Prednáška č. 5: Cauchyho integrálne vzorce

Peter Kostolányi

21. októbra 2019

Cauchyho integrálny vzorec umožňuje vyjadriť hodnotu holomorfnej funkcie f v bode a prostredníctvom integrálu funkcie f pozdĺž krivky obkolesujúcej bod a. Ide pritom o jeden z najdôležitejších stavebných kameňov komplexnej analýzy s množstvom dôsledkov pre vlastnosti holomorfných funkcií.

Na tejto prednáške najprv sformulujeme a dokážeme samotný Cauchyho integrálny vzorec. Následne tento vzorec aplikujeme na dôkaz Liouvillovej vety, ktorej dôsledkom bude základná veta algebry: každý polynóm stupňa n s komplexnými koeficientmi má práve n komplexných koreňov. Ďalej dokážeme, že každá holomorfná funkcia má derivácie ľubovoľného rádu a odvodíme Cauchyho integrálne vzorce pre jednotlivé derivácie. V samotnom závere prednášky ukážeme, že každá holomorfná funkcia je analytická – čiže lokálne reprezentovateľná mocninovým radom; funkcia je teda holomorfná *práve vtedy, keď* je analytická. Uvidíme tiež, že takáto reprezentácia je daná jednoznačne Taylorovými radmi danej funkcie.

Funkcie v komplexnom obore teda majú o poznanie krajšie vlastnosti, než funkcie v reálnom obore. Diferencovateľnosť na $\mathbb{R}$, existencia derivácií ľubovoľného rádu na $\mathbb{R}$ a reprezentovateľnosť Taylorovým radom na $\mathbb{R}$ sú, ako je známe, tri odlišné vlastnosti. Naproti tomu v komplexnom obore všetky tieto vlastnosti splývajú do jediného robustného konceptu *holomorfnej* – alebo ekvivalentne *analytickej* – funkcie. Tento text čiastočne vychádza z [1].

Cauchyho integrálny vzorec

Cauchyho integrálny vzorec sformulujeme a dokážeme v troch jemne odlišných podobách. Najprv dokážeme „základnú verziu" tohto vzorca, kde krivka obkolesujúca bod a je kladne orientovaná kružnica so stredom v a – to bude naša veta P5.1. Využitím vlastností deformácií kriviek ľahko získame analogické tvrdenia aj pre iné typy uzavretých kriviek. S nástrojmi nezávislými od Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety pritom dospejeme k vete P5.2; s nástrojmi spoliehajúcimi sa na tieto nedokázané tvrdenia zas dospejeme k vete P5.3.

Je dôležité si uvedomiť, že nasledujúca veta požaduje holomorfnosť funkcie nielen na kružnici $\kappa(a,r)$, ale aj v jej vnútri.

Veta P5.1 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia I)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $r > 0$ je polomer taký, že $\overline{D}(a,r) \subseteq S$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Ak v dokazovanom vzorci nahradíme premennú $f(w)$ konštantou $f(a)$, zrejme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{f(a)}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{1}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a).$$

Funkcia f je v bode a holomorfná – pre všetky $\varepsilon > 0$ preto existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(a,\delta)$ platí

$$\left|\frac{f(w)-f(a)}{w-a}\right| \leq \left|f'(a)\right| + \varepsilon.$$

Pre $r < \delta$ tak z vety o odhade dostávame

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)-f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w\right| \leq \\ &\leq \frac{2\pi r}{2\pi}\left(\left|f'(a)\right| + \varepsilon\right) = r\left(\left|f'(a)\right| + \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Platí teda

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a). \tag{1}$$

Pre ľubovoľné $R > r > 0$ také, že $\overline{D}(a,R) \subseteq S$ sú ale kružnice $\kappa(a,R)$ a $\kappa(a,r)$ zjavne homotopické v $S \setminus \{a\}$, pričom funkcia $f(w)/(w-a)$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Z vety o deformácii preto vyplýva

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,R)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w$$

a vzťah (1) môže byť splnený len ak pre všetky $r > 0$ s $\overline{D}(a,r) \subseteq S$ platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a).$$

Tým je dôkaz vety dokončený. □

Z vety o deformácii vyplýva, že namiesto kružnice $\kappa(a,r)$ môžeme v Cauchyho integrálnom vzorci použiť ľubovoľnú uzavretú po častiach hladkú krivku γ homotopickú v oblasti $S \setminus \{a\}$ s nejakou takouto kružnicou – samozrejme ovšem za predpokladu, že funkcia f je holomorfná na S, pričom S obsahuje nielen obrazy oboch homotopických kriviek γ a $\kappa(a,r)$, ale aj celé vnútro kružnice $\kappa(a,r)$.

