# Prednáška č. 7: Index bodu vzhľadom ku krivke

Peter Kostolányi

4. novembra 2019

Definujeme dnes pojem *indexu bodu vzhľadom ku krivke*, pomocou ktorého bude možné exaktne merať „počet ovinutí" uzavretej po častiach hladkej krivky okolo daného bodu,[1] ako aj poriadne – t.j. bez odkazu na matematicky pofidérne pojmy, ako sú smer hodinových ručičiek alebo ľavá a pravá strana – definovať orientáciu jednoduchej uzavretej krivky.

S použitím tohto pojmu ďalej dokážeme zatiaľ najvšeobecnejšiu verziu Cauchyho integrálneho vzorca, ktorá navyše *nebude* predpokladať Jordanovu ani Jordanovu-Schoenfliesovu vetu – namiesto pokusov o topologické uchopenie pojmov ako „krivka obkolesujúca daný bod" totiž priamo v jej formulácii využijeme pojem indexu, ktorého nenulovosť bude známkou toho, že krivka daný bod aspoň raz ovinie. Nakoniec takto vylepšený Cauchyho integrálny vzorec použijeme na dôkaz všeobecného variantu Cauchyho integrálnej vety. Vo formulácii ani v dôkaze tejto všeobecnej Cauchyho integrálnej vety sa nebude využívať žiadna netriviálna topologická vlastnosť, akou je jednoduchá súvislosť – vlastnosť „neobkolesenia" žiadneho bodu mimo oblasti, na ktorej je funkcia holomorfná, vyjadríme len prostredníctvom relatívne elementárneho pojmu indexu. Text čiastočne vychádza z [3, 4, 2].

## Index bodu vzhľadom ku krivke

V priebehu semestra sme už niekoľkokrát narazili na integrál

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Ak je napríklad $\gamma$ kladne orientovaná kružnica so stredom v $a$, je tento integrál rovný $2\pi i$. Rovnaká vlastnosť platí aj pre ľubovoľnú uzavretú po častiach hladkú krivku $\gamma$ homotopickú v $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ s takouto kružnicou alebo – ak predpokladáme Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu – pre ľubovoľnú jednoduchú uzavretú kladne orientovanú po častiach hladkú krivku $\gamma$ s $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Nech je $\gamma$ daná ktorýmkoľvek z týchto spôsobov, integrál pozdĺž $\gamma+\gamma$ bude mať hodnotu $4\pi i$, integrál pozdĺž $\gamma+\gamma+\gamma$ bude $6\pi i$, atď. Naopak integrál pozdĺž $-\gamma$ bude $-2\pi i$ a podobne ako vyššie vieme nájsť hodnoty integrálov aj pozdĺž spojení niekoľkých takýchto kriviek.

Bez použitia Jordanovej vety nie je úplne jasné, čo si predstaviť pod „počtom ovinutí" krivky $\gamma$ okolo $a \in \mathbb{C}$. Túto veličinu však môžeme *definovať* na základe vyššie uvedených pozorovaní – dostávame sa tak k dôležitému pojmu *indexu bodu vzhľadom ku krivke* (angl. *index of a curve about a point* alebo *winding number*).

**Definícia P7.1.** Nech $\gamma$ je uzavretá po častiach hladká krivka a $a \notin \gamma^*$. *Indexom bodu a vzhľadom ku krivke* $\gamma$ nazveme hodnotu

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

*Príklad* P7.2. Platí $\mathrm{Ind}_{\kappa(0,1)}(1/2) = 1$, $\mathrm{Ind}_{-\kappa(0,1)}(1/2) = -1$ a $\mathrm{Ind}_{\kappa(0,1)+\kappa(0,1)}(1/2) = 2$.

Pojem indexu môžeme využiť aj na definíciu orientácie jednoduchej uzavretej krivky – stačí si všimnúť, že pre kladne orientované kružnice a s nimi homotopické krivky je index ľubovoľného bodu v ich vnútri vzhľadom k nim rovný jednej. *S použitím Jordanovej vety* teda možno orientáciu jednoduchej uzavretej krivky definovať napríklad nasledovne.

**Definícia P7.3.** Nech $\gamma$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka. Hovoríme, že $\gamma$ je *kladne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ platí $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$ a *záporne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ platí $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = -1$.

