Prednáška č. 9: Analytické predĺženie

Peter Kostolányi

18. novembra 2019

Technika *analytického predĺženia* – do veľkej miery založená na vete o jednoznačnosti, ktorú sme už dokázali – umožňuje rozšíriť analytickú (čiže holomorfnú) funkciu f, definovanú na nejakom obore S, na „maximálny možný definičný obor“ obsahujúci S. Napríklad funkciu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

definovanú na obore $D(0,1)$, možno pomocou analytického predĺženia rozšíriť na funkciu $1/(1-z)$ definovanú na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Takto rozšírená funkcia je vždy daná jednoznačne; ukáže sa však, že môže byť aj viachodnotová. Náš doterajší prístup k viachodnotovým funkciám – spočívajúci v *ad hoc* výbere jednohodnotových vetiev – už tým pádom nebude dlhšie únosný. Namiesto toho budeme musieť zrevidovať samotné naše chápanie analytických funkcií tak, aby tento koncept prirodzene zahŕňal aj funkcie viachodnotové. Dospejeme tak k dôležitému konceptu *globálnych analytických funkcií*, ktoré budú reprezentovať vo všeobecnosti viachodnotové analytické funkcie definované na „maximálnom možnom obore“. Takéto funkcie majú aj prirodzenú geometrickú reprezentáciu v podobe takzvaných *Riemannových plôch*. Odporúčaným doplňujúcim čítaním k tejto prednáške je [2, 1, 3].

Rozšírenie oboru funkcie a viachodnotovosť

Často sa v komplexnej analýze stáva, že možno funkciu rozšíriť na väčší definičný obor, než na akom bola pôvodne definovaná. Uvažujme napríklad analytickú funkciu $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ definovanú pre všetky $z \in D(0,1)$ predpisom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Podľa štandardného vzorca pre súčet geometrického radu pre všetky $z \in D(0,1)$ máme

$$f(z) = \frac{1}{1-z};$$

funkcia $g\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ predpisom

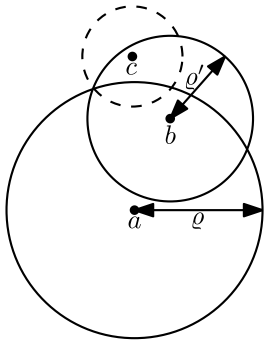
$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

je ale analytická na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Našli sme teda funkciu $g(z)$, ktorá sa na $D(0,1)$ zhoduje s funkciou f, ale jej definičný obor je väčší: $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Keďže má množina $D(0,1)$ v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ hromadný bod, z vety o jednoznačnosti vyplýva, že ide o *jedinú* funkciu $g(z)$ s touto vlastnosťou. Hovoríme, že takto definovaná funkcia $g\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ je *analytickým predĺžením* funkcie f.[1] V analytické predĺženie funkcie f na celú komplexnú rovinu $\mathbb{C}$ dúfať nemôžeme – to možno jednoducho dokázať s použitím jednoznačnosti Laurentových radov alebo prostredníctvom Liouvillovej vety.

Pre analytickú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$, kde $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, sa teda ponúkajú prirodzené otázky: možno funkciu f rozšíriť na analytickú funkciu definovanú na oblasti $T \supsetneq S$? Ak áno, z vety o jednoznačnosti vyplýva, že existuje práve jedna taká funkcia – ako ju ale možno nájsť?

Weierstrass prišiel s technikou postupného rozširovania definičného oboru analytickej funkcie založenej na nasledujúcom pozorovaní. Predpokladajme, že je funkcia f analytická v nejakom bode $a \in \mathbb{C}$. Jej Taylorov rad v bode a má potom nenulový polomer konvergencie ϱ. Zvoľme ľubovoľný bod $b \in D(a,\varrho)$. Funkcia f je v tomto bode nutne analytická, a teda je reprezentovateľná Taylorovým radom so stredom v b. Tento rad určite konverguje na $D(b, \varrho - |b-a|)$; jeho polomer konvergencie

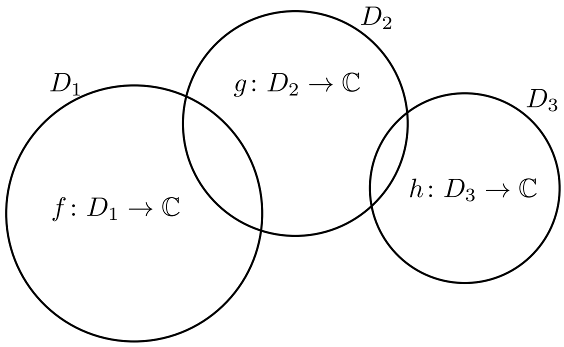
[1] Ozajstnú definíciu analytického predĺženia sformulujeme až nižšie.



Obr. P9.1: Weierstrassova technika analytického predĺženia pomocou mocninových radov.

ϱ' však niekedy môže byť aj väčší a v takom prípade sme práve rozšírili definičný obor pôvodnej analytickej funkcie. Môžeme teraz rovnaký postup opakovať s ľubovoľným ďalším bodom c nového definičného oboru. Táto situácia je znázornená na obrázku P9.1.

V skutočnosti ale pri analytickom predĺžení vôbec nie je nutné narábať s mocninovými radmi a ich polomermi konvergencie. Ak máme danú analytickú (t.j. holomorfnú) funkciu f na ľubovoľnom kruhovom okolí D_1 (prípadne aj na oblasti iného typu) a nájdeme analytickú funkciu g na nejakom inom okolí D_2 tak, že platí $D_1 \cap D_2 \neq 0$, pričom na tomto prieniku sa obidve funkcie zhodujú, našli sme jediné predĺženie funkcie f na $D_1 \cup D_2$. Tento postup môžeme ľubovoľne veľa ráz opakovať. Situácia je znázornená na obrázku P9.2.



Obr. P9.2: Základná myšlienka analytického predĺženia.

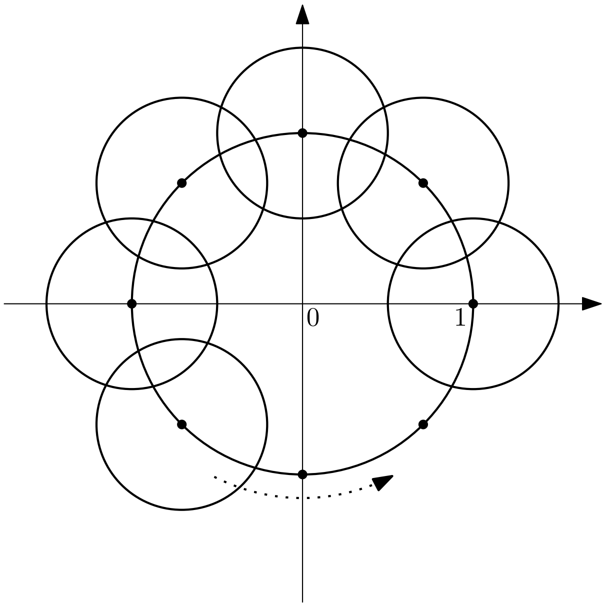
Uvidíme, že ak je možné analytickú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$ na oblasti S predĺžiť na nejakú nadoblasť $T \supseteq S$, vždy ju tam možno predĺžiť rovnakým spôsobom ako vyššie, aj keď vo všeobecnosti môže byť potrebných nekonečne veľa krokov.