Veta P5.2 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S \setminus \{a\}$ je uzavretá po častiach hladká krivka homotopická v $S \setminus \{a\}$ s nejakou kružnicou $\kappa(a,r)$, kde $r > 0$ a $\overline{D}(a,r) \subseteq S$. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Z vety P5.1 za uvedených predpokladov dostávame

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Krivka γ je na $S \setminus \{a\}$ homotopická s $\kappa(a,r)$ a funkcia $f(w)/(w-a)$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$ – z vety o deformácii preto dostávame

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a),$$

čo bolo treba dokázať. □

Vďaka tvrdeniu C4.9 z minulého cvičenia môžeme sformulovať Cauchyho integrálny vzorec o niečo intuitívnejším spôsobom – jednoducho vezmeme ľubovoľnú kladne orientovanú jednoduchú uzavretú po častiach hladkú krivku obkolesujúcu bod a a budeme predpokladať, že f je holomorfná na oblasti obsahujúcej túto krivku a celé jej vnútro. Treba však upozorniť na skutočnosť, že už samotné znenie nasledujúcej vety skryto využíva Jordanovu vetu – len vďaka nej totiž máme definovanú množinu $\mathbf{I}(\gamma)$. Tvrdenie C4.9, ktoré využívame v jej dôkaze, navyše predpokladá platnosť Jordanovej-Schoenfliesovej vety. Ide tak rozhodne o najmenej triviálnu verziu Cauchyho integrálneho vzorca, a to napriek tomu, že formulácia nasledujúcej vety je oproti predchádzajúcej o poznanie intuitívnejšia.

Veta P5.3 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia III)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Stačí vziať $r > 0$ také, že $\kappa(a,r)^* \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ a odvolať sa na vetu P5.1 spolu s tvrdením C4.9. □

Liouvillova veta a základná veta algebry

Zaoberajme sa teraz na chvíľu funkciami, ktoré sú holomorfné na celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ – takéto funkcie nazývame *celými* (angl. *entire functions*).

Definícia P5.4. Funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je *celá*, ak je holomorfná na $\mathbb{C}$.

Typickými príkladmi celých funkcií sú napríklad polynomické funkcie, exponenciálna funkcia e^z a goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$. U funkcií $\sin z$ a $\cos z$ sme si na jednom z cvičení všimli, že na rozdiel od ich reálnych náprotivkov tieto funkcie nie sú ohraničené. Dokážeme teraz *Liouvillovu vetu*, podľa ktorej je táto vlastnosť spoločná všetkým nekonštantným celým funkciám.

Veta P5.5 (Liouvillova veta)**.** *Nech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je ohraničená celá funkcia. Potom je funkcia f na $\mathbb{C}$ konštantná.*

Dôkaz. Predpokladajme, že pre nejakú pevnú konštantu $M \geq 0$ a všetky $z \in \mathbb{C}$ platí $|f(z)| \leq M$. Nech $a, b \in \mathbb{C}$ sú ľubovoľné; ukážeme, že $f(a) = f(b)$.

Zvoľme $R > 0$ dostatočne veľké v porovnaní s $|a|$ aj s $|b|$ – napríklad $R \geq 2\max\{|a|, |b|\}$. Pre všetky $w \in \kappa(0,R)^*$ potom $|w-a| \geq \frac{1}{2}R$ aj $|w-b| \geq \frac{1}{2}R$. Z Cauchyho integrálneho vzorca teda dostávame

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(0,R)} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{f(w)}{w-b}\right) \mathrm{d}w = \frac{a-b}{2\pi i}\int_{\kappa(0,R)} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)}\,\mathrm{d}w.$$

Z vety o odhade preto

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{|a-b|}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{\frac{1}{4}R^2} = 4|a-b|\frac{M}{R}.$$

Keďže ale $R \geq 2\max\{|a|, |b|\}$ môže byť ľubovoľne veľké, musí platiť $|f(a) - f(b)| = 0$, a teda aj $f(a) = f(b)$; veta je dokázaná. □

Ako jednoduchý dôsledok Liouvillovej vety dostávame *základnú vetu algebry.* Tú sformulujeme ako tvrdenie hovoriace, že pre každú nekonštantnú polynomickú funkciu $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existuje $a \in \mathbb{C}$ také, že $p(a) = 0$. Ak je totiž $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomická funkcia a $\overline{p} \in \mathbb{C}[z]$ je zodpovedajúci polynóm, platí $p(a) = 0$ práve vtedy, keď $\overline{p} = (z-a)\overline{r}$ pre nejaký iný polynóm $\overline{r} \in \mathbb{C}[z]$.[1] Indukciou na stupeň polynómu $\overline{p}$ teda ľahko dokážeme, že polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ s komplexnými koeficientmi má práve n (nie nutne rôznych) komplexných koreňov, čo je obvyklá formulácia základnej vety algebry.