Orientáciu krivky možno definovať aj bez implicitného odvolania sa na Jordanovu vetu – definícia je však potom o niečo ťažšie čitateľná.

[1] V angličtine sa preto pre index používa aj pomenovanie *winding number*.

**Definícia P7.4.** Nech $\gamma$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka. Hovoríme, že $\gamma$ je *kladne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(a) \geq 0$ a *záporne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(a) \leq 0$.

## Integrálna reprezentácia logaritmov

Za účelom skúmania ďalších vlastností indexu budeme potrebovať vetu o integrálnej reprezentácii holomorfných vetiev prirodzeného logaritmu. Z cvičení vieme, že holomorfnú vetvu logaritmu možno definovať okrem iného aj na ľubovoľnej konvexnej oblasti neobsahujúcej bod 0. Nasledujúcu vetu teda sformulujeme pre ľubovoľnú jednoduchú súvislú oblasť, na ktorej možno definovať holomorfnú vetvu logaritmu (napríklad môže ísť o oblasť $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a špeciálne pre ľubovoľnú konvexnú oblasť neobsahujúcu bod 0.

**Veta P7.5.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je ľubovoľná jednoducho súvislá oblasť, na ktorej je možné definovať holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu (alebo špeciálne ľubovoľná konvexná oblasť neobsahujúca bod 0). Nech $\ln_S \colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná vetva prirodzeného logaritmu na $S$, t.j. nech je funkcia $\ln_S$ holomorfná a pre všetky $z \in S$ platí $\ln_S(z) \in [\![\ln z]\!]$. Pre ľubovoľnú po častiach hladkú krivku $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = z$ potom*

$$\int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \ln_S(z) - \ln_S(a).$$

*Ak teda navyše $1 \in S$, $\gamma(\alpha) = 1$ a pre vetvu $\ln_S$ platí $\ln_S(1) = 0$, tak*

$$\ln_S(z) = \int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w.$$

*Dôkaz.* Holomorfnú vetvu logaritmu možno definovať len pre oblasti $S$ také, že $0 \notin S$; znenie vety teda dáva zmysel. Zjavne stačí dokázať iba jej prvú časť. Z tvrdenia dokázaného na cvičeniach ale vyplýva, že pre všetky $w \in S$ platí $\ln_S'(w) = 1/w$. Dokazované tvrdenie teda vyplýva priamo zo „základnej vety o krivkových integráloch“. $\square$

## Index a spojitý výber argumentu

Hoci je význam indexu intuitívne zrejmý, ozajstné odôvodnenie tohto konceptu poskytuje až nasledujúca veta, ktorá ho dáva do súvisu so *spojitým výberom argumentu* pozdĺž uzavretej krivky $\gamma$.

**Veta P7.6.** *Nech $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavretá po častiach hladká krivka a $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je bod. Potom existuje spojitá funkcia $\eta \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ taká, že pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t) - a)]\!]$ a*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\left(\eta(\beta) - \eta(\alpha)\right).$$

*Dôkaz.* Nech $S$ je ľubovoľná oblasť taká, že $\gamma^* \subseteq S$ a $a \notin S$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Nie je ťažké dokázať, že existuje $n \in \mathbb{N}$ a reálne čísla $\alpha = t_0 \leq \ldots \leq t_n = \beta$ také, že pre okolia $D_k := D(\gamma(t_k), \varepsilon)$ pre $k = 0, \ldots, n-1$ platí $\gamma^* \subseteq D_0 \cup \ldots \cup D_{n-1} \subseteq S$.[2]

Pre $k = 0, \ldots, n-1$ označme ako $\gamma_k$ krivku $\gamma \restriction [t_k, t_{k+1}]$ a ako $\ln_k$ ľubovoľnú vetvu prirodzeného logaritmu takú, že $\ln_k(z - a)$ je holomorfná na $D_k$. Pre $z \in D_k$ potom

$$\ln_k(z - a) = \ln|z - a| + i\theta_k(z - a),$$

kde $\theta_k(z - a)$ je spojitá na $D_k$ a pre všetky $z \in D_k$ platí $\theta_k(z - a) \in [\![\arg(z - a)]\!]$.

