Prednáška č. 8: Rezíduá

Peter Kostolányi

11. novembra 2019

Cauchyho vetu o rezíduách, ktorú na tejto prednáške dokážeme, možno z určitého pohľadu vnímať ako zastrešujúci výsledok základnej teórie klasickej komplexnej analýzy – okrem toho, že ide o silný nástroj na výpočet krivkových integrálov, je táto veta zovšeobecnením Cauchyho integrálnej vety, Cauchyho integrálneho vzorca, aj Cauchyho vzorca pre derivácie. Okrem toho má táto veta aj rad dôležitých teoretických dôsledkov, z ktorých sa na tejto prednáške budeme venovať takzvanému *Cauchyho princípu argumentu.* Odporúčaným čítaním k tejto prednáške je [2, 3].

Cauchyho veta o rezíduách

Základný poznatok potrebný na dôkaz Cauchyho vety o rezíduách už máme k dispozícii: ak je funkcia f holomorfná na prstencovom okolí $D'(a,r)$ pre nejaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, možno ju na tomto okolí reprezentovať jej Laurentovým rozvojom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Koeficienty c_n sú pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ dané integrálnym vzorcom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w,$$

kde $0 < s < r$. V špeciálnom prípade $n = -1$ potom dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s)} f(w)\,\mathrm{d}w = c_{-1}, \tag{1}$$

pričom kružnicu $\kappa(a,s)$ možno nahradiť aj ľubovoľnou inou uzavretou po častiach hladkou krivkou γ homotopickou v $D'(a,r)$ s touto kružnicou, prípadne – ak sa implicitne odvoláme na Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu – ľubovoľnou kladne orientovanou jednoduchou uzavretou po častiach hladkou krivkou γ s $\gamma^* \subseteq D'(a,r)$ takou, že a leží v jej vnútri. Vidíme teda, že koeficient c_{-1} je veľkého významu pre výpočet integrálov funkcie f pozdĺž kriviek okolo bodu a. Pre *meromorfné* funkcie je tento význam natoľko veľký, že si koeficient c_{-1} vyslúžil vlastné pomenovanie.

Definícia P8.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je meromorfná na S a $a \in S$ je izolovaná singularita funkcie f. Nech je pre nejaké $r > 0$ na prstencovom okolí $D'(a,r)$ funkcia f daná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N}$. *Rezíduum* funkcie f v bode a je potom koeficient

$$\mathrm{Res}(f,a) := c_{-1},$$

ak $-m \leq -1$ a $\mathrm{Res}(f,a) := 0$ inak.

Cauchyho veta o rezíduách je zovšeobecnením vzťahu (1) pre *meromorfné* funkcie – hovorí, že až na konštantný faktor $2\pi i$ možno integrál každej funkcie meromorfnej na oblasti S pozdĺž (takmer) *ľubovoľnej* kladne orientovanej jednoduchej uzavretej krivky γ s $\gamma^* \subseteq S$ vyjadriť ako súčet rezíduí cez všetky izolované singularity vo vnútri krivky γ. Túto vetu pritom dokážeme v dvoch variantoch. Prvý bude priamo sledovať uvedenú intuitívnu formuláciu, avšak medzi jej implicitnými predpokladmi bude aj Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta. Druhý variant, využívajúci pojem indexu, bude od spomínaných dvoch nedokázaných tvrdení nezávislý a o niečo všeobecnejší; formulácia samotnej vety však bude o niečo menej intuitívna.

Dokážme ale najprv veľmi jednoduchú lemu, ktorá sa nám zíde pri dôkaze obidvoch variantov Cauchyho vety o rezíduách.