Veta P5.6 (Základná veta algebry)**.** *Nech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je nekonštantná polynomická funkcia. Potom existuje $a \in \mathbb{C}$ také, že $p(a) = 0$.*

Dôkaz. Predpokladajme za účelom sporu, že p je nekonštantná polynomická funkcia, ktorá je na $\mathbb{C}$ nenulová. Funkcia $1/p$ je potom celá. Táto funkcia je navyše aj ohraničená: keďže pre $|z| \to \infty$ máme $|p(z)| \to \infty$, musí existovať $R \geq 0$ také, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > R$ platí $|1/p(z)| \leq 1$. Množina $\overline{D}(0,R)$ je ale kompaktná a funkcia $1/p$ je na nej spojitá – z vety o spojitosti na kompakte preto dostávame existenciu $M \geq 0$ takého, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $|z| \leq R$ platí $|1/p(z)| \leq M$. V dôsledku toho pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \max\{1, M\}.$$

Funkcia $1/p$ je teda celá a súčasne ohraničená, čo znamená, že podľa Liouvillovej vety musí byť konštantná, a preto musí byť konštantná aj funkcia p: spor. □

[1] Implikácia sprava doľava je zrejmá. Opačná implikácia vyplýva z vety o delení polynómov so zvyškom, podľa ktorej existujú polynómy $\overline{r}, \overline{s} \in \mathbb{C}[z]$ také, že $\overline{p} = (z-a)\overline{r} + \overline{s}$ a stupeň polynómu $\overline{s}$ je ostro menší ako stupeň polynómu $z-a$. Polynóm $\overline{s}$ je teda konštantný a z rovnosti $p(a) = 0$ vyplýva, že aj $\overline{s}$ musí byť 0.

Cauchyho vzorce pre derivácie vyšších rádov

Dokážeme teraz, že každá holomorfná funkcia má v skutočnosti derivácie všetkých rádov. Navyše ukážeme, že z Cauchyho integrálneho vzorca

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je vhodná krivka obkolesujúca bod z, získame derivovaním integrandu podľa z vzorce pre jednotlivé derivácie – pre každé $n \in \mathbb{N}$ teda

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w. \tag{2}$$

Na dôkaz existencie derivácií ľubovoľného rádu nie je nutný integrálny vzorec pre všetky rády: stačí odvodiť integrálny vzorec pre prvú deriváciu a ukázať, že ním definovaná funkcia je holomorfná – existencia derivácií vyšších rádov už potom vyplynie z jednoduchej indukcie. Hoci je takýto prístup o niečo jednoduchší, v nasledujúcom sa neuspokojíme len s existenciou derivácií vyšších rádov, ale dokážeme aj samotný Cauchyho vzorec (2) pre derivácie vyšších rádov, ktorý je často neoceniteľným nástrojom.

Veta P5.7 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia I)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $r > 0$ je polomer taký, že $\overline{D}(a,r) \subseteq S$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Pre $n = 0$ ide o Cauchyho integrálny vzorec, ktorý už máme dokázaný. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre $n = k$; funkcia f je potom v bode a diferencovateľná k-krát a k-ta derivácia je daná integrálnym vzorcom zo znenia vety. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k+1$. Budeme pritom dokazovať, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(k)}(a+h) - f^{(k)}(a)}{h} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+2}}\,\mathrm{d}w,$$

pričom na dôkaz použijeme „základnú vetu o krivkových integráloch“.