[2]Napríklad možno krivku $\gamma$ dĺžky $L(\gamma)$ vyjadriť ako spojenie $n$ kriviek dĺžky najviac $\varepsilon/2$, kde $n$ je ľubovoľné prirodzené číslo, pre ktoré je takéto vyjadrenie možné. Za $\alpha = t_0, \ldots, t_{n-1}$ možno vziať napríklad čísla také, že $\gamma(\alpha) = \gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_{n-1})$ sú počiatočnými bodmi jednotlivých úsekov. Je tu však skryté jedno tvrdenie: vzdialenosť medzi koncovými bodmi po častiach hladkej krivky je vždy najviac dĺžka tejto krivky (viac na cvičeniach).

Pre $k = 0, \ldots, n-1$ definujme funkciu $\eta_k\colon [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ pre všetky $t \in [t_k, t_{k+1}]$ predpisom $\eta_k(t) = \theta_k(\gamma(t) - a)$. Keďže sú funkcie $\theta_k$ a $\gamma$ spojité, je spojitá aj funkcia $\eta_k$. Funkciu $\eta\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ teraz môžeme definovať pre $k = 0, \ldots, n-1$ a všetky $t \in [t_k, t_{k+1}]$ predpisom

$$\eta(t) = \eta_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1} (\eta_j(t_j) - \eta_{j-1}(t_j))\,;$$

je zrejmé, že takto získame funkciu spojitú na $[\alpha, \beta]$. Od hodnoty $\eta_k(t)$ navyše vždy odpočítavame nejaký celočíselný násobok čísla $2\pi$; pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ teda platí $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t) - a)]\!]$. Z vety P7.5 (stačí jej variant pre konvexné oblasti) nakoniec dostávame

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_\gamma(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln_k(\gamma(t_{k+1}) - a) - \ln_k(\gamma(t_k) - a)) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}(i\theta_k(\gamma(t_{k+1}) - a) - i\theta_k(\gamma(t_k) - a)) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(\eta_k(t_{k+1}) - \eta_k(t_k)) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)) = \frac{1}{2\pi}(\eta(\beta) - \eta(\alpha))\,,
\end{aligned}$$

čím je dôkaz vety dokončený. □

**Dôsledok P7.7.** *Nech $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavretá po častiach hladká krivka a $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je bod. Potom je $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$ celé číslo.*

*Dôkaz.* Z predchádzajúcej vety vyplýva existencia spojitej funkcie $\eta\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ takej, že pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ platí $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t))]\!]$ a $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = (\eta(\beta) - \eta(\alpha))/2\pi$. Keďže ale $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nutne $\eta(\beta) - \eta(\alpha) = 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, z čoho už priamo vyplýva celočíselnosť hodnoty $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$. □

## Morerova veta

Za účelom dôkazu všeobecnejšej verzie Cauchyho integrálneho vzorca budeme potrebovať ešte jednu klasickú vetu komplexnej analýzy: *Morerovu vetu.* Možno ju chápať ako (takmer) opačné tvrdenie ku Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník – umožňuje totiž usúdiť na holomorfnosť funkcie $f$ na oblasti $S$ za predpokladu nulovosti integrálov tejto funkcie pozdĺž všetkých trojuholníkov v $S$; podmienkou je však spojitosť funkcie $f$ na $S$. Dôkaz tejto vety bude veľmi jednoduchý – Morerova veta je priamym dôsledkom dvoch tvrdení, ktoré sme dokázali na minulých prednáškach.

**Veta P7.8** (Morerova veta)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia taká, že pre ľubovoľný trojuholník $\gamma$ s $\gamma^* \subseteq S$ platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

*Potom je funkcia $f$ holomorfná na $S$.*

*Dôkaz.* Stačí pre každé $a \in S$ ukázať holomorfnosť funkcie $f$ v bode $a$. Nech $r > 0$ je také, že $D(a, r) \subseteq S$; oblasť $D(a, r)$ je konvexná a z lemy P4.3 tak za predpokladov tejto vety vyplýva existencia primitívnej funkcie $F\colon D(a, r) \to \mathbb{C}$ k funkcii $f$. Táto funkcia je na $D(a, r)$ holomorfná a platí pre ňu $F' = f$. Podľa dôsledku P5.10 má však každá holomorfná funkcia derivácie ľubovoľného rádu – špeciálne teda musí na $D(a, r)$ existovať aj druhá derivácia funkcie $F$, ktorá je nutne deriváciou funkcie $f$ na $D(a, r)$: funkcia $f$ je holomorfná na $D(a, r)$, a teda aj v bode $a$. □