Lema P8.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a funkcia f je meromorfná na S. Nech A je množina izolovaných singularít*[1] *funkcie f v S. Potom množina A nemôže mať v S žiaden hromadný bod.*

Dôkaz. Sporom – nech $a \in S$ je hromadný bod množiny A. Pre všetky $r > 0$ potom existuje izolovaná singularita $z \in D'(a, r)$; funkcia f teda nie je holomorfná na $D'(a, r)$ pre žiadne $r > 0$. V dôsledku toho nemôže byť funkcia f v bode a holomorfná a bod a nemôže byť ani izolovanou singularitou funkcie f. Funkcia f teda nie je meromorfná v bode a: spor. □

Veta P8.3 (Cauchyho veta o rezíduách, formulácia I)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^*. Nech A je množina všetkých izolovaných singularít funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$. Potom je množina A konečná a platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f, a).$$

Dôkaz. Podľa Jordanovej vety je oblasť $\mathbf{I}(\gamma)$ ohraničená – množina $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ je teda kompaktná. Za účelom sporu predpokladajme, že je množina A nekonečná. Nech $(a_n)_{n=0}^\infty$ je ľubovoľná postupnosť po dvoch rôznych bodov z A. Keďže je množina $A \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ ohraničená, podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety sa z postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ musí dať vybrať konvergentná podpostupnosť $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$. Ak označíme limitu tejto postupnosti ako a, nutne $a \in \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$. Keďže sú prvky postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ po dvoch rôzne, je a hromadným bodom množiny A. Existencia takéhoto bodu ale odporuje leme P8.2.

Množina A je teda skutočne konečná a znenie vety dáva zmysel. Pre všetky $a \in A$ je funkcia f na nejakom prstencovom okolí $D'(a, r)$ s $r > 0$ reprezentovaná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Označme symbolom g_a takzvanú *hlavnú časť* tohto Laurentovho radu:

$$g_a(z) := \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n.$$

Ľahko vidieť, že funkcia g_a je pre všetky $a \in A$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Ak teda definujeme

$$g(z) := f(z) - \sum_{a\in A} g_a(z),$$

má funkcia $g(z)$ na S iba odstrániteľné singularity. Môžeme ich teda odstrániť a predpokladať, že je funkcia g na S holomorfná.

Z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť – a taktiež aj z dôsledku Jordanovej-Schoenfliesovej vety hovoriaceho o jednoduchej súvislosti nejakej nadoblasti množiny $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ – potom

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pre každé $a \in A$ ďalej z integrálneho vzorca pre koeficient c_{-1} Laurentovho radu a z tvrdenia C4.9 dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Res}(g_a, a) = \operatorname{Res}(f, a).$$

Preto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(g(z) + \sum_{a\in A} g_a(z)\right)\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{a\in A}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f, a),\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

[1] Keďže je funkcia f meromorfná, môže ísť iba o póly a o odstrániteľné singularity.

Poznámka P8.4. Ak je funkcia f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$, je množina A z predchádzajúcej vety prázdna a samotná veta teda hovorí, že

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ide teda o variant Cauchyho integrálnej vety.[2]

Ak je funkcia f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$, je pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcia

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

holomorfná na $(\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)) \setminus \{a\}$, pričom v bode a má funkcia g jednoduchý pól. Na nejakom prstencovom okolí bodu a teda

$$g(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Funkcia

$$(z-a)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}(z-a)^n$$

má v bode a odstrániteľnú singularitu, a teda

$$\lim_{z\to a}(z-a)g(z) = \lim_{z\to a} f(z) = c_{-1}.$$

Pre rezíduum funkcie g v bode a preto platí

$$\mathrm{Res}(g,a) = c_{-1} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

a z Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a).$$

Ako špeciálny prípad Cauchyho vety o rezíduách teda dostávame aj Cauchyho integrálny vzorec.

