Prednáška č. 4: Cauchyho integrálna veta

Peter Kostolányi

14. októbra 2019

Minulú prednášku sme zakončili dôkazom „základnej vety o krivkových integráloch“, podľa ktorej rovnosť

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{1}$$

platí pre všetky uzavreté po častiach hladké krivky γ v oblasti S práve vtedy, keď k funkcii f existuje na S primitívna funkcia. Tieto podmienky sú tiež ekvivalentné nezávislosti integrálov funkcie f od konkrétnej krivky pod S spájajúcej ľubovoľné dva pevne dané body v S.

Prísť s dôkazom existencie primitívnej funkcie nemusí byť vždy úplne jednoduché. Dnes preto dokážeme *Cauchyho integrálnu vetu* (pre jednoducho súvislú oblasť), ktorá poskytne postačujúcu podmienku platnosti uvedených troch ekvivalentných tvrdení – umožní usúdiť na platnosť (1) pre všetky uzavreté krivky v oblasti S iba na základe holomorfnosti funkcie f na S a „veľmi jednoduchej“ topologickej vlastnosti oblasti S. V praxi teda na overenie (1) zvyčajne stačí dokázať holomorfnosť funkcie f, čo je typicky omnoho jednoduchšie, než priamy dôkaz existencie primitívnej funkcie.

K „ozajstnej“ Cauchyho integrálnej vete – čiže k jej verzii pre jednoducho súvislú oblasť – sa ale budeme dopracúvať postupne. Dokážeme najprv dve slabšie verzie Cauchyho integrálnej vety, ktoré majú charakter viac-menej pomocných výsledkov: Cauchyho integrálnu vetu pre trojuholník a Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť. Následne s pomocou topologického pojmu homotópie prejdeme od konvexných oblastí k ľubovoľným jednoducho súvislým oblastiam (intuitívne oblastiam „bez dier“). Neskôr cez semester dokážeme ešte jeden variant Cauchyho integrálnej vety; verzia pre jednoducho súvislú oblasť však bude plne postačujúca pre všetky praktické účely.

Cauchyho integrálna veta pre trojuholník

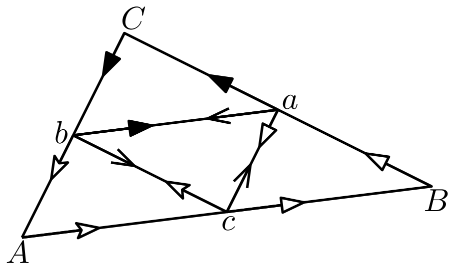
Pod *trojuholníkom* budeme chápať, v súlade so zdravým rozumom, ľubovoľnú uzavretú krivku γ v tvare (hoci aj degenerovaného) trojuholníka: teda krivku $\gamma = \triangle ABC := [A,B]+[B,C]+[C,A]$, kde $A,B,C \in \mathbb{C}$. *Uzavretou trojuholníkovou oblasťou* nazveme uzavretú oblasť, ktorá vznikne zjednotením obrazu a vnútra nejakého trojuholníka (zjavne súčasne ide aj o uzáver vnútra daného trojuholníka).

Veta P4.1 (Cauchyho integrálna veta pre trojuholník)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť obsahujúca trojuholník γ a celé jeho vnútro. Nech $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Myšlienka dôkazu bude spočívať v nahradení trojuholníka γ nejakým menším trojuholníkom γ_N takým, že hodnota integrálu funkcie f pozdĺž γ_N je oproti hodnote pôvodného integrálu „nezanedbateľná“ a súčasne je na tomto trojuholníku funkcia f dobre aproximovateľná nejakou vhodnou lineárnou funkciou. Keďže pre lineárne funkcie existuje primitívna funkcia na celom $\mathbb{C}$, bude integrál aproximujúcej lineárnej funkcie pozdĺž γ_N nulový vďaka „základnej vete o krivkových integráloch“. Integrál pôvodnej funkcie f pozdĺž γ_N tak bude mať hodnotu blízku nule, pričom táto blízkosť je úmerná kvalite aproximácie. Keďže je však hodnota tohto integrálu oproti pôvodnému integrálu „nezanedbateľná“, budeme môcť aj hodnotu pôvodného integrálu zhora odhadnúť stále menším a menším číslom, úmerne kvalite aproximácie, čím dokážeme jeho nulovosť.