### Všeobecný Cauchyho integrálny vzorec

Využijeme teraz pojem indexu na sformulovanie a dôkaz všeobecnejšej verzie Cauchyho integrálneho vzorca. Hoci samotný dôkaz bude o niečo zdĺhavejší, než tomu bolo pri predchádzajúcich variantoch Cauchyho vzorca, z hľadiska použitých metód pôjde o druhý najjednoduchší variant (hneď po Cauchyho integrálnom vzorci pre kružnicu). Jeho formulácia ani dôkaz nebudú závisieť od nedokázaných tvrdení ako Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta a nebudú ani narábať s relatívne pokročilými topologickými pojmami, ako sú homotópie a jednoducho súvislé oblasti. Postačujúcimi sa namiesto toho ukážu byť pomerne elementárne nástroje – nasledujúci všeobecnejší variant Cauchyho integrálneho vzorca by sme rovnako dobre mohli dokázať aj v prípade, že by sme Cauchyho integrálny vzorec mali dokázaný iba pre kružnicu a Cauchyho integrálnu vetu iba pre trojuholník resp. konvexnú oblasť (čitateľ sa o tom môže presvedčiť sám, spätným dohľadaním dôkazov všetkých použitých tvrdení).

Než ale prejdeme k samotnému všeobecnému Cauchyho integrálnemu vzorcu, dokážeme postupne tri na seba nadväzujúce lemy o integráloch, z ktorých posledná sa nám zíde pri jeho dôkaze. Dôkazy lemy P7.9 a lemy P7.10 sú prevzaté z [1], kde sa o problematike zámeny integrálov v reálnej analýze možno dočítať viac.

Pripomíname, že funkcia $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$, kde $X, T \subseteq \mathbb{R}$, je spojitá na $X \times Y$ práve vtedy, keď pre každé $(x,t) \in X \times T$ a všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $(x',t') \in X \times T$ s $|x - x'| < \delta$ a $|t - t'| < \delta$ platí $|f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon$. Funkcia $f$ je teda spojitá práve vtedy, keď je pre každé $t \in T$ spojitá funkcia $f(\cdot, t)$ a súčasne je pre každé $x \in X$ spojitá funkcia $f(x, \cdot)$.

**Lema P7.9.** *Nech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$ pre nejaké reálne čísla $a \leq b$. Potom existuje $c \in [a,b]$ také, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

*Dôkaz.* Pre $a = b$ je tvrdenie triviálne. Predpokladajme teda, že $a < b$. Nech $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Potom

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a),$$

z čoho

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

Funkcia $f$ spojitá na uzavretom intervale $[a,b]$ musí na $[a,b]$ aspoň raz nadobudnúť hodnotu $m$, ako aj hodnotu $M$. Preto na $[a,b]$ aspoň raz nadobúda každú hodnotu z intervalu $[m,M]$; špeciálne teda existuje aj $c \in [a,b]$ také, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

čiže

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tým je dôkaz lemy dokončený. □

Nasledujúca lema je špeciálnym prípadom takzvanej *Fubiniho vety* z teórie miery a integrálu.

**Lema P7.10.** *Nech $a \leq b$ a $c \leq d$ sú reálne čísla a $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b] \times [c,d]$. Potom*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

*Dôkaz.* Pre každé $x \in [a,b]$ je funkcia $f(x,\cdot)$ spojitá na uzavretom intervale $[c,d]$, a teda musí byť rovnomerne spojitá. Pre všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\alpha, \beta \in [c,d]$ s $|\alpha - \beta| < \delta$ platí $|f(x,\alpha) - f(x,\beta)| < \varepsilon$. Funkcia

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

je teda (rovnomerne) spojitá na $[c,d]$, lebo pre všetky $\alpha, \beta \in [c,d]$ s $|\alpha - \beta| < \delta$ platí

$$|F(\alpha) - F(\beta)| = \left| \int_a^b (f(x,\alpha) - f(x,\beta))\, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon(b-a).$$

Podobne možno dokázať, že funkcia

$$G(x) = \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

je spojitá na $[a,b]$. Všetky integrály zo znenia lemy teda existujú.