Ak je napokon f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ a $m \in \mathbb{N}$, je pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcia

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}$$

opäť holomorfná na $(\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)) \setminus \{a\}$, pričom v bode a má funkcia g pól rádu $m+1$. Na nejakom prstencovom okolí bodu a teda

$$g(z) = \sum_{n=-(m+1)}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Funkcia

$$(z-a)^{m+1}g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-(m+1)}(z-a)^n$$

má v bode a odstrániteľnú singularitu. Môžeme ju teda odstrániť, čím dostaneme funkciu $f(z)$; podľa vety o Taylorových radoch potom

$$c_{-1} = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

V dôsledku toho

$$\mathrm{Res}(g,a) = c_{-1} = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

[2] Predpoklady na funkciu f a krivku γ sú tu trochu iné, než vo variantoch Cauchyho integrálnej vety, s ktorými sme sa doposiaľ stretli. Špeciálnym prípadom druhého variantu Cauchyho vety o rezíduách, ktorý dokážeme nižšie, však bude všeobecná Cauchyho integrálna veta v rovnakej podobe, ako bola vyslovená na minulej prednáške.

a z Cauchyho vety o rezíduách máme

$$\frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}z = f^{(m)}(a).$$

Ako špeciálny prípad Cauchyho vety o rezíduách tak dostávame aj Cauchyho vzorec pre derivácie.

Na cvičeniach sme už videli viacero situácií, kedy je možné krivkový integrál vyrátať veľmi jednoducho s použitím Cauchyho integrálneho vzorca alebo Cauchyho vzorca pre derivácie. To však vyžaduje, aby bola integrovaná funkcia f už vyjadrená alebo ľahko vyjadriteľná v tvare

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{m+1}},$$

kde g je v bode a holomorfná. Vieme už, že takýmto spôsobom možno vyjadriť ľubovoľnú funkciu, ktorá má v bode a pól rádu $m+1$; prevod do kýženého tvaru však nemusí byť technicky jednoduchý. Navyše môže integračná krivka obkolesovať aj viacero pólov a Cauchyho integrálny vzorec, ani Cauchyho vzorec pre derivácie, už použiť nemôžeme. Práve v uvedených situáciách je na výpočet krivkových integrálov veľmi užitočným nástrojom Cauchyho veta o rezíduách.

Príklad P8.5. Uvažujme integrál

$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{1}{z^3\cos z}\,\mathrm{d}z.$$

Na $D'(0,\pi/2)$ máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos z} &= \left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+O(z^6)\right)^{-1} = \frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+O(z^6)\right)} = \\ &= 1+\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+O(z^6)\right)+\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+O(z^6)\right)^2+O(z^6) = \\ &= 1+\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^4}{4}+O(z^6) = 1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+O(z^6),\end{aligned}$$

z čoho

$$\frac{1}{z^3\cos z} = \frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^1}+\frac{5z^1}{24}+O(z^3)$$

a

$$\operatorname{Res}\big(1/(z^3\cos z),0\big) = \frac{1}{2}.$$

Bod 0 je pritom jediným pólom integrovanej funkcie na $D(0,\pi/2)$; vo zvyšných bodoch $D(0,\pi/2)$ je táto funkcia holomorfná. Z Cauchyho vety o rezíduách preto

$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{1}{z^3\cos z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\operatorname{Res}\big(1/(z^3\cos z),0\big) = \pi i.$$

Príklad P8.6. Vypočítajme teraz integrál

$$\int_{\kappa(0,2)} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z.$$

Integrovanú funkciu tu možno upraviť nasledovne:

