Prednáška č. 6: Veta o jednoznačnosti a Laurentove rady

Peter Kostolányi

28. októbra 2019

Na dnešnej prednáške najprv dokážeme *vetu o jednoznačnosti*, podľa ktorej je každá holomorfná funkcia f na oblasti S jednoznačne daná svojimi hodnotami na ľubovoľnej podmnožine $T \subseteq S$ takej, že T má v S aspoň jeden hromadný bod. Celá informácia o holomorfnej funkcii f na množine S je teda „zakódovaná" v jej hodnotách na – hoci aj oveľa „menšej" – množine T.

V druhej polovici tejto prednášky si ukážeme, že za istých okolností možno holomorfnú funkciu rozvinúť do (patrične zovšeobecneného) mocninového radu aj v bodoch, v ktorých táto funkcia nie je holomorfná. Dnes sa pritom zameriame na pomerne špeciálny prípad *izolovaných singularít* funkcie, v ktorých možno funkciu rozvinúť do takzvaného *Laurentovho radu*; na rozdiel od Taylorových radov môžu Laurentove rady obsahovať aj záporné mocniny. Tento text čiastočne vychádza z [1].

Korene holomorfných funkcií

Obidve hlavné témy dnešnej prednášky sú úzko previazané s pojmom *koreňov* holomorfných funkcií, čo sú – v súlade s bežnou terminológiou – body, v ktorých funkcia nadobúda nulové hodnoty.

Definícia P6.1. Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$. Hovoríme, že bod a je *koreňom* funkcie f, ak $f(a) = 0$.

Často sa zíde aj jemnejšia klasifikácia koreňov podľa ich *rádu* – ide pritom o minimálny rád derivácie funkcie f, ktorá je v danom bode nenulová.

Definícia P6.2. Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$. Pre $m \in \mathbb{N}$ hovoríme, že bod a je *koreňom rádu m* funkcie f, ak $f^{(k)}(a) = 0$ pre $k = 0, \ldots, m-1$ a $f^{(m)}(a) \neq 0$. Ak žiadne takéto $m \in \mathbb{N}$ neexistuje, hovoríme, že a je *koreňom rádu ∞* funkcie f.

Bod a je teda koreňom funkcie f práve vtedy, keď a je jej koreňom *nenulového rádu*; korene nulového rádu podľa tejto terminológie koreňmi funkcie f (bez ďalšieho prívlastku) vôbec nie sú.

Korene prirodzeného rádu možno charakterizovať aj viacerými ďalšími spôsobmi, ako ukazuje nasledujúce tvrdenie. Ako jednoduché cvičenie prenechávame čitateľovi charakterizáciu koreňov nekonečného rádu.

Tvrdenie P6.3. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, pričom pre z z nejakého okolia bodu a platí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Nech $m \in \mathbb{N}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Bod a je koreňom rádu m funkcie f.*

(*ii*) *Platí $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ a $c_m \neq 0$.*

(*iii*) *Existuje $r > 0$ a funkcia g holomorfná na $D(a, r)$ tak, že $g(a) \neq 0$ a pre všetky $z \in D(a, r)$ platí $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

(*iv*) *Limita $\lim_{z \to a} f(z)/(z-a)^m$ existuje a je rovná nejakému nenulovému komplexnému číslu.*

Dôkaz. Tvrdenia (*i*) a (*ii*) sú ekvivalentné vďaka vete o Taylorových radoch: pre všetky $n \in \mathbb{N}$ totiž nutne platí $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Ak ďalej $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ a $c_m \neq 0$, môžeme položiť

$$g(z) := \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m},$$

pričom tento rad musí konvergovať pre všetky $z \in D(a, r)$, kde r je ľubovoľné kladné reálne číslo menšie ako polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Zjavne v takom prípade $g(a) = c_m \neq 0$.