Z rovnomernej spojitosti $f$ na $[a,b] \times [c,d]$ navyše vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $(x,t), (x',t') \in [a,b] \times [c,d]$ s $|x - x'| < \delta$ a $|t - t'| < \delta$ platí $|f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon$. Pre dané $\varepsilon > 0$ zvoľme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby platili nerovnosti

$$\frac{b-a}{n} < \delta \qquad \text{a} \qquad \frac{d-c}{n} < \delta$$

a pre $j = 0, \ldots, n$ položme $a_j = a + (b-a)j/n$ a $c_j = c + (d-c)j/n$. Potom

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{c_{j-1}}^{c_j} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Pre $k = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n$ teraz dvojnásobným aplikovaním lemy P7.9 zisťujeme, že existujú čísla $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$ a $t_j \in [c_{j-1}, c_j]$ také, že

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = f(x_k, t_j)(a_k - a_{k-1})(c_j - c_{j-1}).$$

Z (1) potom

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_k, t_j)(a_k - a_{k-1})(c_j - c_{j-1}).$$

Analogickou argumentáciou možno dokázať, že pre $k = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n$ existujú čísla $x'_k \in [a_{k-1}, a_k]$ a $t'_j \in [c_{j-1}, c_j]$ také, že

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x'_k, t'_j)(a_k - a_{k-1})(c_j - c_{j-1}).$$

Vďaka voľbe čísla $n$ potom

$$\begin{aligned}
&\left| \int_c^d \int_a^b f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t - \int_a^b \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \right| = \\
&\quad = \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \big(f(x_k, t_j) - f(x'_k, t'_j)\big)(a_k - a_{k-1})(c_j - c_{j-1}) \right| < \\
&\quad < \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \varepsilon (a_k - a_{k-1})(c_j - c_{j-1}) = \varepsilon(b-a)(d-c).
\end{aligned}$$

Keďže môže byť $\varepsilon > 0$ ľubovoľne malé, nutne

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x,$$

čo bolo treba dokázať. □

**Lema P7.11.** *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú oblasti, $f\colon S \times T \to \mathbb{C}$ je spojitá na $S \times T$ a $\gamma_1, \gamma_2$ sú po častiach hladké krivky také, že $\gamma_1^* \subseteq S$ a $\gamma_2^* \subseteq T$. Potom*

$$\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z, w) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(z, w) \,\mathrm{d}w \,\mathrm{d}z.$$

*Dôkaz.* Vďaka vete o reparametrizácii môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sú krivky $\gamma_1$ a $\gamma_2$ dané zobrazeniami $\gamma_1\colon [0, 1] \to S$ a $\gamma_2\colon [0, 1] \to T$. Z definície krivkového integrálu potom

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z, w) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x) \,\mathrm{d}x \,\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Keďže sú obidve krivky $\gamma_1$ a $\gamma_2$ po častiach hladké, je funkcia $g(x, t) = f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t)$ spojitá na $S \times T$. Lemu P7.10 možno priamočiaro rozšíriť aj na prípad spojitých komplexných funkcií dvoch reálnych premenných; preto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z, w) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(z, w) \,\mathrm{d}w \,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Môžeme teraz pristúpiť k formulácii a dôkazu samotného všeobecného Cauchyho integrálneho vzorca.

**Veta P7.12.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $S$ a $\gamma$ s $\gamma^* \subseteq S \setminus \{a\}$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$. Potom*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - a} \,\mathrm{d}w.$$

*Dôkaz. Definujme funkciu* $g\colon S \times S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z, w \in S$ predpisom

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{ak } w \neq z, \\ f'(z) & \text{ak } w = z. \end{cases}$$

Ukážeme najprv, že *funkcia $g$ je spojitá* na $S \times S$: pre každé $(z, w) \in S \times S$ a všetky $\varepsilon > 0$ teda musíme dokázať existenciu $\delta > 0$ takého, že pre všetky dvojice $(u, v) \in S \times S$ spĺňajúce $u \in D(z, \delta)$ a $v \in D(w, \delta)$ platí $|g(u, v) - g(z, w)| < \varepsilon$.[3] Spojitosť $g$ je však zrejmá vo všetkých bodoch $(z, w)$ takých, že $z \neq w$ – zostáva dokázať jej spojitosť v bodoch $(a, a)$ pre $a \in S$. Nech teda $a \in S$ je pevné a $\varepsilon > 0$. Zo spojitosti funkcie $f'$ v bode $a$ potom vyplýva, že pre nejaké $\delta > 0$ a všetky $\zeta \in D(a, \delta)$ platí $|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon$. Pre všetky $u, v \in D(a, \delta)$ potom v prípade $u = v =: b$ máme