$$\frac{z}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}.$$

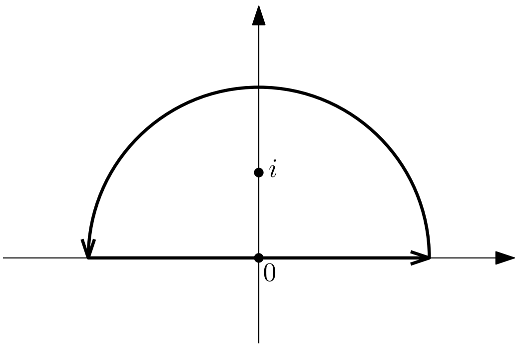
Zisťujeme teda, že na $D(0,2)$ má integrovaná funkcia tri jednoduché póly: 1 a $\pm i$; na $\kappa(0,2)^*$ je integrovaná funkcia holomorfná. Z úvah učinených v rámci poznámky P8.4 vyplývajú nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(z/(z-1)(z-i)(z+i), 1\right) &= \frac{1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}, \\
\operatorname{Res}\left(z/(z-1)(z-i)(z+i), i\right) &= \frac{i}{(i-1)(i+i)} = \frac{1}{2(i-1)} = -\frac{i+1}{4}, \\
\operatorname{Res}\left(z/(z-1)(z-i)(z+i), -i\right) &= \frac{-i}{(-i-1)(-i-i)} = -\frac{1}{2(i+1)} = \frac{i-1}{4}.
\end{aligned}$$

Z Cauchyho vety o rezíduách tak dostávame

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa(0,2)} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a\in\{1,i,-1\}} &\operatorname{Res}\left(z/(z-1)(z-i)(z+i), a\right) = \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{i+1}{4} + \frac{i-1}{4}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Cauchyho vetu o rezíduách možno často využiť aj na výpočet *reálnych* integrálov, ako ukazuje nasledujúci príklad prebratý z [1].



Obr. P8.1: Integračná krivka $[-r,r] + \kappa_{[0,\pi]}(0,r)$.

Príklad P8.7. Uvažujme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočítajme najprv pre všetky $r > 1$ krivkový integrál

$$\int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

pozdĺž integračnej krivky $[-r,r] + \kappa_{[0,\pi]}(0,r)$ znázornenej na obrázku P8.1. Keďže je integrovaná funkcia

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

holomorfná na tejto krivke a meromorfná v jej vnútri, pričom jedinou izolovanou singularitou v jej vnútri je jednoduchý pól i s

$$\operatorname{Res}\big(1/(z^2+1), i\big) = -\frac{i}{2},$$

podľa Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}\big(1/(z^2+1), i\big) = \pi.$$

Z vety o odhade však súčasne

$$\left|\int_{\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \pi r \frac{1}{r^2-1}$$

a pre $r \to \infty$ táto hodnota speje k nule. Preto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \\ &= \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \pi.\end{aligned}$$

Vyslovme teraz druhý variant Cauchyho vety o rezíduách, využívajúci pojem indexu – bude o niečo všeobecnejší, než ten predchádzajúci a navyše nebude predpokladať platnosť Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety.

Veta P8.8 (Cauchyho veta o rezíduách, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^* a pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$. Nech A je množina všetkých izolovaných singularít funkcie f v S. Potom existuje nanajvýš konečne veľa prvkov $a \in A$ s $\operatorname{Ind}_\gamma(a) \neq 0$ a platí*[3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f,a).$$

Dôkaz. Jedným z pozorovaní učinených na minulej prednáške v rámci dôkazu všeobecného Cauchyho integrálneho vzorca bolo nasledovné: ak $M \geq 0$ je také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $|z| \leq M$, tak je funkcia $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ na $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,M)$ nulová. Z toho vyplýva, že množina $A' = \{a \in A \mid \operatorname{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ je podmnožinou ohraničenej oblasti $D := D(0,M')$ pre nejaké $M' > M$. Navyše tiež existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $D(z,\varepsilon) \subseteq D \cap S$. Pre ľubovoľné w na hranici otvorenej množiny $D \cap S$ (t.j. $w \in \overline{D \cap S} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus (D \cap S)}$) potom okolie $D(w,\varepsilon)$ neobsahuje žiaden bod z γ^* a funkcia $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ je na tomto okolí všade definovaná, a teda – ako sme dokázali minule – konštantná. Toto okolie však súčasne obsahuje aspoň jeden bod $b \in \mathbb{C} \setminus (D \cap S)$; ak ale $b \notin S$, máme $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$ podľa predpokladov vety a ak $b \notin D$, nutne $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$ z vlastností dokázaných vyššie. Na okolí $D(w,\varepsilon)$ je teda funkcia $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ nulová a množina A' je v dôsledku toho obsiahnutá v nejakej kompaktnej podmnožine ohraničenej množiny $D \cap S$ – z jej nekonečnosti by teda, rovnako ako v dôkaze prvého variantu Cauchyho vety o rezíduách, vyplynula existencia hromadného bodu množiny A v S, čo by odporovalo leme P8.2. Množina A' je teda skutočne konečná a znenie vety dáva zmysel.