Pri takomto postupnom rozširovaní funkcie sa však pomerne „zákerným“ spôsobom môže prejaviť jej *viachodnotovosť*. Nech napríklad $D_0 = D(1, 1/2)$ a $\ln_0\colon D_0 \to \mathbb{C}$ označuje holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu na D_0 takú, že $\ln_0(1) = 0$.[2] Postupne pokrývajme kladne orientovanú jednotkovú kružnicu „reťazou“ prekrývajúcich sa okolí $D_0, D_1, D_2, \dots$ o polomere $1/2$ a so stredmi

$$a_0 = 1, a_1 = e^{i\pi/4}, a_2 = e^{i\pi/2}, a_3 = e^{i3\pi/4}, a_4 = -1, \dots$$

tak, ako na obrázku P9.3. Okolie D_k sa pre všetky $k \in \mathbb{N}$ prekrýva s oblasťou D_{k+1} a ľahko vidieť, že ak pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $\ln_k\colon D_k \to \mathbb{C}$ holomorfná vetva logaritmu na D_k taká, že $\ln_k(a_k) = ik\pi/4$, tak pre všetky $z \in D_k \cap D_{k+1}$ platí $\ln_k(z) = \ln_{k+1}(z)$. Takto však postupne prídeme k okoliu D_8 so stredom v bode $a_8 = e^{i2\pi} = 1$, pre ktoré zisťujeme, že $\ln_8(1) = i2\pi$. Obkrúžením kladne orientovanej jednotkovej kružnice sme sa teda nevrátili k pôvodnej vetve prirodzeného logaritmu $\ln_0$ spĺňajúcej $\ln_0(1) = 0$, ale plynule sme prešli k inej vetve. Ľahko vidieť, že pomocou niekoľkých takýchto „obkrúžení“ kladne alebo záporne orientovanej jednotkovej kružnice by sme vedeli získať ľubovoľnú vetvu prirodzeného logaritmu (napríklad) na $D(1, 1/2)$.

[2]Ide teda o zúženie hlavnej vetvy prirodzeného logaritmu, v ktorej argument vyberáme z intervalu $(-\pi, \pi]$.



Obr. P9.3: Analytické predĺženie prirodzeného logaritmu, pri ktorom sa prejaví jeho viachodnotovosť.

Viachodnotovosť analytických funkcií už teda, zdá sa, nemôžeme ďalej zametať pod koberec. Aby pojem analytického predĺženia funkcie dával naozajstný zmysel, musíme zrevidovať samotné naše pojatie pojmu analytickej funkcie tak, aby zahŕňalo aj funkcie viachodnotové – „maximálnym" analytickým predĺžením akejkoľvek vetvy logaritmu tak bude „ozajstný viachodnotový logaritmus".

Analytické prvky a analytické predĺženie

Sformalizujeme teraz najprv základnú ideu analytického predĺženia podľa „reťazí" prekrývajúcich sa okolí, na neformálnej úrovni vysvetlenú v predchádzajúcom oddiele. Základným stavebným kameňom pre nás pritom bude takzvaný *analytický prvok* – pôjde o kruhové okolie, na ktorom je definovaná nejaká analytická funkcia. V literatúre sa však vyskytujú aj rôzne iné definície analytických prvkov – môže sa napríklad požadovať, aby polomerom kruhového okolia so stredom v $a \in \mathbb{C}$ bol polomer konvergencie Taylorovho radu danej analytickej funkcie so stredom v a; iné definície zas namiesto kruhových okolí pripúšťajú ľubovoľnú oblasť. Všetky podobné prístupy sú však vo svojej podstate ekvivalentné a líšia sa len v detailoch.

Definícia P9.1. *Analytický prvok* je dvojica (f, D), kde $D = D(a, r)$ je kruhové okolie nejakého bodu $a \in \mathbb{C}$ o polomere $r > 0$ alebo $D = D(a, \infty) := \mathbb{C}$ a $f : D \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na D. Hovoríme potom, že $a \in \mathbb{C}$ je *stredom*[3] analytického prvku (f, D) a $r > 0$ je jeho *polomerom.* Ak je navyše $S \subseteq \mathbb{C}$ oblasť a $D \subseteq S$, hovoríme, že (f, D) je *analytický prvok v oblasti* S.

Definícia P9.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f, D), (g, E)$ sú analytické prvky v S. Hovoríme, že:

a) Prvok (g, E) je *priamym analytickým predĺžením* prvku (f, D) v oblasti S, ak $D \cap E \neq \emptyset$ a pre všetky $z \in D \cap E$ platí $f(z) = g(z)$.

b) Prvok (g, E) je *analytickým predĺžením* prvku (f, D) v oblasti S, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ a postupnosť analytických prvkov $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ v S takých, že $(f_1, D_1) = (f, D)$, $(f_n, D_n) = (g, E)$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ je prvok (f_{k+1}, D_{k+1}) priamym analytickým predĺžením prvku (f_k, D_k).

Ak $S = \mathbb{C}$, hovoríme iba o *priamom analytickom predĺžení* resp. o *analytickom predĺžení.*

[3] Za stred analytického prvku s okolím $\mathbb{C}$ možno považovať každé komplexné číslo a. Ak teda budeme neskôr hovoriť o „dvojiciach analytických prvkov s rovnakým stredom", špeciálnym prípadom vždy bude taká dvojica prvkov, kde aspoň jeden z nich je s okolím $\mathbb{C}$.

Tvrdenie P9.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Relácia „byť priamym analytickým predĺžením“ v S je reflexívna a symetrická. Relácia „byť analytickým predĺžením“ v S je reláciou ekvivalencie na množine všetkých analytických prvkov.*

Dôkaz. Zrejmé. □

Tvrdenie P9.4. *Nech (f, D) je analytický prvok, E je kruhové okolie a $(g_1, E), (g_2, E)$ sú* priame *analytické predĺženia prvku (f, D). Potom $(g_1, E) = (g_2, E)$.*

Dôkaz. Ak $(g_1, E), (g_2, E)$ sú priame analytické predĺženia prvku (f, D), z definície nutne $D \cap E \neq \emptyset$ a z otvorenosti týchto dvoch množín vyplýva, že $D \cap E$ má v E hromadný bod. Navyše pre všetky $z \in D \cap E$ platí $g_1(z) = g_2(z) = f(z)$. Z vety o jednoznačnosti preto vyplýva $g_1 \equiv g_2$ na E, a teda skutočne $(g_1, E) = (g_2, E)$. □

Poznámka P9.5. Príklad prirodzeného logaritmu z úvodného oddielu ukazuje, že nemôže byť pravdivá žiadna obdoba tvrdenia P9.4 pre všeobecné – čiže nie nutne priame – analytické predĺženie. Táto skutočnosť je základným zdrojom viachodnotovosti analytických funkcií.

Ľubovoľné dva analytické prvky $(f, D), (g, E)$ také, že D a E majú rovnaký stred a pre všetky $z \in D \cap E$ platí $f(z) = g(z)$, sú očividne navzájom svojimi priamymi analytickými predĺženiami. V takom prípade píšeme $(f, D) \equiv (g, E)$ a obidva prvky aj v určitých situáciách stotožňujeme.[4] Zrejme pritom ide o reláciu ekvivalencie.

Globálne analytické funkcie

Môžeme teraz využiť definície z predchádzajúceho oddielu na zavedenie pojmu *globálnej analytickej funkcie*, ktorá bude daná nejakou ďalej nerozšíriteľnou množinou analytických prvkov takou, že každé dva prvky z tejto množiny sú vzájomne svojimi analytickými predĺženiami. Pôjde teda o funkcie definované na „maximálnom možnom obore“, ktoré vo všeobecnosti môžu byť aj viachodnotové. Neskôr definujeme aj *vetvy* globálnych analytických funkcií – a práve tento pojem sa ukáže byť vhodným zovšeobecnením konceptu analytickej funkcie do „viachodnotového sveta“.