$$|g(u, v) - g(a, a)| = |g(b, b) - g(a, a)| = \left|f'(b) - f'(a)\right| < \varepsilon$$

a pre $u \neq v$ zisťujeme, že

$$\begin{aligned}|v - u| \cdot |g(u, v) - g(a, a)| &= |(v - u)\left(g(u, v) - g(a, a)\right)| = \left|(f(v) - f(u)) - (v - u)f'(a)\right| = \\ &= \left|\int_{[u,v]} f'(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta - \int_{[u,v]} f'(a) \,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{[u,v]} \left(f'(\zeta) - f'(a)\right) \,\mathrm{d}\zeta\right| < \\ &< |v - u|\varepsilon.\end{aligned}$$

[3] To je ekvivalentné tvrdeniu, že $g$ je spojitá súčasne ako funkcia $z$ (s pevným $w$) a ako funkcia $w$ (s pevným $z$).

V oboch prípadoch teda
$$|g(u,v) - g(a,a)| < \varepsilon$$
a spojitosť funkcie $g$ – či už ako funkcie dvoch komplexných premenných $z, w$ na $S \times S$, alebo ako funkcie jednej premennej $z$ alebo $w$ na $S$ – je dokázaná.

Vďaka spojitosti funkcie $g$ môžeme *definovať funkciu* $h\colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ predpisom
$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w.$$
*Dokážeme, že pre všetky* $z \in S \setminus \gamma^*$ *platí*
$$h(z) = 0. \tag{2}$$
Potom už bude Cauchyho integrálny vzorec dokázaný, lebo pre $a \in S \setminus \gamma^*$ dostaneme
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(g(a,w) + \frac{f(a)}{w-a}\right)\mathrm{d}w = \\ &= h(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \mathrm{Ind}_\gamma(a)f(a).\end{aligned}$$

*Po dokázaní vzťahu* (2) *už teda bude dôkaz Cauchyho integrálneho vzorca dokončený.* Vzťah (2) pritom dokážeme prostredníctvom pozorovania, že funkciu $h$ možno jednoznačne rozšíriť na nejakú *celú* funkciu $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, o ktorej bude možné dokázať, že je konštantne nulová.

Ako prvý krok k tomuto pozorovaniu *dokážeme, že funkcia* $h$ *je spojitá na* $S$. Nech $z \in S$ je pevné a $T \subseteq S$ je ohraničená oblasť taká, že $z \in T$, $\gamma^* \subseteq T$ a pre kompaktnú množinu $\overline{T}$ platí $\overline{T} \subseteq S$. Funkcia $g$ spojitá na $S \times S$ je potom na $\overline{T} \times \overline{T}$ nutne rovnomerne spojitá: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, w_1, z_2, w_2 \in \overline{T}$ spĺňajúce $|z_1 - z_2| < \delta$ a $|w_1 - w_2| < \delta$ platí $|g(z_1,w_1) - g(z_2,w_2)| < \varepsilon$.[4] Uvažujme ale ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ prvkov $\overline{T}$ takú, že $z_n \to z$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|z_n - z| < \delta$. Z obidvoch zistení dohromady vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T}$ platí $|g(z_n,w) - g(z,w)| < \varepsilon$. Postupnosť funkcií $(g(z_n,\cdot))_{n=0}^\infty$ teda na $\overline{T}$ konverguje rovnomerne k funkcii $g(z,\cdot)$. Preto
$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z_n,w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lim_{n\to\infty} g(z_n,w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w = h(z)$$
a funkcia $h$ je v bode $z$ spojitá. Keďže je $z \in S$ ľubovoľné, funkcia $h$ je spojitá na $S$.

