platí tvrdenie (ii), zvoľme pevné $z_0 \in S$ a definujme funkciu $F \colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ predpisom

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s počiatočným bodom z_0 a koncovým bodom z spĺňajúca $\gamma^* \subseteq S$. Dokážeme, že funkcia F je na S holomorfná, pričom pre všetky $z \in S$ platí $F'(z) = f(z)$. Zvoľme pevne $z \in S$. Z predpokladu platnosti (ii) a tvrdenia P3.17 vyplýva, že pre všetky $h \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $z + h \in S$ platí

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma(h)} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde $\gamma(h)$ je nejaká krivka s počiatočným bodom z a koncovým bodom $z+h$ spĺňajúca $\gamma(h)^* \subseteq S$. Pre túto krivku tiež vďaka (ii) platí

$$\int_{\gamma(h)} \mathrm{d}w = \int_{[z,z+h]} \mathrm{d}w = \int_0^1 h\,\mathrm{d}t = h.$$

Preto

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma(h)} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{\gamma(h)} \mathrm{d}w\right) = \frac{1}{h}\int_{\gamma(h)} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w. \quad (2)$$

Zo spojitosti funkcie f v bode z vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ kedykoľvek $|w - z| < \delta$. Z (ii) a z vety P3.24 potom pre h spĺňajúce $|h| < \delta$ vyplýva

$$\left|\int_{\gamma(h)} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w\right| < \varepsilon|h|,$$

z čoho dosadením do (2) pre takéto h dostávame

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{\varepsilon|h|}{|h|} = \varepsilon,$$

v dôsledku čoho

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

Funkcia F je teda skutočne v bode z diferencovateľná a platí $F'(z) = f(z)$, čo bolo treba dokázať. $\square$

Poznámka P3.29. V situáciách, keď sú pre oblasť S splnené ekvivalentné podmienky z predchádzajúcej vety, sa niekedy používa notácia

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s $\gamma^* \subseteq S$, počiatočným bodom a a koncovým bodom b. My túto notáciu – najmä kvôli hroziacej zámene s integrálom funkcie reálnej premennej – používať nebudeme.

Poznámka P3.30. Na budúcej prednáške dokážeme jednu z najdôležitejších viet komplexnej analýzy – tzv. *Cauchyho integrálnu vetu.* Tú možno interpretovať ako vetu hovoriacu o ľahko overiteľnej *postačujúcej* podmienke platnosti ekvivalentných tvrdení z vety P3.28; pôjde tak vlastne o akúsi „praktickú verziu“ tejto vety.

Literatúra

[1] Brown, J. W.; Churchill, R. V.: *Complex Variables and Applications 8th ed.* Boston: McGraw-Hill, 2009.

[2] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.