Definícia P9.6. Nech $\mathscr{E}$ je množina všetkých analytických prvkov a $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathscr{E}$ taká, že pre dvojicu analytických prvkov (f, D), (g, E) platí $(f, D) \sim (g, E)$ práve vtedy, keď jeden z týchto prvkov je analytickým predĺžením druhého. *Globálna analytická funkcia* je ľubovoľná trieda ekvivalencie $\mathbf{f}$ relácie $\sim$, čiže ľubovoľný prvok $\mathbf{f} \in \mathscr{E}/\sim$.

Často býva užitočné pracovať aj s „lokálnymi globálnymi analytickými funkciami“, čiže s obdobou globálnych analytických funkcií definovanou na základe analytického predĺženia v nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. Takéto funkcie budeme (nešťastne) volať *globálnymi analytickými funkciami v S*.

Definícia P9.7. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathscr{E}_S$ je množina všetkých analytických prvkov v S a $\sim_S$ je relácia ekvivalencie na $\mathscr{E}_S$ taká, že pre analytické prvky (f, D), (g, E) v S platí $(f, D) \sim_S (g, E)$ práve vtedy, keď je jeden z nich analytickým predĺžením v S toho druhého. *Globálna analytická funkcia v oblasti S* je ľubovoľná trieda ekvivalencie $\mathbf{f}$ relácie $\sim_S$, čiže ľubovoľný prvok $\mathbf{f} \in \mathscr{E}_S/\sim_S$.

Poznámka P9.8. Globálna analytická funkcia je teda globálna analytická funkcia na oblasti $\mathbb{C}$.

Každá globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ (v oblasti S) je teda nejaká množina analytických prvkov (v oblasti S), pričom pre každé $(f, D) \in \mathbf{f}$ do $\mathbf{f}$ patria práve všetky analytické prvky, ktoré sú analytickým predĺžením (f, D) (v oblasti S). Pracovať priamo s touto formálnou definíciou by ale bolo značne ťažkopádne. Zavedieme preto terminológiu a notáciu, ktorá bude mať bližšie k intuitívnej predstave o globálnej analytickej funkcii.

[4]Stotožnenie takýchto dvojíc analytických prvkov vychádza z pôvodného Weierstrassovho pojatia analytických prvkov, kde je funkcia f daná mocninovým radom v nejakom bode a a zodpovedajúcim okolím D je $D(a, \varrho)$ pre polomer konvergencie ϱ tohto mocninového radu. Vďaka vete o Taylorových radoch je potom $D(a, \varrho)$ jednoznačne daným maximálnym okolím D so stredom v bode a takým, že (f, D) je analytický prvok. Všetky ostatné analytické prvky tohto typu teda môžeme s prvkom (f, D) bez veľkej ujmy stotožniť.

Nech $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. *Definičným oborom* funkcie $\mathbf{f}$ nazveme zjednotenie všetkých množín D takých, že $\mathbf{f}$ obsahuje nejaký prvok (f, D). Ľahko vidieť, že tento definičný obor je opäť oblasť. Pre všetky z z definičného oboru funkcie $\mathbf{f}$ označíme $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ množinu všetkých hodnôt funkcie $\mathbf{f}$ v bode z, danú ako

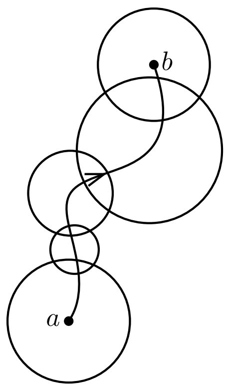
$$[\![\mathbf{f}(z)]\!] = \{f(z) \mid (f, D) \in \mathbf{f};\ z \in D\}.$$

Ak je v nejakom bode z definičného oboru funkcie $\mathbf{f}$ množina $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ jednoprvková, hovoríme, že funkcia $\mathbf{f}$ je v bode z *jednohodnotová*; inak hovoríme, že je *viachodnotová*. Na príklade prirodzeného logaritmu vidieť, že globálna analytická funkcia môže naozaj byť aj viachodnotová. Ak je globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ na oblasti S jednohodnotová v každom bode $z \in S$, stotožňujeme túto funkciu s „bežnou“ – a očividne analytickou – funkciou $f\colon S \to \mathbb{C}$ takou, že pre všetky $z \in S$ je $f(z)$ dané ako jediný prvok $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$. *Vetvou* funkcie $\mathbf{f}$ na oblasti $T \subseteq S$ nazveme ľubovoľnú globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}_T$ na oblasti T takú, že $\mathbf{f}_T \subseteq \mathbf{f}$. Ľahko možno dokázať, že špeciálne každý analytický prvok $(f, D) \in \mathbf{f}$ je – po stotožnení s globálnou analytickou funkciou na D – jednohodnotovou vetvou funkcie $\mathbf{f}$. Zneužívajúc terminológiu tiež hovoríme, že $\mathbf{f}$ je *analytickým predĺžením* ľubovoľnej svojej vetvy (a teda aj ľubovoľného svojho analytického prvku).

Napriek svojej pomerne ťažkopádnej definícii je pojem vetvy globálnej analytickej funkcie prirodzeným rozšírením pojmu analytickej funkcie, ako sme ho chápali doteraz.

Analytické predĺženie pozdĺž krivky

V úvodnom oddiele sme holomorfnú vetvu logaritmu analyticky predlžovali pozdĺž jednotkovej kružnice – videli sme pritom, že orientácia a počet jej „obkrúžení“ zohrávali rozhodujúcu úlohu v tom, akú vetvu sme nakoniec získali. Myšlienku takéhoto *analytického predĺženia pozdĺž krivky* teraz sformalizujeme – pôjde o predĺženie, v ktorom jednotlivé analytické prvky vyberáme tak, aby ich stredy ležali na danej krivke, pričom stredom prvého okolia je počiatočný bod a stredom posledného okolia je koncový bod tejto krivky, ako na obrázku P9.4. Dokážeme, že analytické predĺženie pozdĺž krivky skutočne závisí iba od tejto krivky a nie od konkrétneho výberu analytických prvkov pozdĺž nej.



Obr. P9.4: Analytické predĺženie pozdĺž krivky z bodu a do bodu b.

Definícia P9.9. Nech (f, D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$ a (g, E) je analytický prvok so stredom $b \in \mathbb{C}$. Nech $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je krivka. Hovoríme, že prvok (g, E) je *analytickým predĺžením* prvku (f, D) *pozdĺž krivky* γ, ak existuje $n \in \mathbb{N}$, reálne čísla $\alpha = t_0 \leq \ldots \leq t_n = \beta$ a analytické prvky $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

(*i*) Platí $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$, $(f_1, D_1) = (f, D)$ a $(f_n, D_n) = (g, E)$.

(*ii*) Pre $k = 1, \ldots, n$ platí $(\gamma \restriction [t_{k-1}, t_k])^* \subseteq D_k$ a stred okolia D_k leží v γ^*.

(*iii*) Pre $k = 1, \ldots, n-1$ je (f_{k+1}, D_{k+1}) priamym analytickým predĺžením prvku (f_k, D_k).

Poznámka P9.10. Hodnoty $t_0, \ldots, t_n$ z predchádzajúcej definície je vždy možné bez ujmy na všeobecnosti predpokladať po dvoch rôzne tak, aby platilo $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ (a to aj v prípade zhodnosti niektorých okolí).

Poznámka P9.11. *Každé* analytické predĺženie možno chápať ako analytické predĺženie pozdĺž krivky, ba dokonca pozdĺž lomenej čiary. Stačí pospájať úsečkami stredy analytických prvkov vystupujúcich v definícii analytického predĺženia.

Dokážeme teraz tvrdenie, podľa ktorého je „výsledok“ analytického predĺženia pevne daného analytického prvku (f, D) podľa pevne danej krivky γ jednoznačne daný – ľubovoľné dve analytické predĺženia (f, D) pozdĺž γ sú v relácii $\equiv$.