Ako ďalší krok *dokážeme, že funkcia* $h$ *je holomorfná na* $S$. Funkcia $g(z,w)$ premennej $z$ je pre fixné $w \in S$ holomorfná na $S$ – pre $z \neq w$ je to očividné a v bode $z = w$ si vďaka tvrdeniu dokázanému na minulom cvičení stačí uvedomiť, že z holomorfnosti funkcie $f$ vyplýva $\lim_{z\to w} g(z,w) = g(w,w)$. Nech teraz $\gamma_\Delta$ je ľubovoľný trojuholník taký, že $\gamma_\Delta^* \subseteq S$. Zo spojitosti funkcie $g$ a lemy P7.11 potom
$$\int_{\gamma_\Delta} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{\gamma_\Delta} g(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = 0,$$
pretože
$$\int_{\gamma_\Delta} g(z,w)\,\mathrm{d}z = 0$$
pre všetky $w \in S$ vďaka holomorfnosti funkcie $g(\cdot,w)$ a Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník. Keďže je funkcia $h$ spojitá na $S$ a trojuholník $\gamma_\Delta$ je ľubovoľný, z Morerovej vety vyplýva, že aj funkcia $h$ je holomorfná na $S$.

Nech ďalej $S' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}$. Z predpokladov vety vyplýva $\mathbb{C} \setminus S \subseteq S'$, a teda aj $S \cup S' = \mathbb{C}$. *Ukážeme, že množina* $S'$ *je otvorená a obsahuje všetky* $z \in \mathbb{C}$ *s dostatočne veľkou absolútnou hodnotou.* Funkcia $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ premennej $z$ je podľa dôsledku P7.7 celočíselná; táto funkcia

[4] Dôkaz je podobný ako v reálnej analýze pre prípad funkcií na uzavretom intervale; prenechávame ho čitateľovi ako cvičenie (s rovnakým pozorovaním sme sa už navyše stretli v súvislosti s homotópiami).

je však súčasne spojitá na $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, pretože pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ a všetky postupnosti $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ bodov z $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ také, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{1}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}w = \mathrm{Ind}_\gamma(z),\end{aligned}$$

kde zámena integrálu a limity je korektná vďaka tomu, že postupnosť funkcií $1/(w - z_n)$ premennej $w$ konverguje rovnomerne k $1/(w - z)$.[5] Funkcia $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ premennej $z$ je teda na ľubovoľnej *oblasti* nutne konštantná, z čoho vyplýva, že množina $S'$ je otvorená. Z kompaktnosti $\gamma^*$ navyše vyplýva existencia konštanty $M \geq 0$ takej, že pre všetky $w \in \gamma^*$ platí $|w| \leq M$. Na oblasti $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ je funkcia $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ konštantná, pričom pre $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ súčasne

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{1}{|z| - M}.$$

Keďže môže byť $|z|$ ľubovoľne veľké, pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ nutne $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

*Definujme teraz funkciu* $\hat{h}\colon S' \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S'$ predpisom

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w.$$

*Ukážeme, že $\hat{h}$ je spojitá na $S'$.* Podobne ako vyššie pre funkciu $h$ vezmime pevné $z \in S'$ a ohraničenú oblasť $T' \subseteq S'$ takú, že $z \in T'$ a pre kompaktnú množinu $\overline{T'}$ platí $\overline{T'} \subseteq S'$. Funkcia $f(w)/(w - z)$ je očividne spojitá na $S' \times S'$; na $\overline{T'} \times \overline{T'}$ je teda rovnomerne spojitá: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, w_1, z_2, w_2 \in \overline{T'}$ spĺňajúce nerovnosti $|z_1 - z_2| < \delta$ a $|w_1 - w_2| < \delta$ platí $|f(w_1)/(w_1 - z_1) - f(w_2)/(w_2 - z_2)| < \varepsilon$. Uvažujme ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ prvkov $\overline{T'}$ takú, že $z_n \to z$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|z_n - z| < \delta$. Dohromady dostávame, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T'}$ platí $|f(w)/(w - z_n) - f(w)/(w - z)| < \varepsilon$. Postupnosť funkcií $f(w)/(w - z_n)$ premennej $w$ teda na $\overline{T}$ a pre $n \to \infty$ konverguje rovnomerne k funkcii $f(w)/(w - z)$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \hat{h}(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f(w)}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w = \hat{h}(z)$$

a funkcia $\hat{h}$ je v bode $z$ spojitá. Keďže je $z \in S'$ ľubovoľné, je funkcia $\hat{h}$ spojitá na $S'$.