Nech $w \in \kappa(a,r)^*$. Funkcia

$$F_w(\zeta) = \frac{1}{(w-\zeta)^{k+1}}$$

je na $D(a,r)$ očividne primitívnou funkciou k funkcii $(k+1)/(w-\zeta)^{k+2}$ (premennej ζ). Zo „základnej vety o krivkových integráloch“ teda pre všetky $u \in D(a,r)$ dostávame

$$F_w(u) = (k+1) \int_{[u_0,u]} \frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

kde $u_0 \in D(a,r)$ je ľubovoľný pevne zvolený bod. Podobne funkcia

$$G_w(\eta) = \frac{1}{(w-\eta)^{k+2}}$$

je na $D(a,r)$ primitívnou k funkcii $(k+2)/(w-\eta)^{k+3}$; pre $u \in D(a,r)$ teda

$$G_w(u) = (k+2) \int_{[u_0,u]} \frac{1}{(w-\eta)^{k+3}}\,\mathrm{d}\eta,$$

kde $u_0 \in D(a,r)$ je ľubovoľný pevne zvolený bod.

Nech teraz $h > 0$ je také, že $|h| < r$. Z indukčného predpokladu dostávame

$$\begin{aligned}\frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} &= \frac{k!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\frac{1}{(w-a-h)^{k+1}}-\frac{1}{(w-a)^{k+1}}\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{k!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(F_w(a+h)-F(a)\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w. \qquad (3)\end{aligned}$$

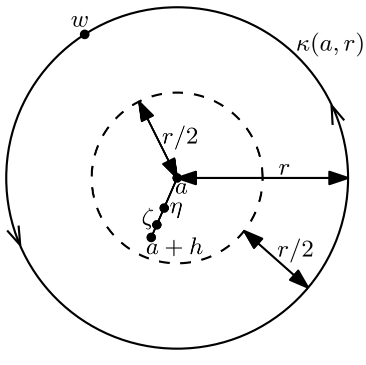
Označme

$$\Delta(h) := \frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+2}}\,\mathrm{d}w.$$

Stačí ukázať $\Delta(h)\to 0$ pre $h\to 0$. Avšak pre $|h|<r$ z (3) máme

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= \frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+2}}\,\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{h}{(w-a)^{k+2}}\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}-\frac{1}{(w-a)^{k+2}}\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(G_w(\zeta)-G_w(a)\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+2)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(\int_{[a,\zeta]}\frac{1}{(w-\eta)^{k+3}}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Keďže je množina $\kappa(a,r)^*$ kompaktná a funkcia f je na nej spojitá, existuje $M \geq 0$ také, že pre všetky $w \in \kappa(a,r)^*$ platí $|f(w)| \leq M$. Pre takéto w tiež $|w-a| = r$; ak teda vezmeme $|h| \leq r/2$, tak pre všetky $\zeta \in [a, a+h]$ platí $|\zeta - a| \leq r/2$ a v dôsledku toho pre všetky $\eta \in [a,\zeta]$ a všetky $w \in \kappa(a,r)^*$ platí $|w-\eta| \geq r/2$ – táto situácia je znázornená na obrázku P5.1.



Obr. P5.1: Poloha bodov a, $a+h$, w, ζ a η v rámci $\overline{D}(a,r)$.

Z vety o odhade teda dostávame

$$\begin{aligned}|\Delta(h)| &= \left|\frac{(k+2)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(\int_{[a,\zeta]}\frac{1}{(w-\eta)^{k+3}}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w\right| \leq \\ &\leq \frac{(k+2)!}{2|h|\pi}\cdot 2\pi r\cdot M\cdot|h|\cdot|h|\cdot\frac{1}{(r/2)^{k+3}} = \frac{2^{k+3}\cdot M\cdot|h|\cdot(k+2)!}{r^{k+2}}\end{aligned}$$

a pre $h\to 0$ skutočne $\Delta(h)\to 0$. Tým je dôkaz dokončený. $\square$

Podobne ako pre „základný“ Cauchyho integrálny vzorec teraz môžeme využiť deformácie kriviek na sformulovanie analogických viet pre o niečo všeobecnejšiu triedu kriviek obkolesujúcich a. Keďže sú ich dôkazy navlas rovnaké ako vyššie, obmedzíme sa na vyslovenie týchto viet. Opäť však platí, že kým prvá z nasledujúcich viet je nezávislá na Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vete, tá druhá ich platnosť predpokladá.

Veta P5.8 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka homotopická v $S \setminus \{a\}$ s nejakou kružnicou $\kappa(a,r)$, kde $r > 0$ a $\overline{D}(a,r) \subseteq S$. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Veta P5.9 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia III)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Ešte raz explicitne sformulujme už spomínaný dôsledok viet dokázaných vyššie: každá holomorfná funkcia má derivácie všetkých rádov.