Presnejšie: pre degenerovaný trojuholník γ je tvrdenie zrejmé. Predpokladajme teda, že trojuholník γ je nedegenerovaný a položme $\gamma_0 := \gamma$. Predpokladajme ďalej, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ máme daný trojuholník $\gamma_n = \triangle ABC$, kde $A,B,C \in \mathbb{C}$ sú tri nekolineárne body. Označme stredy úsečiek $[A,B]$, $[B,C]$ a $[C,A]$ ako c, a, resp. b. Uvažujme trojuholníky $\gamma_{n+1}[0] := \triangle abc$, $\gamma_{n+1}[1] := \triangle Acb$, $\gamma_{n+1}[2] := \triangle Bac$ a $\gamma_{n+1}[3] := \triangle Cba$. Táto situácia je znázornená na obrázku P4.1.



Obr. P4.1: Rozdelenie trojuholníka $\triangle ABC$ na štyri menšie trojuholníky.

Keďže sa strany „vnútorného“ trojuholníka $\gamma_{n+1}[0]$ „vybijú“, platí

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{3} \int_{\gamma_{n+1}[k]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nutne potom musí existovať $k \in \{0,1,2,3\}$ také, že

$$\left|\int_{\gamma_{n+1}[k]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|;$$

trojuholník $\gamma_{n+1}[k]$ potom označme symbolom γ_{n+1}.

Takto dostávame postupnosť trojuholníkov $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Platí $\gamma_0 = \gamma$.

2. Označme pre všetky $n \in \mathbb{N}$ symbolom Δ_n uzavretú trojuholníkovú oblasť s hranicou γ_n (čiže uzáver vnútra trojuholníka γ_n). Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$.

3. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $L(\gamma_n) = 2^{-n} L(\gamma)$.

4. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq 4^{-n}\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \tag{2}$$

Zvoľme teraz ľubovoľný bod $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$.[1] Funkcia f je v bode z_0 diferencovateľná – pre všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(z_0, \delta)$ platí

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

z čoho

$$\left|f(z) - (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))\right| < \varepsilon\,|z - z_0|\,. \tag{3}$$

Ak teraz zvolíme $N \in \mathbb{N}$ také, že $\Delta_N \subseteq D(z_0, \delta)$, pre všetky $z \in \Delta_N$ zrejme

$$|z - z_0| \leq L(\gamma_N) = 2^{-N} L(\gamma)$$

a z (3) tak dostávame

$$\left|f(z) - \bigl(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\bigr)\right| < \varepsilon 2^{-N} L(\gamma).$$

Zo „základnej vety o krivkových integráloch“ navyše

$$\int_{\gamma_N} \bigl(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\bigr)\,\mathrm{d}z = 0.$$

[1] Ak napríklad pre každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme bod $w_n \in \Delta_n$, je postupnosť $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ ohraničená a podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety z nej tak možno vybrať konvergentnú podpostupnosť. Keďže Δ_n je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ uzavretá oblasť a $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$, musí limita tejto podpostupnosti patriť do všetkých oblastí Δ_n súčasne. Túto limitu môžeme vziať za naše z_0.

Ak teda na integrál funkcie f pozdĺž γ_N použijeme vetu o odhade, zisťujeme, že

$$\left|\int_{\gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\gamma_N} \big(f(z) - \big(f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\big)\big)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_N} \big(f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\big)\,\mathrm{d}z\right| =$$
$$= \left|\int_{\gamma_N} \big(f(z) - \big(f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\big)\big)\right| \leq \varepsilon 2^{-N} L(\gamma) L(\gamma_N) = \varepsilon 4^{-N} L(\gamma)^2.$$

Podľa (2) teda

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^N \left|\int_{\gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \varepsilon L(\gamma)^2;$$

keďže je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, nutne

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

a Cauchyho integrálna veta pre trojuholník je dokázaná. □

Cauchyho integrálna veta pre konvexnú oblasť

Rozšírime teraz Cauchyho integrálnu vetu na prípad ľubovoľnej uzavretej po častiach hladkej krivky obsiahnutej v nejakej *konvexnej* oblasti S. Konvexné oblasti sú pritom definované bežným spôsobom.