Ak naopak $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pre nejakú funkciu $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ holomorfnú na $D(a,r)$ s $g(a) \neq 0$, tak

$$(z-a)^m g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m}(z-a)^n$$

a z $b_0 \neq 0$ je zrejmé, že *práve* prvých m koeficientov Taylorovho rozvoja tejto funkcie v bode a je nulových. To dokazuje ekvivalenciu tvrdení (*ii*) a (*iii*). Z platnosti (*iii*) a spojitosti holomorfnej funkcie g v bode a tiež vyplýva

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^m g(z)}{(z-a)^m} = g(a),$$

kde $g(a) \neq 0$; teda (*iii*) implikuje (*iv*). Nech nakoniec pre nejaké $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = C.$$

Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že f je holomorfná na $D(a,\delta)$ a pre všetky $w \in D'(a,\delta)$ platí

$$\left| \frac{f(w)}{(w-a)^m} - C \right| < \varepsilon,$$

a teda aj

$$|f(w)| < (|C| + \varepsilon)\delta^m.$$

Z Cauchyho vzorca pre derivácie a vety o odhade potom pre $n = 0, \ldots, m-1$ dostávame

$$\left| f^{(n)}(a) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,\delta/2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right| < \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^{n+1}(|C|+\varepsilon)\delta^m}{\delta^{n+1}} = n! 2^n (|C|+\varepsilon)\delta^{m-n}$$

a keďže $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ môžu byť ľubovoľne malé, nutne $f^{(n)}(a) = 0$. Ak teda $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, platí $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$. Keďže ale na druhej strane

$$C = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z\to a} \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^{n-m} = \left(\lim_{z\to a} c_m \right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-m} = c_m,$$

dostávame $c_m = C \neq 0$. Tvrdenie (*iv*) teda implikuje (*ii*), čím je dôkaz dokončený. □

Veta o jednoznačnosti

Vetu o jednoznačnosti dokážeme pomocou dvoch pomocných tvrdení hovoriacich o nulovosti holomorfnej funkcie na oblasti S za predpokladu, že je táto funkcia nulová na podmnožine S spĺňajúcej isté podmienky.

Označenie P6.4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na S. Symbolom $Z(f)$ označme množinu všetkých koreňov funkcie f v S, t.j.

$$Z(f) := \{a \in S \mid f(a) = 0\}.$$

Lema P6.5. *Nech $a \in \mathbb{C}$ je ľubovoľný bod, $r > 0$ a funkcia f je holomorfná na $D(a,r)$. Ak $f(a) = 0$ a bod a je hromadným bodom množiny $Z(f)$, tak pre všetky $z \in D(a,r)$ platí $f(z) = 0$.*

Dôkaz. Nech sú predpoklady lemy splnené. Z holomorfnosti funkcie f na $D(a,r)$ vyplýva, že funkciu f možno pre všetky $z \in D(a,r)$ reprezentovať jej Taylorovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Ak $c_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak pre každé $z \in D(a, r)$ nutne $f(z) = 0$, čo je v súlade so znením lemy. Ukážeme, že opačná možnosť vedie k sporu. Z tvrdenia P6.3 v takom prípade vyplýva, že je a koreňom funkcie f rádu $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rovnaké tvrdenie potom zaručuje aj existenciu funkcie g holomorfnej v bode a takej, že $g(a) \neq 0$ a na nejakom okolí bodu a platí $f(z) = (z-a)^m g(z)$. Holomorfná funkcia g musí byť v bode a spojitá – existuje preto $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a, \delta)$ platí $g(z) \neq 0$; pre $z \in D'(a, \delta)$ potom aj $f(z) = (z-a)^m g(z) \neq 0$. Z toho vyplýva, že $f(a)$ je izolovaným bodom množiny $Z(f)$, čo je v spore s predpokladom, že ide o hromadný bod tejto množiny. □

Lema P6.6. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Ak má množina $Z(f)$ v S aspoň jeden hromadný bod, nutne $f \equiv 0$.*

Dôkaz. Nech $a \in S$ je hromadný bod množiny $Z(f)$. Pre každé $\delta > 0$ potom existuje $z \in D'(a, \delta) \cap S$ také, že $f(z) = 0$. Zo spojitosti funkcie f v bode a teda vyplýva aj $f(a) = 0$. Ak teraz $b \in S$ je ľubovoľné, súvislosť oblasti S implikuje existenciu lomenej čiary γ z bodu a do bodu b. Keďže je γ^* kompaktná, existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Pokrytím lomenej čiary γ „reťazou“ prekrývajúcich sa okolí o polomere ε tak s použitím lemy P6.5 zisťujeme, že aj $f(b) = 0$. Keďže je $b \in S$ ľubovoľné, je lema dokázaná. □

Jednoduchým dôsledkom práve dokázanej lemy je už samotná veta o jednoznačnosti: každá funkcia f holomorfná na oblasti S je jednoznačne daná jej hodnotami na ľubovoľnej podmnožine T oblasti S, ktorá má v S aspoň jeden hromadný bod. V hodnotách funkcie f na množine T je teda „obsiahnutá kompletná informácia“ o hodnotách f na celej oblasti S.