Dôsledok P5.10. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ na S dobre definovaná n-tá derivácia funkcie f, ktorá je takisto holomorfná na S.*

Dôkaz. Pre každé $z \in S$ stačí aplikovať (napríklad) vetu P5.7 pre $r > 0$ také, že $\overline{D}(z,r) \subseteq S$. □

Postupnosti funkcií a rovnomerná konvergencia

Po zvyšok tejto prednášky budeme dokazovať, že holomorfné funkcie sú lokálne reprezentovateľné Taylorovými radmi – funkcia holomorfná v nejakom bode $a \in \mathbb{C}$ je teda v tomto bode aj analytická a holomorfnosť a analytickosť funkcie sú v skutočnosti totožné koncepty. Dôkazy týchto tvrdení vyžadujú integrovať nekonečné rady funkcií člen po člene, čo nie je vždy prípustné. Techniky umožňujúce takúto „zámenu integrálu s nekonečnou sumáciou“ v istých špeciálnych prípadoch odôvodniť sú založené na teórii rovnomernej konvergencie, ktorej základy teraz preskúmame.

Definícia P5.11. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazenie $f_n\colon S \to \mathbb{C}$. Hovoríme, že:

(*i*) Postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje *bodovo* k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$, ak pre všetky $z \in S$ a všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. V takom prípade píšeme $f_n \to f$ pre $n \to \infty$.

(*ii*) Postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje *rovnomerne* k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $z \in S$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. V takom prípade píšeme $f_n \rightrightarrows f$ pre $n \to \infty$.

Rozdiel teda spočíva v tom, že pri bodovej konvergencii n_0 závisí od z, kým pri rovnomernej konvergencii možno pre všetky z zvoliť jedno spoločné n_0.

Príklad P5.12. Ak postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ funkcií spojitých na S konverguje k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$ *bodovo*, funkcia f nemusí byť spojitá. Napríklad môžeme pre všetky $n \in \mathbb{N}$ definovať funkciu $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$f_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } |z| \geq 1/(n+1), \\ (n+1)|z| & \text{inak.} \end{cases}$$

Všetky funkcie f_n sú očividne spojité; ľahko ale vidieť, že pre $n \to \infty$ platí $f_n \to f$, kde $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } z \neq 0, \\ 0 & \text{ak } z = 0. \end{cases}$$

Táto funkcia nie je spojitá v bode nula.

Dokážeme teraz, že pokiaľ postupnosť spojitých funkcií konverguje k nejakej funkcii f *rovnomerne*, tak aj funkcia f je nutne spojitá.

Tvrdenie P5.13. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je funkcia $f_n\colon S \to \mathbb{C}$ spojitá na S. Ak pre nejakú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$ platí $f_n \rightrightarrows f$ pre $n \to \infty$, tak je funkcia f na S taktiež spojitá.*

Dôkaz. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a $z \in S$; potrebujeme nájsť $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\delta) \cap S$ platí $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Keďže $f_n \rightrightarrows f$, existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $w \in S$ platí $|f_m(w) - f(w)| < \varepsilon/3$. Funkcia f_m je spojitá v bode z, a teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\delta) \cap S$ platí $|f_m(z) - f_m(w)| < \varepsilon/3$. Pre $w \in D(z,\delta) \cap S$ ale potom

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= |f(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(w) + f_m(w) - f(w)| \leq \\ &\leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(w)| + |f_m(w) - f(w)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

čím je hľadané δ nájdené a tvrdenie dokázané. □

Definícia P5.14. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazenie $f_n\colon S \to \mathbb{C}$. Nech je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ funkcia $F_n\colon S \to \mathbb{C}$ daná ako $F_n := f_0 + \ldots + f_n$. Potom hovoríme, že:

(*i*) Rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje *bodovo* k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$, ak k funkcii f konverguje bodovo postupnosť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$.

(*ii*) Rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje *rovnomerne* k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$, ak k funkcii f konverguje rovnomerne postupnosť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$.