Definícia P4.2. Oblasť $S \subseteq \mathbb{C}$ je *konvexná*, ak pre všetky $u, v \in S$ platí $[u,v] \subseteq S$.

Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť dokážeme tak, že nahliadneme existenciu primitívnej funkcie pre všetky holomorfné funkcie na takejto oblasti. Tu využijeme Cauchyho integrálnu vetu pre trojuholník a podobné techniky ako v dôkaze vety P3.28.

Lema P4.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia taká, že pre ľubovoľný trojuholník γ s $\gamma^* \subseteq S$ platí*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

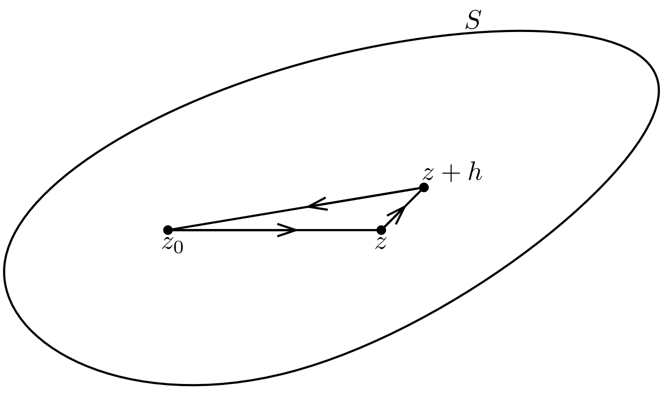
Pre ľubovoľné pevné $z_0 \in S$ je potom funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in S$ predpisom

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

holomorfná na S a platí $F' = f$.

Dôkaz. Zvoľme pevné $z \in S$. Ukážeme, že funkcia F je v bode z diferencovateľná a pre jej deriváciu platí $F'(z) = f(z)$.

Pre všetky $h \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $z + h \in S$ musí do konvexnej oblasti S patriť celý trojuholník $\gamma = \triangle z_0 z(z+h)$; táto situácia je znázornená na obrázku P4.2.



Obr. P4.2: Trojuholník $\gamma = \triangle z_0 z(z+h)$.

Z predpokladu lemy vyplýva

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0,$$

z čoho

$$\int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

a teda

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Preto

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left(\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{[z,z+h]} \mathrm{d}w\right) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \left(f(w)-f(z)\right)\,\mathrm{d}w.$$

Zo spojitosti funkcie f v bode z ale vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\delta)$ platí $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Pre h s $|h| < \delta$ teda z vety o odhade dostávame

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \left(f(w)-f(z)\right)\,\mathrm{d}w\right| < \frac{\varepsilon|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Preto

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

a funkcia F má v bode z skutočne deriváciu $f(z)$. □

Dôsledok P4.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom existuje funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná na S taká, že $F' = f$.*

Dôkaz. Z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník vyplýva, že pre každú funkciu f holomorfnú na S sú splnené predpoklady lemy P4.3. □

Môžeme teraz sformulovať samotnú Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť – stále však pôjde o výsledok viac-menej predbežný.

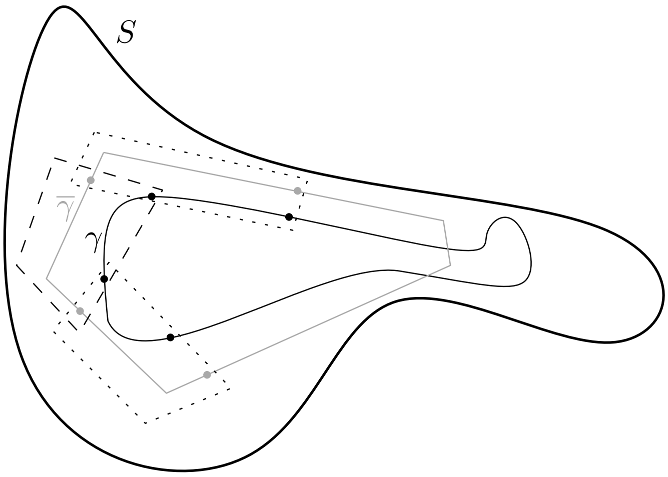
Veta P4.5 (Cauchyho integrálna veta pre konvexnú oblasť)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre každú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq S$ platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z dôsledku P4.4 a zo „základnej vety o krivkových integráloch“. □