Ďalej už postupujeme podobne ako v dôkaze prvého variantu Cauchyho vety o rezíduách. Pre všetky $a \in A'$ je funkcia f na nejakom prstencovom okolí $D'(a,r)$ s $r > 0$ reprezentovaná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Označme g_a hlavnú časť tohto Laurentovho radu:

$$g_a(z) := \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n.$$

Ľahko vidieť, že funkcia g_a je pre všetky $a \in A'$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Ak teda definujeme

$$g(z) := f(z) - \sum_{a\in A'} g_a(z),$$

má funkcia $g(z)$ v oblasti $S \setminus (A \setminus A')$ iba odstrániteľné singularity.[4] Odstráňme ich a predpokladajme, že je funkcia g na $S \setminus (A \setminus A')$ holomorfná.

Keďže pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus (S \setminus (A \setminus A')) = (\mathbb{C} \setminus S) \cup (A \setminus A')$ platí $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$, zo všeobecnej Cauchyho integrálnej vety máme

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

[3] V nasledujúcom sumujeme iba cez nenulové prvky, ktorých je konečne veľa.

[4] Dôkaz, že $S \setminus (A \setminus A')$ je skutočne oblasť, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

Pre každé $a \in A'$ ďalej zo „základnej vety o krivkových integráloch“ a definície indexu dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-a)^n\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma c_{-1}(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z =$$
$$= c_{-1}\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \operatorname{Ind}_\gamma(a)\operatorname{Res}(g_a,a) = \operatorname{Ind}_\gamma(a)\operatorname{Res}(f,a).$$

Preto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(g(z) + \sum_{a\in A'} g_a(z)\right)\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{a\in A'}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A'}\operatorname{Ind}_\gamma(a)\operatorname{Res}(f,a) = \\ &= \sum_{a\in A}\operatorname{Ind}_\gamma(a)\operatorname{Res}(f,a),\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Cauchyho princíp argumentu

Naším ďalším cieľom bude dokázať takzvaný *Cauchyho princíp argumentu*, ktorý umožňuje vyjadriť rozdiel počtu koreňov a počtu pólov nejakej meromorfnej funkcie, obkolesených jednoduchou uzavretou krivkou γ, pomocou integrálneho vzorca. Dokážeme tu iba variant implicitne využívajúci Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu; dôkaz variantu od týchto nedokázaných tvrdení nezávislého, založeného na pojme indexu, prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Nasledujúcu lemu budeme potrebovať na odôvodnenie zmysluplnosti našich ďalších tvrdení.

Lema P8.9. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, T je ohraničená množina taká, že $\overline{T} \subseteq S$ a $f \not\equiv 0$ je meromorfná na S. Potom má funkcia f v T nanajvýš konečne veľa koreňov a nanajvýš konečne veľa pólov.*

Dôkaz. Konečnosť počtu pólov možno dokázať podobne ako v dôkaze Cauchyho vety o rezíduách: množina $\overline{T}$ je kompaktná a z nekonečnosti množiny pólov A funkcie f v T by tak vyplývala existencia hromadného bodu množiny A v S. To by bol spor s lemou P8.2.