Tvrdenie P9.12. *Nech (f, D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\gamma(\alpha) = a$ a $(g_1, E_1), (g_2, E_2)$ sú analytické predĺženia (f, D) pozdĺž γ. Potom $(g_1, E_1) \equiv (g_2, E_2)$.*

Dôkaz. Nech $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ sú analytické prvky z definície P9.9, vďaka ktorým je (g_1, E_1) analytickým predĺžením (f, D); nech $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ sú zodpovedajúce indexy. Nech $(\hat{f}_1, \hat{D}_1), \ldots, (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$ sú takéto analytické prvky pre (g_2, E_2) a $\alpha = \hat{t}_0 < \ldots < \hat{t}_m = \beta$ sú zodpovedajúce indexy. Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ je okolie $D[t] := D(\gamma(t), \varepsilon)$ súčasne podmnožinou D_k pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $t \in [t_{k-1}, t_k]$ a podmnožinou $\hat{D}_j$ pre nejaké $j \in \{1, \ldots, m\}$ také, že $t \in [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$.[5]

Hodnotami zodpovedajúcej funkcie f_k je potom *jednoznačne určená* (jednohodnotová) holomorfná funkcia $f[t]\colon D[t] \to \mathbb{C}$; ak totiž nejaké t patrí do dvoch intervalov, t.j. $t = t_k$ pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n\}$, tak z definície analytického predĺženia vyplýva, že funkcie f_k a f_{k+1} majú na $D[t_k]$ rovnaké hodnoty. Rovnakým spôsobom, akurát prostredníctvom okolí $\hat{D}_j$ a funkcií $\hat{f}_j$, môžeme definovať holomorfnú funkciu $\hat{f}[t]\colon D[t] \to \mathbb{C}$. V nasledujúcom tak môžeme skúmať analytické prvky $(f[t], D[t])$ a $(\hat{f}[t], D[t])$ v závislosti na parametre $t \in [\alpha, \beta]$.

Stačí dokázať $(f[\beta], D[\beta]) = (\hat{f}[\beta], D[\beta])$. Platí totiž $D[\beta] \subseteq D_n = E_1$ a súčasne $D[\beta] \subseteq \hat{D}_m = E_2$. Z konštrukcie funkcií $f[t]$ a $\hat{f}[t]$ pre $t \in [\alpha, \beta]$ navyše vyplýva, že funkcia $f[\beta]$ sa na $D[\beta]$ zhoduje s $f_n \equiv g_1$ a $\hat{f}[\beta]$ sa na D_m zhoduje s $\hat{f}_m \equiv g_2$. Ak teda $f[\beta] \equiv \hat{f}[\beta]$, funkcie g_1 a g_2 sa zhodujú na množine $D[\beta]$, ktorá má v $E_1 \cap E_2$ aspoň jeden hromadný bod. Podľa vety o jednoznačnosti sa teda g_1 a g_2 zhodujú na $E_1 \cap E_2$, a teda skutočne $(g_1, E_1) \equiv (g_2, E_2)$.

Keďže $D[\alpha] \subseteq D_1 = D$, $D[\alpha] \subseteq \hat{D}_1 = D$, funkcia $f[\alpha]$ sa na $D[\alpha]$ zhoduje s $f_1 \equiv f$ a funkcia $\hat{f}[\alpha]$ sa na $D[\alpha]$ zhoduje s $\hat{f}_1 \equiv f$, nutne $(f[\alpha], D[\alpha]) = (\hat{f}[\alpha], D[\alpha])$. Môžeme teda definovať

$$\tau := \sup \Big\{ t_0 \in [\alpha, \beta] \;\Big|\; \forall t \in [\alpha, t_0] : (f[t], D[t]) = (\hat{f}[t], D[t]) \Big\}$$

a na dôkaz tvrdenia stačí ukázať, že $\tau = \beta$.

Sporom, nech $\tau < \beta$. Potom existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $\tau \in [t_{k-1}, t_k)$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ také, že $\tau \in [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j)$ – teda okrem iného $D[\tau] \subseteq D_k$ a $D[\tau] \subseteq \hat{D}_j$. Ak navyše $k = 1$, tak $\tau > t_0 = \alpha$ a rovnako v prípade $j = 1$; pre $t \in [\alpha, \min\{t_1, \hat{t}_1\}]$ sa totiž obidve funkcie $f[t]$ a $\hat{f}[t]$ na $D[t] \cap D$ zhodujú s funkciou f, pretože $(D_1, f_1) = (\hat{D}_1, \hat{f}_1) = (D, f)$. Množina $D \cap D[t]$ má však v každom takomto $D[t]$ hromadný bod a z vety o jednoznačnosti tak vyplýva zhodnosť $f[t]$ a $\hat{f}[t]$ na $D[t]$.

V takom prípade ale možno vziať $\delta > 0$ a okolie $D_{/2}[\tau - \delta] := D(\gamma(\tau - \delta), \varepsilon/2)$ také, že (ak za účelom pohodlnejšej notácie zavedieme označenie $t_{-1} := t_0 = \alpha$ a $\hat{t}_{-1} := \hat{t}_0 = \alpha$) súčasne platí $\tau - \delta \geq t_{k-2}$, $\tau - \delta \geq \hat{t}_{j-2}$, $\tau - \delta \in D_k \cap \hat{D}_j$, $\tau + \delta \leq t_k$, $\tau + \delta \leq \hat{t}_j$ a $D_{/2}[\tau - \delta] \subseteq D[\tau + \delta]$.

Z definície τ ale na druhej strane vyplýva $(f[\tau - \delta], D[\tau - \delta]) = (\hat{f}[t - \delta], D[t - \delta])$, pričom však $D_{/2}[\tau - \delta] \subseteq D[\tau - \delta]$. Na $D_{/2}[\tau - \delta]$ sa teda funkcie $f[\tau - \delta]$ a $\hat{f}[t - \delta]$ zhodujú. Keďže ale $t - \delta \in [t_{k-2}, t_k] \cap [\hat{t}_{j-2}, \hat{t}_j]$ a súčasne $\gamma(t - \delta) \in D_k \cap \hat{D}_j$, pre všetky $z \in D_k \cap \hat{D}_j \cap D_{/2}[\tau - \delta]$ platí $f[\tau - \delta](z) = f_k(z)$ a $\hat{f}[\tau - \delta](z) = \hat{f}_j(z)$. Keďže má ale množina $D_k \cap \hat{D}_j \cap D_{/2}[\tau - \delta]$ v $D_k \cap \hat{D}_j$ hromadný bod, musia sa na celom $D_k \cap \hat{D}_j$ zhodovať aj funkcie f_k a $\hat{f}_j$.

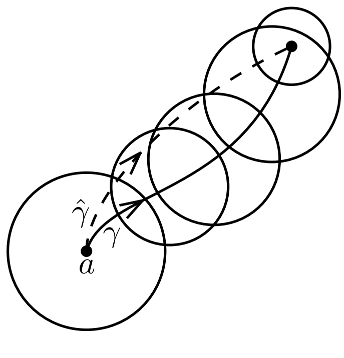
[5] Príslušnosť okolí D_k k intervalom obsahujúcim t je potrebné zdôrazniť, pretože krivka γ nemusí byť jednoduchá. Môžu teda existovať $t, t' \in [\alpha, \beta]$ také, že $t \neq t'$, ale $\gamma(t) = \gamma(t')$ a v takom prípade tento bod patrí do „okolí zodpovedajúcich t“, ako aj do „okolí zodpovedajúcich t'“. Je ich teda nutné medzi sebou odlíšiť.