Veta P5.15 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazenie $f_n\colon S \to \mathbb{C}$. Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje $M_n \geq 0$ také, že pre všetky $z \in S$ platí $|f_n(z)| \leq M_n$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konverguje, tak rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na S konverguje rovnomerne.*

Dôkaz. Ak sú predpoklady vety splnené, pre každé pevné $z \in S$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(z)| \leq M_n$ a číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konverguje podľa porovnávacieho kritéria. V dôsledku toho rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje na S bodovo k nejakej funkcii $F\colon S \to \mathbb{C}$. Zostáva dokázať, že tento rad konverguje k F aj rovnomerne. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $F_n := f_0 + \ldots + f_n$. Pre každé $z \in S$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ potom

$$|F(z) - F_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Keďže rad $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konverguje, pre všetky $\varepsilon > 0$ musí existovať $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Pre $n \geq n_0$ potom aj $|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon$, pre všetky $z \in S$: rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne. □

Nasledujúca veta dáva rovnomernú konvergenciu do súvisu so zámenou krivkových integrálov s limitami a nekonečnými sumáciami. Pôjde o základný nástroj, ktorý využijeme pri dôkaze reprezentovateľnosti holomorfných funkcií Taylorovými radmi.

Veta P5.16. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je f_n spojitá funkcia $f_n\colon S \to \mathbb{C}$ a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom:*

(i) Ak pre nejakú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$ na S platí $f_n \rightrightarrows f$, tak

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na S, tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Stačí dokázať tvrdenie (i); tvrdenie (ii) je jeho bezprostredným dôsledkom. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Keďže $f_n \rightrightarrows f$, je funkcia f tiež spojitá a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $z \in S$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Pre $n \geq n_0$ teda z vety o odhade dostávame

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\varepsilon,$$

a teda skutočne

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tým je dôkaz vety dokončený. □

Taylorove rady

Máme teraz k dispozícii všetky ingrediencie potrebné na dôkaz vety o lokálnej reprezentácii holomorfných funkcií Taylorovými radmi.

Veta P5.17. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ je bod a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(a, R)$ pre nejaké $R > 0$. Potom existujú* jednoznačne dané *konštanty c_n pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ také, že pre všetky $z \in D(a, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{4}$$

(kde rad konverguje na $D(a, R)$). Konštanty c_n sú navyše pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dané vzťahom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

kde $0 < r < R$.[2] *Mocninový rad na pravej strane (4) potom nazývame* Taylorovým radom *funkcie f v bode a; v prípade $a = 0$ hovoríme o* Maclaurinovom rade.

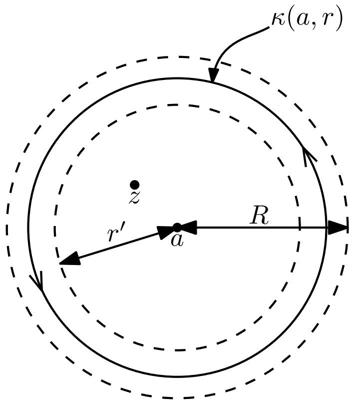
Dôkaz. Nech $z \in D(a, R)$ je dané. Zvoľme r tak, aby $|z - a| < r < R$; z Cauchyho vzorca pre derivácie vyplýva, že vetu stačí dokázať pre toto pevné r. Podľa Cauchyho integrálneho vzorca navyše

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w. \tag{5}$$

Nech teraz r' je reálne číslo také, že $|z - a| < r' < r$ a $T = \{w \in D(a, R) \mid r' < |w - a| < R\}$. Potom $\kappa(a, r)^* \subseteq T$ a pre všetky $w \in T$ platí

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}},$$

[2] Prípadne možno kružnicu $\kappa(a, r)$ nahradiť všeobecnejšou krivkou rovnako ako vo variantoch II a III Cauchyho vzorca pre derivácie.



Obr. P5.2: Situácia z dôkazu vety P5.17. Medzikružie ohraničené čiarkovanými kružnicami je oblasť T.

kde $|(z-a)/(w-a)| < 1$; teda

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}. \tag{6}$$

Pre každé reálne číslo s také, že $|(z-a)/(w-a)| < s < 1$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \leq \frac{1}{w-a} s^n$$

a z Weierstrassovho kritéria rovnomernej konvergencie vyplýva, že rad (6), chápaný ako rad funkcií premennej w, konverguje rovnomerne na T. Dosadením (6) do (5) a aplikovaním vety P5.16 teda zisťujeme, že

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

Zostáva dokázať jednoznačnosť postupnosti konštánt $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Tá ale vyplýva z vety P2.19 o deriváciách analytických funkcií: podľa nej totiž musí platiť $n! c_n = f^{(n)}(a)$, pričom n-té derivácie funkcie f sú dané jednoznačne. □

Dôsledok P5.18. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in \mathbb{C}$ je bod a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná v bode a. Potom je funkcia f analytická v bode a.*

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.