Veta P6.7 (O jednoznačnosti)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú holomorfné na S. Nech existuje množina $T \subseteq S$ taká, že pre všetky $z \in T$ platí $f(z) = g(z)$ a T má v S aspoň jeden hromadný bod. Potom na oblasti S nutne $f \equiv g$.*

Dôkaz. Stačí aplikovať lemu P6.6 na holomorfnú funkciu $f - g$. □

Príklad P6.8. Predpokladajme, že $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná funkcia taká, že pre všetky $z \in (0, 1)$ platí $f(z) = \sin z$. Z vety o jednoznačnosti potom $f(z) = \sin z$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Na vyvodenie tohto záveru by rovnako dobre postačovala aj rovnosť $f(z) = \sin z$ pre všetky $z \in \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, keďže táto množina má v $\mathbb{C}$ hromadný bod 0. Rovnosť $f(z) = \sin z$ pre $z \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ už ale napríklad postačujúca nie je, keďže v tomto prípade môže napríklad platiť aj $f \equiv 0$; to však neodporuje vete o jednoznačnosti, keďže množina $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ nemá v $\mathbb{C}$ žiaden hromadný bod.

Príklad P6.9. Ak pre nejakú dvojicu celých funkcií $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ platí $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, veta o jednoznačnosti zaručuje platnosť rovnosti $f(z) = g(z)$ aj pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Takto možno do komplexného oboru rozšíriť identity ako napríklad $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ alebo $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

Laurentove rady

Ak funkcia f nie je holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, vo všeobecnosti neexistuje Taylorov rozvoj funkcie f v bode a. Teraz však ukážeme, že v bodoch $a \in \mathbb{C}$ takých, že funkcia f je holomorfná na $D'(a, r)$, možno funkciu f rozvinúť do radu nápadne pripomínajúceho Taylorov rad, avšak obsahujúceho vo všeobecnosti aj záporné mocniny – takýto rad nazveme *Laurentovým radom.* Hoci je spomenutý prípad z hľadiska aplikácií najdôležitejší, v skutočnosti dokonca dokážeme o niečo silnejšie tvrdenie: rovnaká vlastnosť platí aj pre funkcie holomorfné na medzikruží so stredom v bode a.

Pred vyslovením samotnej vety o Laurentových radoch si musíme ujasniť spôsob, akým chápeme obojstranne nekonečné rady: hovoríme, že rad komplexných čísel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

konverguje k súčtu s, ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k súčtu s_1, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ konverguje k súčtu s_2 a $s_1 + s_2 = s$. Obdobným spôsobom chápeme aj obojstranne nekonečné mocninové rady.

Veta P6.10. *Nech f je funkcia holomorfná na medzikruží $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$ pre nejaké $0 \le r_1 < r_2$. Potom existuje* jednoznačne daná *postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ taká, že pre všetky $z \in A$ je funkcia f daná* Laurentovým radom

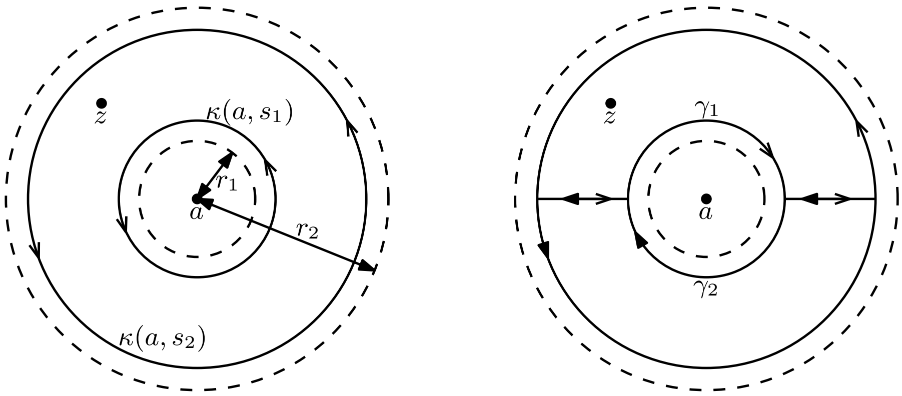
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(kde rad konverguje). Pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ je navyše koeficient c_n daný ako

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w,$$

kde r je ľubovoľné reálne číslo také, že $r_1 < r < r_2$.[1]

Dôkaz. Nech $z \in A$ je pevné. Zvoľme reálne čísla s_1, s_2 tak, aby $r_1 < s_1 < |z-a| < s_2 < r_2$. Spojme kružnice $\kappa(a, s_1)$ a $\kappa(a, s_2)$ dvoma nepretínajúcimi sa úsečkami tak, aby bod z neležal na žiadnej z nich a skonštruujme krivky γ_1, γ_2 tak, ako na obrázku P6.1b.