Keďže nakoniec $\tau + \delta \in [t_{k-1}, t_k] \cap [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$, musí mať množina $D_k \cap \hat{D}_j \cap D[\tau + \delta]$ hromadný bod v $D[\tau + \delta]$, pričom pre $z \in D_k \cap \hat{D}_j \cap D[\tau + \delta]$ platí $f[\tau + \delta](z) = f_k(z) = \hat{f}_j(z) = \hat{f}[\tau + \delta](z)$. Z toho podľa vety o jednoznačnosti vyplýva zhodnosť funkcií $f[\tau+\delta]$ a $\hat{f}[\tau+\delta]$ na $D[\tau+\delta]$, a teda aj rovnosť $(f[\tau + \delta], D[\tau + \delta]) = (\hat{f}[\tau + \delta], D[\tau + \delta])$. Číslo δ ale môže byť ľubovoľne malé – dostávame teda spor s definíciou τ. $\square$

Dôsledok P9.13. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f, D), (g, E)$ sú analytické prvky v S také, že (g, E) je analytickým predĺžením (f, D) pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$. Potom je (g, E) analytickým predĺžením (f, D) v oblasti S.*

Dôkaz. Vďaka predchádzajúcemu tvrdeniu „výsledok“ analytického predĺženia pozdĺž krivky γ nezávisí od konkrétnej voľby analytických prvkov $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ v definícii P9.9. Ak sú potom $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ ľubovoľné analytické prvky, vďaka ktorým je (g, E) analytickým predĺžením (f, D) pozdĺž γ, možno vďaka kompaktnosti množiny γ^* nájsť $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ platí $D(z, \varepsilon) \subseteq S \cap (D_1 \cup \ldots \cup D_n)$. Následne možno, opäť vďaka kompaktnosti γ^*, vziať nejaké konečné pokrytie $\{\hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_{m-1}\}$ množiny γ^* okoliami takéhoto typu, kde $\gamma(\alpha) \in \hat{D}_2$ a $\gamma(\beta) \in \hat{D}_{m-1}$. Okolia $\hat{D}_1$ a $\hat{D}_m$ dodefinujeme ako $\hat{D}_1 := D_1 = D$ a $\hat{D}_m := D_n = E$. Pre $k = 1, \ldots, m$ potom možno funkciu $\hat{f}_k\colon \hat{D}_k \to \mathbb{C}$ korektne definovať pre všetky $z \in \hat{D}_k$ ako $\hat{f}_k(z) = f_j(z)$ kde $j \in \{1, \ldots, n\}$ je ľubovoľné také, že $z \in D_j$. Ľahko vidieť, že $(\hat{f}_1, \hat{D}_1), \ldots, (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$ je postupnosť analytických prvkov, vďaka ktorým je (g, E) analytickým predĺžením (f, D) v oblasti S. $\square$

V definícii analytického predĺženia pozdĺž krivky sme – najmä kvôli súladu tohto pojmu s intuíciou – požadovali, aby stredy jednotlivých analytických prvkov ležali na danej krivke. Dokážeme teraz tvrdenie, podľa ktorého je táto podmienka nepodstatná za predpokladu, že je krivka stále jednotlivými analytickými prvkami pokrytá. Jeho znenie je znázornené aj na obrázku P9.5.



Obr. P9.5: Tvrdenie P9.14.

Tvrdenie P9.14. *Nech (f, D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\gamma(\alpha) = a$, (g, E) je analytické predĺženie (f, D) pozdĺž γ a $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ sú analytické prvky zodpovedajúce tomuto predĺženiu podľa definície P9.9. Nech $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\hat{\gamma}(\hat{\alpha}) = \gamma(\alpha)$ a $\hat{\gamma}(\hat{\beta}) = \gamma(\beta)$, pričom existujú čísla $\alpha = \hat{t}_0 < \ldots < \hat{t}_n = \beta$ také, že pre $k = 1, \ldots, n$ pre krivku $\hat{\gamma}_k := \hat{\gamma} \restriction [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$ platí $\hat{\gamma}_k^* \subseteq D_k$. Potom existuje analytické predĺženie $(\hat{g}, \hat{E})$ prvku (f, D) pozdĺž $\hat{\gamma}$ a platí $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (g, E)$.*

Dôkaz. Myšlienka dôkazu spočíva v pokrytí krivky $\hat{\gamma}$ dostatočne malými okoliami tak, aby každé z týchto okolí bolo podmnožinou niektorého z okolí $D_1, \ldots, D_n$. Následne možno skúmať analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\hat{\gamma}$, využívajúce tieto okolia – vďaka tvrdeniu P9.12 na výbere okolí nezáleží.

Presnejšie: keďže je pre $k = 1, \ldots, n$ množina $\hat{\gamma}_k^* \subseteq D_k$ kompaktná, existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \hat{\gamma}_k^*$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq D_k$. Vďaka kompaktnosti $\hat{\gamma}_k^*$ potom existuje aj nejaké *konečné* pokrytie $\hat{\gamma}_k^*$ okoliami tohto typu. Po vybraní takéhoto konečného pokrytia pre každú z kriviek $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$ zisťujeme, že existujú čísla $\hat{\alpha} = s_0 < \ldots < s_m = \hat{\beta}$ a pre $j = 1, \ldots, m$ okolie $\hat{D}_j$ so stredom v $\hat{\gamma}_k^*$ pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $(\hat{\gamma} \restriction [s_{j-1}, s_j])^* \subseteq \hat{D}_j$ a $\hat{D}_j \subseteq D_k$.

Navyše môžeme predpokladať, že stredom okolia $\hat{D}_1$ je bod $\hat{\gamma}(\alpha) = a$ a stredom okolia $\hat{D}_m$ je bod $\hat{\gamma}(\beta)$ – platnosť tohto predpokladu sa vždy dá zabezpečiť pridaním najviac dvoch nových okolí.

Pre $j = 1, \ldots, m$ existuje aspoň jedno $k \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $\hat{D}_j$ má stred v $\hat{\gamma}_k^*$ a $\hat{D}_j \subseteq D_k$; nech $\hat{f}_j$ je zúženie holomorfnej funkcie f_k na $\hat{D}_j$. Dokážeme, že postupnosť analytických prvkov $(f, D), (\hat{f}_1, \hat{D}_1), \ldots, (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$ udáva analytické predĺženie $(\hat{g}, \hat{E})$ prvku (f, D) pozdĺž krivky $\hat{\gamma}$ také, že $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (g, E)$. Na to stačí ukázať, že skutočne ide o analytické predĺženie – z konštrukcie analytických prvkov $(\hat{f}_1, \hat{D}_1), \ldots, (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$ už potom priamo vyplynie, že funkcia $\hat{f}_m = \hat{g}$ sa na $\hat{D}_m = \hat{E}$ zhoduje s funkciou $f_n = g$, a teda naozaj $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (g, E)$.