Homotópie

Možnosti aplikácie Cauchyho integrálnej vety pre konvexné oblasti sú trochu obmedzené – často totiž vzniká potreba integrovať funkciu podľa krivky v oblasti, ktorá konvexná nie je. Rozšíriť Cauchyho integrálnu vetu na prípad iných ako konvexných oblastí ale budeme môcť až po tom, čo preskúmame deformácie kriviek a zavedieme (pôvodne topologický) koncept *homotópie.* Na tomto mieste ale homotópie nedefinujeme bežným topologickým spôsobom – namiesto toho budeme spoločne s [1] za definíciu homotópie považovať jej ekvivalentnú charakterizáciu pomocou takzvaných *elementárnych deformácií*, ktorá je síce o niečo menej intuitívna, ale zato sa dá priamo použiť pri dôkaze Cauchyho integrálnej vety. S obvyklou topologickou definíciou homotópie, ako aj s ďalšími aspektmi tohto konceptu, sa oboznámime na nasledujúcom cvičení.



Obr. P4.3: Elementárna deformácia krivky γ na krivku $\overline{\gamma}$ (znázornené sú len tri konvexné podoblasti).

Definícia P4.6. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \overline{\gamma}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky také, že $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že krivka $\overline{\gamma}$ vznikne z γ *elementárnou deformáciou* (uzavretých kriviek[2]) v S, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ a po častiach hladké krivky $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \overline{\gamma}_0, \ldots, \overline{\gamma}_{n-1}$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

(*i*) Pre $k = 0, \ldots, n-1$ existuje *konvexná* oblasť $S_k \subseteq S$ taká, že $\gamma_k^*, \overline{\gamma}_k^* \subseteq S_k$.

(*ii*) Platí $\gamma = \gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1}$ a $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_0 + \ldots + \overline{\gamma}_{n-1}$.

Krivka $\overline{\gamma}$ teda vznikne z krivky γ elementárnou deformáciou v S, ak vieme nájsť „reťaz“ konvexných podoblastí S takých, že obidve krivky γ a $\overline{\gamma}$ postupne prechádzajú cez tieto konvexné podoblasti a sú nimi úplne pokryté. To je znázornené na obrázku P4.3.

Poznámka P4.7. V praxi nám zvyčajne nezáleží na počiatočno-koncovom bode $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ uzavretej krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a podmienku (*ii*) predchádzajúcej definície tak v konečnom dôsledku nahrádzame podmienkou $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1} \in \mathrm{Rot}(\gamma)$ a $\overline{\gamma}_0 + \ldots + \overline{\gamma}_{n-1} \in \mathrm{Rot}(\overline{\gamma})$, kde pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je $\mathrm{Rot}(\gamma) = \{(\gamma \restriction [\mu, \beta]) + (\gamma \restriction [\alpha, \mu]) \mid \mu \in [\alpha, \beta]\}$. Integrály pozdĺž kriviek v $\mathrm{Rot}(\gamma)$ ale majú očividne rovnakú hodnotu ako integrál pozdĺž γ; nedopúšťame sa teda žiadnej chyby.

Definícia P4.8. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \overline{\gamma}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky s $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že krivky γ a $\overline{\gamma}$ sú *homotopické* v S (ako uzavreté krivky), ak $\overline{\gamma}$ vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií.