(a) Voľba hodnôt s_1 a s_2. **(b)** Krivky γ_1 a γ_2.

Obr. P6.1: Dôkaz vety P6.10.

Z Cauchyho integrálneho vzorca potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

a z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w.$$

Sčítaním obidvoch integrálov sa úsečky spájajúce jednotlivé kružnice „vybijú“ a dostávame

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_2)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_1)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w. \tag{1}$$

Pre $w \in \kappa(a, s_2)^*$ ale $|w-a| > |z-a|$ a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

[1] Podobne ako pri Cauchyho integrálnych vzorcoch alebo koeficientoch Taylorových radov možno integrál pozdĺž kružnice $\kappa(a, r)$ nahradiť integrálom pozdĺž ľubovoľnej uzavretej po častiach hladkej krivky homotopickej v A s $\kappa(a, r)$ (čo vyplýva priamo z vety o deformácii), prípadne integrálom pozdĺž ľubovoľnej kladne orientovanej jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky γ s $\gamma^* \subseteq A$ takej, že platí inklúzia $\overline{D}(a, r_1) \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ (kde je ale v konečnom dôsledku potrebné odvolať sa na Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu).

kde rad konverguje rovnomerne pre w z nejakej oblasti obsahujúcej $\kappa(a, s_2)^*$. Pre $w \in \kappa(a, s_1)^*$ naopak $|w-a| < |z-a|$ a

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}},$$

kde rad konverguje rovnomerne pre w z nejakej oblasti obsahujúcej $\kappa(a, s_1)^*$. Dosadením do (1) tak zisťujeme, že

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_2)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_1)} f(w)\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_2)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_1)}\frac{f(w)}{(w-a)^{-k}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^{-k-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_2)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s_1)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n. \end{aligned}$$

Vďaka vete o deformácii môžeme integračné krivky $\kappa(a, s_1)$ a $\kappa(a, s_2)$ nahradiť krivkou $\kappa(a, r)$. Dostávame teda

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Zostáva dokázať jednoznačnosť koeficientov c_n. Ak ale pre $z \in A$ platí $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-a)^k$ pre nejaké konštanty $(d_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, tak pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ zisťujeme, že

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (w-a)^{k-n-1}\,\mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\sum_{k=0}^{\infty} d_k (w-a)^{k-n-1}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} (w-a)^{-k-n-1}\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Obidva nekonečné rady v integrandoch konvergujú rovnomerne podľa Weierstrassovho kritéria – za M_k možno v každom z nich vziať napríklad q^k pre ľubovoľné reálne q také, že $|w-a| < q < \varrho$, kde ϱ je polomer konvergencie toho-ktorého radu. Preto

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}(w-a)^{k-n-1}\,\mathrm{d}w + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{-k}}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}(w-a)^{-k-n-1}\,\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{d_k}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}(w-a)^{k-n-1}\,\mathrm{d}w = d_n, \end{aligned}$$

keďže integrál je v danom výraze nenulový len pre $k = n$, pričom jeho hodnota je v takom prípade rovná $2\pi i$. □

Poznámka P6.11. Pre *disjunktné* medzikružia so stredom v bode $a \in \mathbb{C}$ môžu byť Laurentove rozvoje so stredom v a vo všeobecnosti rôzne. Typicky sa však budeme zaujímať o Laurentov rozvoj funkcie na nejakom *prstencovom okolí* bodu a, ktorý je vďaka predchádzajúcej vete daný jednoznačne. Často budeme nepresne hovoriť o *Laurentovom rozvoji funkcie v bode* a; v takom prípade máme vždy na mysli (jediný) Laurentov rad na nejakom prstencovom okolí bodu a.

Príklad P6.12. Funkcia $f(z) = 1/z$ je sama svojim Laurentovým radom v bode $z = 0$ – platí $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_{-1} = 1$ a $c_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\}$.