Potrebujeme teda dokázať, že v postupnosti analytických prvkov

$$(f, D), (\hat{f}_1, \hat{D}_1), \ldots, (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$$

sú každé dva po sebe idúce analytické prvky navzájom svojimi priamymi analytickými predĺženiami. Keďže $\hat{D}_1 \subseteq D_1 = D$ a $\hat{f}_1$ je zúžením $f_1 = f$ na $\hat{D}_1$, je prvok $(\hat{f}_1, \hat{D}_1)$ priamym analytickým predĺžením prvku (f, D). Zostáva teda ukázať, že pre $j = 1, \ldots, m-1$ je prvok $(\hat{f}_{j+1}, \hat{D}_{j+1})$ priamym analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}_j, \hat{D}_j)$. Nech j je dané a $k \in \{1, \ldots, n\}$ je také, že $\hat{D}_j \subseteq D_k$ a $\hat{f}_j$ je zúžením f_k na $\hat{D}_j$. Potom sú dve možnosti: buď aj $\hat{D}_{j+1} \subseteq D_k$ a $\hat{f}_{j+1}$ je zúžením f_k na $\hat{D}_{j+1}$, alebo $k < n$, $\hat{D}_{j+1} \subseteq D_{k+1}$ a $\hat{f}_{j+1}$ je zúžením f_{k+1} na $\hat{D}_{j+1}$. V prvom prípade je zhodnosť $\hat{f}_j$ a $\hat{f}_{j+1}$ na $\hat{D}_j \cap \hat{D}_{j+1}$ zrejmá. V druhom prípade musí byť $\hat{D}_j \cap \hat{D}_{j+1}$ podmnožinou $D_k \cap D_{k+1}$, pričom na tomto prieniku sa funkcie f_k a f_{k+1} zhodujú; na $\hat{D}_j \cap \hat{D}_{j+1}$ sa teda musia zhodovať aj funkcie $\hat{f}_j$ a $\hat{f}_{j+1}$. V oboch prípadoch je teda $(\hat{f}_{j+1}, \hat{D}_{j+1})$ priamym analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}_j, \hat{D}_j)$, čo bolo treba dokázať. □

Jednohodnotové globálne analytické funkcie

Analytický prvok so stredom v bode a z nejakej oblasti S nazveme *neobmedzene predĺžiteľným* v S, ak existuje jeho analytické predĺženie pozdĺž ľubovoľnej krivky v oblasti S začínajúcej v bode a.

Definícia P9.15. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a (f, D) je analytický prvok v S so stredom $a \in \mathbb{C}$. Hovoríme, že prvok (f, D) je *neobmedzene predĺžiteľný v S*, ak pre ľubovoľnú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ takú, že $\gamma^* \subseteq S$ a $\gamma(\alpha) = a$ existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ.

Zaviedli sme už konvenciu stotožňovania jednohodnotových globálnych analytických funkcií $\mathbf{f}$ v oblasti S s „bežnými" analytickými funkciami $f\colon S \to \mathbb{C}$ – každá jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S totiž zrejme takúto funkciu f definuje. Ukážeme teraz, že aj naopak ku každej „bežnej" analytickej funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$ zodpovedá jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S; každý analytický prvok tejto funkcie je navyše v S neobmedzene predĺžiteľný. Toto pozorovanie – ktoré pre jeho dôležitosť sformulujeme ako vetu – umožňuje pojmy „bežnej" analytickej funkcie na S a jednohodnotovej globálnej analytickej funkcie v S nadobro stotožniť.

Veta P9.16. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná funkcia. Potom existuje jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S taká, že pre všetky $z \in S$ platí $[\![\mathbf{f}(z)]\!] = \{f(z)\}$. Každý analytický prvok $\mathbf{f}$ je neobmedzene predĺžiteľný v S a $\mathbf{f} = \{(f, D) \mid \exists a \in S\ \exists r > 0\colon D = D(a, r) \subseteq S\}$.*[6]

Dôkaz. Nech $a \in S$, $r > 0$ a $D = D(a, r)$ je kruhové okolie také, že $D \subseteq S$. Zrejme stačí dokázať, že pre ľubovoľnú voľbu takéhoto D je analytický prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S, pričom pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = b$ je analytickým predĺžením prvku (f, D) pozdĺž γ prvok (f, E) pre nejaké $E = D(b, s)$, kde $s > 0$ a $E \subseteq S$.

Nech je ale takáto krivka γ daná. Uvažujme pokrytie krivky γ okoliami $D_1, \ldots, D_n \subseteq S$ so stredmi v γ^* takými, že $D_1 = D$ a pre nejaké reálne čísla $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ a $k = 1, \ldots, n$ platí $(\gamma \restriction [t_{k-1}, t_k])^* \subseteq D_k$. Potom $(f, D_1) = (f, D)$ a ľahko vidieť, že pre $k = 1, \ldots, n-1$ je analytický prvok (f, D_{k+1}) priamym analytickým predĺžením prvku (f, D_k). Preto je analytickým predĺžením prvku (f, D) pozdĺž γ prvok (f, D_n), pričom zrejme $(f, D_n) \equiv (f, E)$. Preto je (f, E) naozaj (až na $\equiv$ jediným) analytickým predĺžením (f, D) pozdĺž γ. Keďže γ môže byť ľubovoľná krivka s danými vlastnosťami, je prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S. □

[6]Kde v dvojici (f, D) uvažujeme zúženie funkcie f na kruhové okolie D.

Homotópie ešte raz

Po čase budeme opäť operovať s pojmom homotopických kriviek. Na tejto prednáške ale budeme potrebovať mierne odlišný variant homotópií, než v súvislosti s Cauchyho integrálnou vetou: jednak budeme pracovať s krivkami, ktoré nemusia byť po častiach hladké a predovšetkým nás namiesto homotopických uzavretých kriviek budú zaujímať hlavne homotopické dvojice ľubovoľných kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Začnime s definíciou elementárnych deformácií a homotopických kriviek pre dvojice kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Definícia P9.17. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ sú krivky také, že $\gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\hat{\alpha})$, $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\hat{\beta})$ a $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že krivka $\hat{\gamma}$ vznikne z γ *elementárnou deformáciou* v S, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ a po častiach hladké krivky $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

(*i*) Pre $k = 1, \dots, n$ existuje *konvexná* oblasť $S_k \subseteq S$ taká, že $\gamma_k^*, \hat{\gamma}_k^* \subseteq S_k$.

(*ii*) Platí $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 + \ldots + \hat{\gamma}_n$.

Krivky γ a $\hat{\gamma}$ sú *homotopické* v S, ak $\hat{\gamma}$ vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií.

Cvičenie P9.18. Je zrejmé, že v duchu definície z prednášky o Cauchyho integrálnej vete by sme mohli definovať aj homotopické uzavreté (avšak nie nutne po častiach hladké) krivky. Podobne ako na cvičeniach venovaných homotópiám by sme navyše mohli sformulovať alternatívnu definíciu homotopických kriviek – či už s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi, alebo uzavretých – prostredníctvom spojitých deformácií (homotópií). Všetky tieto priamočiare úkony prenechávame čitateľovi ako cvičenie.

Takéto množstvo rozličných pohľadov na homotopické krivky má celkom samozrejme za následok, že aj jednoducho súvislé oblasti možno charakterizovať rozličnými spôsobmi. Niektoré z týchto charakterizácií teraz dokážeme.[7] Intuitívne by mali byť všetky uvedené tvrdenia zrejmé.

Tvrdenie P9.19. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(*ii*) *Každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

(*iii*) *Každá uzavretá po častiach hladká krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

(*iv*) *Každá uzavretá lomená čiara γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

Dôkaz. Tvrdenie (*iii*) je našou definíciou po častiach hladkých kriviek. Je ďalej zrejmé, že (*ii*) implikuje (*iii*) a (*iii*) implikuje (*iv*). Zostáva dokázať, že (*iv*) implikuje (*ii*). Ak však pokryjeme uzavretú krivku γ konečným počtom okolí typu $D(z, \varepsilon)$, kde $z \in \gamma^*$ a $\varepsilon > 0$ je také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$, môžeme v každom z týchto okolí nahradiť daný úsek krivky γ úsečkou, pričom pôjde o elementárnu deformáciu. *Každá krivka v každej oblasti S je teda homotopická s nejakou lomenou čiarou*, a tvrdenie (*iv*) teda skutočne implikuje (*ii*). □

Tvrdenie P9.20. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(*ii*) *Každé dve uzavreté krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

(*iii*) *Každé dve uzavreté po častiach hladké krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

(*iv*) *Každé dve uzavreté lomené čiary γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

[7] Operujeme v nich aj s variantmi homotópií spomínanými v rámci cvičenia P9.18. Predpokladáme teda, že čitateľ toto cvičenie úspešne zvládol.