Keby mala na druhej strane funkcia f na T nekonečne veľa koreňov, rovnaká argumentácia by zaručovala existenciu hromadného bodu množiny $Z(f)$ v S; podľa vety o jednoznačnosti by bola funkcia f na S konštantne nulová, čo by bol spor s predpokladom lemy. □

Prv, než vyslovíme a dokážeme samotný Cauchyho princíp argumentu, dokážeme na ilustráciu jeho o niečo slabšiu verziu.

Tvrdenie P8.10. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $f(z) \neq 0$. Potom*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z,$$

kde $Z \in \mathbb{N}$ je počet koreňov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$, pričom koreň rádu $m \geq 1$ je započítaný m-krát.

Dôkaz. Tvrdenie dáva zmysel vďaka leme P8.9 a skutočnosti, že $\mathbf{I}(\gamma)$ je ohraničená množina taká, že $\overline{\mathbf{I}(\gamma)} = \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$.

Nech $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ je koreň funkcie f rádu $m \geq 1$. Potom na nejakom okolí $D(a,r)$ bodu a (kde $r > 0$) platí

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

kde g je holomorfná na $D(a,r)$ a $g(a) \neq 0$. Na $D(a,r)$ potom tiež

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z),$$

z čoho
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Keďže $g(a) \neq 0$, je funkcia $g'(z)/g(z)$ holomorfná v bode a, a teda $\mathrm{Res}(f'/f, a) = m$. Keďže je koreň $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ ľubovoľný a keďže je funkcia $f'(z)/f(z)$ holomorfná vo všetkých bodoch b takých, že $f(b) \neq 0$, z Cauchyho vety o rezíduách dostávame
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \mathrm{Res}(f'/f, a) = Z,$$
čo bolo treba dokázať. □

Veta P8.11 (Cauchyho princíp argumentu). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^* a pre všetky $z \in \gamma^*$ je $f(z) \neq 0$. Potom*
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z - P,$$
kde $Z \in \mathbb{N}$ je počet koreňov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$ a $P \in \mathbb{N}$ je počet pólov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$ (pričom každý koreň a pól rádu m je započítaný m-krát).

Dôkaz. Podobne ako v dôkaze tvrdenia P8.10 zisťujeme, že pre každý koreň $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcie f rádu m platí $\mathrm{Res}(f'/f, a) = m$. Nech teraz $b \in \mathbf{I}(\gamma)$ je pól funkcie f rádu $k \geq 1$. Na nejakom prstencovom okolí $D'(b, s)$ bodu b (kde $s > 0$) potom
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k},$$
kde h je holomorfná na $D'(b, s)$ a $h(b) \neq 0$. Na $D'(b, s)$ potom tiež
$$f'(z) = -k\frac{h(z)}{(z-a)^{k+1}} + \frac{h'(z)}{(z-a)^k},$$
z čoho
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$
Keďže $h(b) \neq 0$, je funkcia $h'(z)/h(z)$ holomorfná v bode b, a teda $\mathrm{Res}(f'/f, b) = -k$. Ak navyše $c \in \mathbf{I}(\gamma)$ nie je koreňom ani pólom funkcie f, je funkcia $f'(z)/f(z)$ v tomto bode holomorfná. Ak teda označíme symbolom $P(f)$ množinu všetkých pólov funkcie f, z Cauchyho vety o rezíduách dostávame
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \mathrm{Res}(f'/f, a) + \sum_{b \in P(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \mathrm{Res}(f'/f, b) = Z - P.$$
Tým je dôkaz vety dokončený. □

Poznámka P8.12. Integrál z predchádzajúcej vety možno interpretovať aj ako integrál funkcie $1/z$ pozdĺž krivky $f \circ \gamma$, čiže ako index bodu 0 vzhľadom ku krivke $f \circ \gamma$. Vďaka súvisu so spojitým výberom argumentu teda ide o „celkový nárast argumentu“ hodnoty $f(z)$ pozdĺž krivky γ; odtiaľ pomenovanie „Cauchyho princíp argumentu“.

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.

[3] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.