Príklad P6.13. Uvažujme funkciu $f(z) = 1/(z^3+z^2)$. Laurentov rozvoj funkcie f v bode $z = 0$ možno nájsť takto:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) = \sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

To znamená, že koeficienty pri z^n sú pre $n < 2$ nulové. Ide pritom o Laurentov rad na prstencovom okolí $D'(0,1)$. Užitočným cvičením môže byť nájdenie Laurentovho radu reprezentujúceho funkciu f na medzikruží $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ pre ľubovoľné $r > 1$.

Príklad P6.14. Laurentov rad funkcie $\sin(1/z)$ v bode $z = 0$ je daný ako

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{-(2n+1)}}{n!}.$$

Je v ňom teda nekonečne veľa nenulových koeficientov pri záporných mocninách z.

Izolované singularity a ich klasifikácia

Po zvyšok tejto prednášky sa začneme vážnejšie zaoberať vlastnosťami bodov, v ktorých nejaká funkcia f nie je holomorfná, hoci je holomorfná v ich blízkosti – presnejšie sa budeme zaoberať takzvanými *izolovanými singularitami* funkcie, ktoré sú úzko späté s Laurentovými radmi. Samotný pojem *singularity* funkcie zatiaľ definovať nebudeme; urobíme tak až neskôr v súvislosti s analytickým predĺžením. Izolované singularity budú, až na nepodstatný prípad odstrániteľných singularít, špeciálnym prípadom singularít.

Definícia P6.15. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in \mathbb{C}$ je bod. Hovoríme, že bod a je *izolovanou singularitou* funkcie f, ak existuje $r > 0$ také, že $D'(a,r) \subseteq S$, pričom funkcia f je holomorfná na $D'(a,r)$, ale nie je holomorfná v bode a.[2]

Podmienka holomorfnosti funkcie f na $D'(a,r)$ má za následok, že každú funkciu možno v jej izolovaných singularitách rozvinúť do Laurentovho radu. Vlastnosti tohto radu sú pritom základom pre jemnejšiu klasifikáciu izolovaných singularít.

Definícia P6.16. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkcie f. Nech $r > 0$ je také, že f je holomorfná na $D'(a,r)$, pričom pre $z \in D'(a,r)$ má funkcia f Laurentov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Potom hovoríme, že a je:

a) *Odstrániteľnou singularitou* funkcie f, ak pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ s $n < 0$ platí $c_n = 0$.

b) *Pólom* funkcie f, ak existuje $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že $c_{-m} \neq 0$ a pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ s $n < -m$ platí $c_n = 0$. V takom prípade tiež hovoríme, že a je pólom *rádu* m.

c) *Podstatnou izolovanou singularitou* funkcie f, ak existuje nekonečne veľa rôznych $n \in \mathbb{Z}$ s $n < 0$ takých, že $c_n \neq 0$.

Príklad P6.17. Z príkladov P6.12, P6.13 a P6.14 vyplýva, že funkcie $1/z$ a $1/(z^3+z^2)$ majú v bode $z = 0$ pól[3] a funkcia $\sin(1/z)$ má v bode $z = 0$ podstatnú izolovanú singularitu. Príkladom funkcie s odstrániteľnou singularitou v bode 0 môže byť napríklad funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } z \neq 0, \\ 0 & \text{ak } z = 0, \end{cases}$$

prípadne zúženie funkcie e^z na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a podobne.

[2] Samotný bod a môže, ale nemusí patriť do S. Ako ale uvidíme, prípad $a \in S$ je viac-menej triviálny.

[3] V prvom prípade ide o pól rádu 1, nazývaný tiež *jednoduchým pólom*. V druhom prípade ide o pól rádu 2.

Poznámka P6.18. V terminológii, ktorú zavedieme neskôr, sa odstrániteľné singularity za singularity vôbec nepokladajú. Dôvod je nasledovný: existencia odstrániteľnej singularity funkcie f v bode a znamená, že na nejakom prstencovom okolí $D'(a,r)$ bodu a pre nejaké konštanty $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Funkcia definovaná týmto mocninovým radom na $D(a,r)$ je holomorfná. Ak teda funkcia f nie je holomorfná v bode a, môže to byť iba z dvoch dôvodov: buď nie je v bode a vôbec definovaná, alebo má v tomto bode hodnotu rôznu od c_0. V oboch prípadoch možno dodefinovaním resp. predefinovaním hodnoty $f(a)$ na c_0 získať holomorfnú funkciu. Prípad odstrániteľných singularít je teda zanedbateľný (predefinovanie funkcie v jednom izolovanom bode zvyčajne nehrá žiadnu rolu).