Dôkaz. Tvrdenia (*ii*) až (*iv*) sú navzájom ekvivalentné podľa rovnakej argumentácie, ako v predchádzajúcom tvrdení. Zostáva dokázať, že napríklad tvrdenie (*ii*) je ekvivalentné jednoduchej súvislosti oblasti S. Ak sú však všetky dvojice uzavretých kriviek homotopické v S, je nutne každá uzavretá krivka homotopická aj s nejakým bodom (t.j. degenerovanou uzavretou krivkou). Ak je naopak každá uzavretá krivka homotopická v S s nejakým bodom v S, je homotopická s *každým* bodom v S, pretože v súvislej oblasti môžeme každú dvojicu bodov spojiť lomenou čiarou a túto čiaru pokryť okoliami slúžiacimi ako konvexné oblasti pre postupnosť niekoľkých elementárnych deformácií. Tvrdenie (*ii*) tak dostávame s využitím tranzitívnosti relácie „byť homotopický v S“. □

Na dôkaz poslednej z charakterizácií potrebujeme jednu pomocnú lemu, ktorá je však zaujímavým tvrdením sama o sebe.

Lema P9.21. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ a $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$ a $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = a$ je uzavretá krivka. Potom je krivka γ homotopická v S s bodom a ako uzavretá krivka práve vtedy, keď sú γ s a homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.*

Dôkaz. Implikácia „sprava doľava“ je triviálna. Stačí teda dokázať, že homotopickosť γ s a, chápaných ako uzavreté krivky, v oblasti S, má za následok, že sú γ s a homotopické v S aj ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že aj bod a je daný uzavretou krivkou parametrizovanou intervalom $[\alpha,\beta]$. Využime teraz charakterizáciu homotopických uzavretých kriviek pomocou homotópie[8]

$$H\colon [0,1] \times [\alpha,\beta] \to S,$$

čo je v tomto prípade spojité zobrazenie také, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ je $H(\tau,\cdot)$ uzavretá krivka, pričom $H(0,\cdot) = \gamma$ a $H(1,\cdot) = a$.

Uvažujme krivku $\hat{\gamma}\colon [\alpha-1,\beta+1] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [\alpha-1,\beta+1]$ takto:

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} a & \text{ak } t \in [\alpha-1,\alpha], \\ \gamma(t) & \text{ak } t \in [\alpha,\beta], \\ a & \text{ak } t \in [\beta,\beta+1]. \end{cases}$$

Je zrejmé, že $\hat{\gamma}$ s γ sú homotopické krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi (v oblasti S). Stačí preto dokázať, že $\hat{\gamma}$ a a sú homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi. Tu môžeme využiť homotópiu H a definovať zobrazenie

$$\hat{H}\colon [0,1] \times [\alpha-1,\beta+1] \to S$$

pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha-1,\beta+1]$ takto:

$$\hat{H}(\tau,t) = \begin{cases} H(t-\alpha+1,\alpha) & \text{ak } t \in [\alpha-1,\alpha-1+\tau], \\ H(\tau,\alpha) & \text{ak } t \in [\alpha-1+\tau,\alpha], \\ H(\tau,t) & \text{ak } t \in [\alpha,\beta], \\ H(\tau,\beta) & \text{ak } t \in [\beta,\beta+1-\tau], \\ H(\beta+1-t,\beta) & \text{ak } t \in [\beta+1-\tau,\beta+1]. \end{cases}$$

Zrejme ide o homotópiu kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi – pre všetky $\tau \in [0,1]$ totiž $\hat{H}(\tau,\alpha-1) = a$ a $\hat{H}(\tau,\beta+1) = a$.[9] Navyše $\hat{H}(0,\cdot) = \hat{\gamma}$ a – keďže trajektória bodu $\gamma(\alpha) = a$ je pri homotópii H rovnaká ako trajektória (toho istého) bodu $\gamma(\beta) = a$, existuje uzavretá krivka γ_a s počiatočným a zároveň koncovým bodom a taká, že $\hat{H}(1,\cdot) = \gamma_a + (-\gamma_a)$. Krivky $\hat{\gamma}$ a $\gamma_a + (-\gamma_a)$ sú teda homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Krivka $\gamma_a + (-\gamma_a)$ je evidentne homotopická v S s bodom a (pričom ide o homotópiu kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi). V dôsledku toho sú teda v S homotopické, ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi, aj $\hat{\gamma}$ s a a γ s a. Tým je dôkaz lemy dokončený. □

[8] Ide o súčasť cvičenia P9.18.

[9] Je opäť súčasťou cvičenia P9.18 dokázať, že existencia takéhoto zobrazenia je ekvivalentná s definíciou homotopických kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi pomocou elementárnych deformácií.

Tvrdenie P9.22. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(*ii*) *Každé dve krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

(*iii*) *Každé dve po častiach hladké krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

(*iv*) *Každé dve lomené čiary γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

Dôkaz. Rovnaká argumentácia ako v tvrdení P9.19 opäť dokazuje ekvivalenciu tvrdení (*ii*) až (*iv*). Zostáva dokázať ekvivalenciu týchto tvrdení s tvrdením (*i*).

Ak sú však každé dve krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi homotopické v S, je špeciálne aj každá uzavretá krivka v S homotopická s nejakým bodom na tejto krivke. Tieto krivky homotopické ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické aj ako uzavreté krivky a oblasť S je jednoducho súvislá.

Nech je naopak oblasť S jednoducho súvislá – dokážeme, že platí (*ii*). Uvažujme krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, so spoločným počiatočným bodom $a \in S$ a spoločným koncovým bodom $b \in S$. Krivka $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ je uzavretá, a teda homotopická s bodom a ako uzavretá krivka. Podľa lemy P9.21 sú krivky $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ a a homotopické aj ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Krivka γ_1 je očividne homotopická s krivkou $\gamma_1 + b$; bod b je navyše homotopický s krivkou $(-\gamma_2)+\gamma_2$. V dôsledku toho je krivka γ_1 homotopická s krivkou $\gamma_1+(-\gamma_2)+\gamma_2$ a z vyššie dokázaného vyplýva, že táto krivka je homotopická s krivkou $a+\gamma_2$, ktorá je triviálne homotopická s γ_2. Krivky γ_1 a γ_2 sú teda homotopické, čo bolo treba dokázať. □

Veta o monodrómii

Skončíme dôkazom *vety o monodrómii*, ktorá sa právom pokladá za jednu z najdôležitejších viet o analytickom predĺžení. Hovorí nasledujúce: ak je oblasť S *jednoducho súvislá* a nejaká globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S obsahuje analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v S, tak je funkcia $\mathbf{f}$ na S jednohodnotová a splýva s „bežnou“ holomorfnou funkciou $f\colon S \to \mathbb{C}$.