Tvrdenie P4.9. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Relácia „byť homotopický v S“ je reláciou ekvivalencie na množine všetkých uzavretých po častiach hladkých kriviek s obrazmi pod S.*

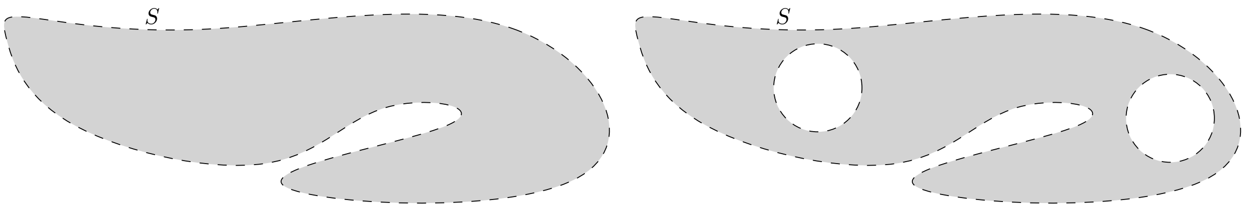
Dôkaz. Zrejmé. □

Môžeme teraz zaviesť kľúčový pojem *jednoducho súvislej oblasti*. Intuitívne by malo byť zrejmé, že jednoduchá uzavretá krivka γ v oblasti S je homotopická s nejakým bodom a (ktorý chápeme ako krivku $\gamma_a\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ takú, že $\gamma_a(t) = a$ pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$) práve vtedy, keď „vnútro krivky γ celé leží v S“ – zatiaľ pritom nechajme bokom fakt, že už samotný pojem „vnútra krivky“ je viac ako problematický. Homotopickosť každej (nie nutne jednoduchej) uzavretej krivky v oblasti S s nejakým bodom v S teda vyjadruje intuitívnu skutočnosť, že oblasť S „nemá diery“. Práve takéto oblasti nazveme *jednoducho súvislými*.

Definícia P4.10. Oblasť $S \subseteq \mathbb{C}$ je *jednoducho súvislá*, ak je každá uzavretá po častiach hladká krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$ (chápaným ako uzavretá krivka).

Na obrázku P4.4 sú znázornené dva typické príklady oblastí – prvá z nich je a druhá nie je jednoducho súvislá.

[2]Existuje aj trochu iná definícia elementárnej deformácie pre dvojicu nie nutne uzavretých kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi. Viac na ďalšom cvičení.



(a) Jednoducho súvislá oblasť. **(b)** Oblasť, ktorá nie je jednoducho súvislá.

Obr. P4.4: Ilustrácia pojmu jednoduchej súvislosti.

Príklad P4.11. Každá konvexná oblasť je očividne jednoducho súvislá. Na druhej strane napríklad žiadne medzikružie nie je jednoducho súvislé – to ale vyplynie až z Cauchyho vety pre jednoducho súvislú oblasť, ktorú onedlho dokážeme (napríklad integrál funkcie $1/(z-a)$ pozdĺž ľubovoľnej kladne orientovanej kružnice v danom medzikruží, kde a je stred tohto medzikružia, má hodnotu $2\pi i$; funkcia $1/(z-a)$ je ale na medzikruží holomorfná).

Veta o deformácii

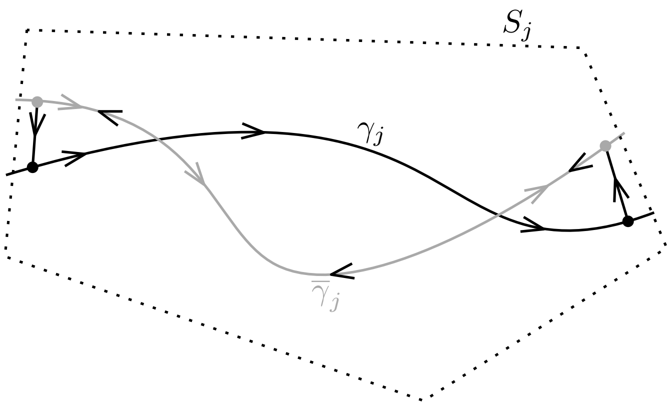
Význam homotópií je daný predovšetkým nasledujúcou vetou, podľa ktorej majú integrály pozdĺž homotopických kriviek rovnaké hodnoty.