*Ukážeme ešte, že $\hat{h}$ je holomorfná na $S'$.* Funkcia $f(w)/(w - z)$ je očividne holomorfná na $S'$ ako funkcia premennej $z$ a spojitá na $S' \times S'$ ako funkcia oboch premenných. Pre ľubovoľný trojuholník $\gamma_\Delta$ s $\gamma_\Delta^* \subseteq S'$ tak s použitím lemy P7.11 dostávame

$$\int_{\gamma_\Delta} \hat{h}(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_{\gamma_\Delta} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w = 0,$$

kde posledný krok je dôsledkom rovnosti

$$\int_{\gamma_\Delta} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}z = 0$$

vyplývajúcej z holomorfnosti funkcie $f(w)/(w - z)$ premennej $z$ a z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník. Keďže je však trojuholník $\gamma_\Delta$ ľubovoľný a funkcia $\hat{h}$ je na $S'$ spojitá, z Morerovej vety môžeme usúdiť na holomorfnosť funkcie $\hat{h}$ na $S'$.

[5] Keďže totiž $z_n \to z$, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|z_n - z| < \varepsilon$. Zvoľme $r > 0$ tak, že $|w - z| > 2r$ pre všetky $w \in \gamma^*$. Potom existuje $n_0' \in \mathbb{N}$ také, že pre $n \geq n_0'$ platí $|w - z_n| > r$. Pre dané $\varepsilon > 0$ a $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ potom

$$\left| \frac{1}{w - z_n} - \frac{1}{w - z} \right| = \left| \frac{z_n - z}{(w - z_n)(w - z)} \right| < \frac{\varepsilon}{2r^2}$$

pre všetky $w \in \gamma^*$ a fixnú konštantu $r > 0$; tým je rovnomerná konvergencia dokázaná.

*Ukážeme teraz, že funkciu $h$ možno rozšíriť na celú funkciu $H$.* Pre všetky $z \in S \cap S'$ platí

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w) \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w = \hat{h}(z) - f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \hat{h}(z).$$

Možno teda korektne definovať funkciu $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{ak } z \in S, \\ \hat{h}(z) & \text{ak } z \in S'. \end{cases}$$

Z holomorfnosti funkcií $h$ a $\hat{h}$ na otvorených množinách $S$ resp. $S'$ navyše vyplýva, že funkcia $H$ je holomorfná na $\mathbb{C}$ – je to celá funkcia.

*Zostáva dokázať, že funkcia $H$ – a tým pádom aj funkcia $h$ – je konštantne nulová.* Tu však stačí využiť fakt, že množina $S'$ obsahuje všetky $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > M$ pre nejaké $M \geq 0$. Pre $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > M$ teda

$$|H(z)| = \left|\hat{h}(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w\right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{M'}{|z| - M}, \tag{3}$$

kde $M' \geq 0$ je také, že pre všetky $w \in \gamma^*$ platí $|f(w)| \leq M'$. Funkcia $H$ je v dôsledku toho ohraničená napríklad na množine $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M + 1)$. Množina $\overline{D}(0, M + 1)$ je ale kompaktná a spojitá funkcia $H$ na nej musí byť taktiež ohraničená. Funkcia $H$ je teda ohraničená na $\mathbb{C}$. Keďže je ale súčasne $H$ celá, z Liouvillovej vety vyplýva jej konštantnosť na $\mathbb{C}$ a z (3) vyplýva, že touto konštantou musí byť nula. □

## Všeobecná Cauchyho integrálna veta

Všeobecná Cauchyho integrálna veta je jednoduchým dôsledkom práve dokázaného všeobecného variantu Cauchyho integrálneho vzorca.

**Veta P7.13.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $S$ a $\gamma$ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$. Potom*

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

*Dôkaz.* Nech $a \in S \setminus \gamma^*$. Definujme funkciu $g\colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ predpisom $g(z) = (z - a) f(z)$. Potom $g(a) = 0$ a zo všeobecného Cauchyho integrálneho vzorca dostávame

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z - a} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \, g(a) \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0,$$

čo bolo treba dokázať. □

## Literatúra


[1] Bartle, R. G.: *The Elements of Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons, 1964.

[2] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.

[3] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.

[4] Ullrich, D. C.: *Complex Made Simple.* Providence: American Mathematical Society, 2008.