Zaoberajme sa teraz bližšie pólmi. Charakterizujme najprv póly rádu m podobným spôsobom, ako sme v tvrdení P6.19 charakterizovali korene rádu m.

Tvrdenie P6.19. *Nech f je funkcia holomorfná na $D'(a,r)$ pre nejaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, pričom pre $z \in D'(a,r)$ platí $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Nech $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Bod a je pólom rádu m funkcie f.*

(*ii*) *Platí $c_{-m} \neq 0$ a $c_n = 0$ pre všetky $n < -m$.*

(*iii*) *Existuje funkcia g holomorfná na $D(a,r)$ tak, že $g(a) \neq 0$ a pre všetky $z \in D'(a,r)$ platí $f(z) = g(z)/(z-a)^m$.*

(*iv*) *Limita $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m$ existuje a je rovná nejakému nenulovému komplexnému číslu.*

Dôkaz. Ekvivalencia tvrdení (*i*) a (*ii*) vyplýva priamo z definície pólov. Z tvrdenia (*ii*) ďalej vyplýva, že $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ pre holomorfnú funkciu g danú pre všetky $z \in D(a,r)$ ako

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z-a)^n,$$

kde $c_{-m} \neq 0$; platí teda aj tvrdenie (*iii*). Ak naopak platí (*iii*) pre nejakú holomorfnú funkciu g danú na $D(a,r)$ radom

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

tak

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n,$$

pričom $b_0 \neq 0$ – tvrdenia (*ii*) a (*iii*) sú teda ekvivalentné. Zostáva dokázať ekvivalenciu tvrdenia (*iv*) so zvyšnými tvrdeniami. Z platnosti (*iii*) a spojitosti holomorfnej funkcie g v bode a vyplýva

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^m g(z)}{(z-a)^m} = g(a),$$

kde $g(a) \neq 0$; teda (*iii*) implikuje (*iv*). Nech naopak pre nejaké $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m = C.$$

Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že f je holomorfná na $D'(a,\delta)$ a pre všetky $w \in D'(a,\delta)$ platí

$$|f(w)(w-a)^m - C| < \varepsilon,$$

a teda aj

$$|f(w)| < \frac{(|C| + \varepsilon)}{\delta^m}.$$

Ak teda $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, pre $n < -m$ dostávame

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,\delta/2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^{n+1}(|C| + \varepsilon)}{\delta^{m+n+1}} = \frac{2^n(|C| + \varepsilon)}{\delta^{m+n}}$$

a keďže $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ môžu byť ľubovoľne malé, nutne $c_n = 0$. Naopak ale

$$C = \lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m = \lim_{z \to a} \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} = \left(\lim_{z \to a} c_{-m} \right) + \sum_{n=-m+1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} = c_{-m},$$

z čoho dostávame $c_{-m} = C \neq 0$. Tvrdenie (*iv*) teda implikuje (*ii*), čím je dôkaz dokončený. □

Môžeme teraz sformulovať relatívne dôležité tvrdenie dávajúce do súvisu korene a póly.

Tvrdenie P6.20. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$ a $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom má funkcia f v bode a koreň rádu m práve vtedy, keď má funkcia $1/f$ v bode a pól rádu m.*

Dôkaz. Ak má funkcia f v bode a koreň rádu m, musí na nejakom okolí bodu a platiť

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde $c_m \neq 0$. Funkcia f potom musí byť nenulová na nejakom prstencovom okolí $D'(a,r)$ bodu a; v opačnom prípade by totiž bod a bol hromadným bodom množiny koreňov funkcie f, z lemy P6.5 by sme dostali nulovosť tejto funkcie na $D(a,r)$ a z jednoznačnosti koeficientov Taylorovho rozvoja by vyplynulo $c_m = 0$. Z toho vyplýva, že funkcia $1/f$ je holomorfná na $D'(a,r)$. Podľa tvrdenia P6.3 navyše existuje funkcia g holomorfná na $D(a,r)$ taká, že pre $z \in D(a,r)$ platí $f(z) = (z-a)^m g(z)$ a $g(a) \neq 0$. Funkcia g je spojitá, a teda nenulová na nejakom okolí $D(a,\delta)$. Pre $z \in D(a, \min\{\delta, r\})$ potom

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m g(z)} = \frac{1/g(z)}{(z-a)^m}$$

a bod a je pólom rádu m funkcie $1/f$ podľa tvrdenia P6.19. Analogický dôkaz opačnej implikácie prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Literatúra

[1] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.