Veta P4.12 (O deformácii)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $\gamma, \overline{\gamma}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky spĺňajúce $\gamma^*, \overline{\gamma}^* \subseteq S$ a navzájom homotopické v S. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Tvrdenie stačí dokázať pre prípad, keď $\overline{\gamma}$ vznikne z γ elementárnou deformáciou. Nech teda $S_0, \ldots, S_{n-1} \subseteq S$ sú konvexné oblasti a $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \overline{\gamma}_0, \ldots, \overline{\gamma}_{n-1}$ sú po častiach hladké krivky také, že pre $k = 0, \ldots, n-1$ platí $\gamma_k^*, \overline{\gamma}_k^* \subseteq S_k$, pričom $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1} = \gamma$ a $\overline{\gamma}_0 + \ldots + \overline{\gamma}_{n-1} = \overline{\gamma}$.

Zvoľme teraz pevné $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ a predpokladajme, že γ_j je zobrazenie $\gamma_j\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a $\overline{\gamma}_j$ je zobrazenie $\overline{\gamma}_j\colon [\overline{\alpha}, \overline{\beta}] \to \mathbb{C}$. Uvažujme krivku $\hat{\gamma}_j := \gamma_j + [\gamma_j(\beta), \overline{\gamma}_j(\overline{\beta})] + (-\overline{\gamma}_j) + [\overline{\gamma}_j(\overline{\alpha}), \gamma_j(\alpha)]$, znázornenú na obrázku P4.5. Z Cauchyho integrálnej vety pre konvexnú oblasť potom



Obr. P4.5: Krivka $\hat{\gamma}_j = \gamma_j + [\gamma_j(\beta), \overline{\gamma}_j(\overline{\beta})] + (-\overline{\gamma}_j) + [\overline{\gamma}_j(\overline{\alpha}), \gamma_j(\alpha)]$ (pozdĺž čiernych šípok).

$$\int_{\hat{\gamma}_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Súčasne ale pre $k = 0, \ldots, n-1$ platí $[\gamma_k(\beta), \overline{\gamma}_k(\overline{\beta})] = -[\overline{\gamma}_{k+1}(\alpha), \gamma_{k+1}(\alpha)]$ (kde $k+1$ je modulo n), z čoho

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\overline{\gamma}_k} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\hat{\gamma}_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Platí teda

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

čo bolo treba dokázať. □

Cauchyho integrálna veta pre jednoducho súvislú oblasť

Rozšírenie Cauchyho integrálnej vety na ľubovoľnú jednoducho súvislú oblasť je už v tomto momente triviálnou záležitosťou. Namiesto o Cauchyho integrálnej vete pre jednoducho súvislú oblasť budeme neskôr väčšinou hovoriť len o *Cauchyho integrálnej vete* – pôjde totiž o najvšeobecnejší variant tejto vety, ktorý dnes dokážeme.

Veta P4.13 (Cauchyho integrálna veta)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre každú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq S$ platí*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Keďže je oblasť S jednoducho súvislá, je krivka γ homotopická s nejakou degenerovanou krivkou $\overline{\gamma}$ takou, že $\overline{\gamma}^* = \{a\}$ pre nejaký bod $a \in \mathbb{C}$; ľahko vidieť, že takáto krivka $\overline{\gamma}$ má všade nulovú deriváciu, v dôsledku čoho je integrál ľubovoľnej spojitej funkcie pozdĺž nej nulový. Z vety o deformácii potom

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

čo bolo treba dokázať. □

Podľa vety P3.28 je nulovosť integrálov funkcie f pozdĺž všetkých uzavretých po častiach hladkých kriviek v danej oblasti ekvivalentná ďalším dvom podmienkam. Táto skutočnosť je natoľko dôležitá, že ju zdôrazníme explicitne.

Dôsledok P4.14. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom:*

a) Existuje funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná na S taká, že $F' = f$. Táto funkcia navyše môže byť pre ľubovoľné pevné $z_0 \in S$ daná pre všetky $z \in S$ ako

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s počiatočným bodom z_0 a koncovým bodom z taká, že $\gamma^* \subseteq S$.

b) Pre každú dvojicu po častiach hladkých kriviek γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ a zhodnými počiatočnými a koncovými bodmi platí

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z vety P4.13 a vety P3.28. □

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.