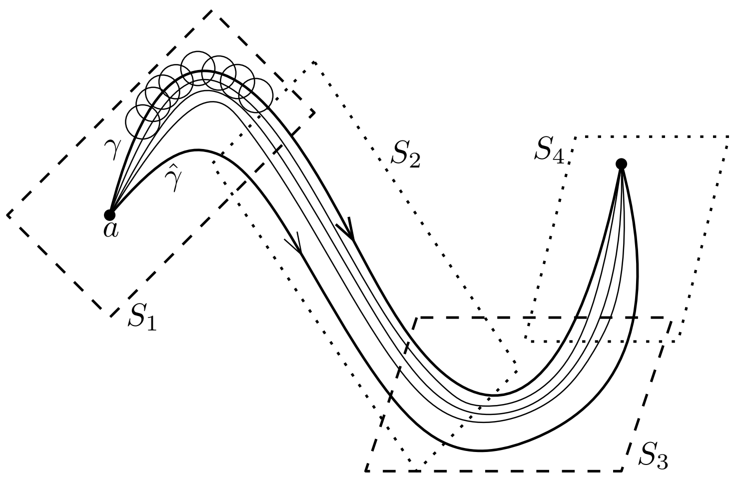
Po ceste k vete monodrómii v skutočnosti dokážeme aj o niečo silnejšie tvrdenie: ak je S ľubovoľná – teda nie nutne jednoducho súvislá – oblasť a (f, D) je neobmedzene predĺžiteľný analytický prvok v S, tak je jeho analytické predĺženie rovnaké pozdĺž ľubovoľných dvoch kriviek homotopických v S a začínajúcich v strede okolia D.

Veta P9.23. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $D \subseteq S$ je kruhové okolie so stredom v bode a, $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú krivky homotopické v S také, že $\gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$ a (f, D) je analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v S. Nech (g, E) je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ a $(\hat{g}, \hat{E})$ je jeho predĺženie pozdĺž $\hat{\gamma}$. Potom $(g, E) \equiv (\hat{g}, \hat{E})$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pre prípad, že krivka $\hat{\gamma}$ vznikne z γ elementárnou deformáciou; rozšírenie na homotópie je potom už len otázkou jednoduchej indukcie. Rámcová myšlienka dôkazu – definovať dostatočné množstvo kriviek[10] „medzi γ a $\hat{\gamma}$“ a každé dve po sebe idúce z týchto kriviek pokryť spoločnou konečnou postupnosťou okolí pod S tak, aby bolo možné aplikovať tvrdenie P9.14 – je znázornená na obrázku P9.6.

K danej dvojici kriviek prislúcha nejaké pokrytie konvexnými oblasťami $S_1, \ldots, S_n$ a rozdelenie na podkrivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ a $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$ ako v definícii P9.17. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre $k = 1, \ldots, n$ sú krivky γ_k a $\hat{\gamma}_k$ parametrizované rovnakým intervalom $[\alpha_k, \beta_k]$. Z konvexnosti množiny S_k vyplýva, že pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ leží úsečka $[\gamma_k(t), \hat{\gamma}_k(t)]$ celá v S_k. To

[10]V princípe pôjde o krivky „vyrobené“ homotópiou z γ na $\hat{\gamma}$, ak ju chápeme ako spojitú deformáciu.



Obr. P9.6: Myšlienka dôkazu vety P9.23.

znamená, že pre všetky $q \in [0,1]$ môžeme definovať krivku $\gamma_k[q]\colon [\alpha_k, \beta_k] \to S$ pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ predpisom

$$\gamma_k[q](t) = \gamma(t) + q(\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)).$$

Pre každé $q \in [0,1]$ je spojenie týchto kriviek, $\gamma[q] := \gamma_1[q] + \ldots + \gamma_n[q]$, krivkou vedúcou z bodu $a = \gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha)$ do bodu $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$; navyše platí $\gamma[q]^* \subseteq S$.

Množina $Q := \bigcup_{q \in [0,1]} \gamma[q]^*$ je kompaktná, a teda existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in Q$ platí $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Ak navyše $d = \sup\{|\hat{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| \mid k \in \{1, \ldots, n\};\ t \in [\alpha_k, \beta_k]\}$, vezmime $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že $d/m < \varepsilon/2$. Pre $j = 0, \ldots, m-1$ potom možno množinu $\gamma[j/m]^* \cup \gamma[(j+1)/m]^*$ pokryť okoliami typu $D(z, \varepsilon)$, kde $z \in \gamma[j/m]^*$. Množina $\gamma[j/m]^* \cup \gamma[(j+1)/m]^*$ je navyše kompaktná, a teda existuje aj takéto konečné pokrytie.

Keďže je analytický prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S, musí existovať jeho analytické predĺženie pozdĺž každej z kriviek $\gamma[j/m]$ pre $j = 0, \ldots, m$. Po pridaní najviac dvoch ďalších okolí s polomerom ε (so stredmi v spoločnom počiatočnom resp. koncovom bode uvažovaných kriviek) tak sú pre $j = 0, \ldots, m-1$ a krivky $\gamma[j/m]$, $\gamma[(j+1)/m]$ splnené predpoklady tvrdenia P9.14. Pre analytické predĺženia (g_j, E_j), (g_{j+1}, E_{j+1}) prvku (f, D) pozdĺž kriviek $\gamma[j/m]$ resp. $\gamma[(j+1)/m]$ teda platí $(g_j, E_j) \equiv (g_{j+1}, E_{j+1})$. Keďže však $\gamma[0] = \gamma$, $\gamma[1] = \hat{\gamma}$ a relácia $\equiv$ je tranzitívna, nutne $(g, E) \equiv (\hat{g}, \hat{E})$, čo bolo treba dokázať. □

Z práve dokázanej vety možno už ako pomerne jednoduchý dôsledok odvodiť aj samotnú *vetu o monodrómii.*

Veta P9.24 (O monodrómii)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S obsahujúca nejaký analytický prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S. Potom je funkcia $\mathbf{f}$ na S jednohodnotová.*

Dôkaz. Predpokladajme, že globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S za daných predpokladov nie je jednohodnotová. Potom existuje dvojica analytických prvkov $(g_1, E_1), (g_2, E_2)$ v $\mathbf{f}$ s rovnakým stredom $b \in S$ takých, že $(g_1, E_1) \not\equiv (g_2, E_2)$. Keďže prvky (g_1, E_1), (g_2, E_2) a (f, D) všetky patria do $\mathbf{f}$, sú všetky tieto prvky navzájom svojimi analytickými predĺženiami v S – videli sme pritom, že v takom prípade ide aj o analytické predĺženia pozdĺž nejakých kriviek.

Nech (f, D) má stred $a \in S$ a nech γ s $\gamma^* \subseteq S$ je krivka z bodu a do bodu b taká, že (g_1, E_1) je analytickým predĺžením prvku (f, D) podľa γ. Nech $\hat{\gamma}$ s $\hat{\gamma}^* \subseteq S$ je krivka z a do b taká, že (g_2, E_2) je predĺžením prvku (f, D) podľa $\hat{\gamma}$. Krivky γ a $\hat{\gamma}$ ale majú rovnaké počiatočné a koncové body – v jednoducho súvislej oblasti S teda musia byť homotopické. Prvok (f, D) je navyše neobmedzene predĺžiteľný v S a z vety P9.23 tak dostávame $(g_1, E_1) \equiv (g_2, E_2)$: spor. □

Riemannove plochy

Globálne analytické funkcie majú veľmi prirodzenú geometrickú interpretáciu v podobe takzvaných *Riemannových plôch* – takéto funkcie totiž nemusíme považovať za viachodnotové funkcie definované na nejakej podmnožine komplexnej roviny, ale za jednohodnotové funkcie definované na geometrickej ploche takej, že analytické predĺženie podľa dvoch „neekvivalentných“ kriviek z nejakého bodu a vždy vedie do rôznych bodov na tejto ploche. Tak napríklad prirodzený logaritmus možno reprezentovať „špirálovou plochou“ okolo $z = 0$, kde každá holomorfná vetva logaritmu (napríklad) na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ zodpovedá jednému „poschodiu“ tejto špirály. Riemannovými plochami sa pre rozsiahlosť tejto problematiky zaoberať nebudeme – čitateľa len odkážeme na [2].

Literatúra

[1] Hahn, L.-S.; Epstein, B.: *Classical Complex Analysis.* Sudbury: Jones and Bartlett, 1996.

[2] Markushevich, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 3.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.

[3] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.