Prednáška č. 10: Singularity

Peter Kostolányi

25. novembra 2019

V súvislosti s Laurentovými radmi sme sa už zaoberali izolovanými singularitami jednohodnotových analytických funkcií. Koncept analytického predĺženia nám dnes umožní definovať a skúmať *singularity* vo všeobecnosti – čiže tak, aby tento pojem zahŕňal ako neizolované singularity, tak aj singularity viachodnotových analytických funkcií.[1] Odporúčaným doplňujúcim čítaním je [1, 2].

Definícia singularity

Pod *singularitou* analytického prvku (f, D) budeme rozumieť bod na hranici kruhového okolia D taký, že neexistuje žiadne priame analytické predĺženie prvku (f, D) so stredom v tomto bode.

Definícia P10.1. Nech (f, D) je analytický prvok. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *singularitou* analytického prvku (f, D), ak $b \in \overline{D} \setminus D$ a neexistuje žiaden analytický prvok (g, E) so stredom v b, ktorý je priamym analytickým predĺžením prvku (f, D).

Poznámka P10.2. Namiesto $b \in \overline{D} \setminus D$ by sme v definícii singularity mohli požadovať iba $b \in \overline{D}$; pre každé $b \in D$ totiž zrejme existuje priame analytické predĺženie prvku (f, D) so stredom v b (stačí vziať funkciu f na okolí bodu b dostatočne malom na to, aby bolo celé súčasťou D). Obmedzenie sa na $\overline{D}$ je pritom kľúčové – singularitou totiž chceme nazvať iba body *v bezprostrednej blízkosti* oblasti, na ktorej je funkcia definovaná a analytická.

Definíciu singularít globálnej analytickej funkcie na nejakej oblasti S musíme sformulovať o niečo opatrnejšie, s použitím pojmu analytického predĺženia pozdĺž krivky – pôjde o „prekážky“ pri analytickom predĺžení pozdĺž kriviek. Ľahko vidieť, že ak pre nejakú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ existuje analytické predĺženie nejakého analytického prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, kde $\tau \in [\alpha, \beta)$, tak takéto predĺženie musí existovať aj pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, t]$ pre všetky t z nejakého intervalu $[\tau, \tau + \varepsilon]$, kde $\varepsilon > 0$. Ak teda existuje nejaké $\tau \in [\alpha, \beta]$ také, že *neexistuje* analytické predĺženie (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, nutne musí existovať aj *najmenšie* také τ. Táto myšlienka je v pozadí za nasledujúcou definíciou.

Definícia P10.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *singularita* funkcie $\mathbf{f}$, ak existuje analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v bode $a \in S$ a krivka $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ a nasledujúcimi vlastnosťami:

(*i*) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta)$ existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž krivky $\gamma \restriction [\alpha, t]$.

(*ii*) Neexistuje žiadne analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž krivky γ.

Poznámka P10.4. Singularitou globálnej analytickej funkcie teda nazveme ľubovoľný bod b, ktorý je singularitou *aspoň jednej* z jej vetiev.[2] Nemusí pritom ísť o singularitu každej vetvy definovanej „v blízkosti“ bodu b, ako je vidieť na príklade funkcie $1/\ln z$. Dá sa ukázať, že táto funkcia – okrem toho, že je singulárna v bode 0 – má singularitu aj v bode 1: ide o jednoduchý pól spôsobený tým, že existuje vetva prirodzeného logaritmu taká, že $\ln 1 = 0$. Existujú však aj iné vetvy prirodzeného logaritmu na okolí bodu 1, pričom zodpovedajúce vetvy funkcie $1/\ln z$ sú v bode 1 analytické.

Dokážeme teraz, že singularity analytických prvkov funkcie $\mathbf{f}$ sú súčasne aj singularitami samotnej tejto funkcie.

[1] Čiže globálnych analytických funkcií na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$, resp. ekvivalentne vetiev nejakej globálnej analytickej funkcie.

[2] Každá globálna analytická funkcia je totiž zároveň aj svojou vetvou, a teda každá singularita globálnej analytickej funkcie je naozaj singularitou niektorej jej vetvy. Ak je naopak $b \in \mathbb{C}$ singularitou niektorej vetvy globálnej analytickej funkcie $\mathbf{f}$, musí byť tento bod „prekážkou“ pri analytickom predĺžení nejakého prvku (f, D) z danej vetvy pozdĺž nejakej krivky γ; ten istý prvok (f, D) a tú istú krivku γ ale potom môžeme použiť na dôkaz, že b je singularitou funkcie $\mathbf{f}$.

Tvrdenie P10.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a (f, D) je ľubovoľný analytický prvok funkcie $\mathbf{f}$. Ak $b \in \mathbb{C}$ je singularita analytického prvku (f, D), je tento bod aj singularitou funkcie $\mathbf{f}$.*

Dôkaz. Nech a je stred kruhového okolia D. Bod b leží na hranici tohto kruhového okolia. Uvažujme úsečku $[a, b]$. Pre všetky $t \in [0, 1]$ zjavne existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž úsečky $[a, b] \restriction [0, t]$ – je ním ľubovoľný analytický prvok (g, E) taký, že E je kruhové okolie bodu $[a, b](t)$ obsiahnuté v D a g je zúženie funkcie f na E. Analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $[a, b]$ ale neexistuje, pretože by zrejme bolo priamym analytickým predĺžením prvku (f, D) so stredom v jeho singularite b. $\square$

Poznámka P10.6. Existuje globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ so singularitou v bode $b \in \mathbb{C}$ taká, že b nie je singularita žiadneho analytického prvku (f, D) funkcie $\mathbf{f}$. Techniky na nájdenie takejto funkcie však budeme mať k dispozícii až neskôr.

Poznámka P10.7. Je jednoduchým cvičením dokázať, že singularitami jednohodnotovej analytickej funkcie $f : D \to \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$ je nejaké kruhové okolie, sú práve všetky singularity analytického prvku (f, D). Tento fakt budeme v nasledujúcom voľne využívať.

Na minulej prednáške sme videli, že každú „bežnú“ jednohodnotovú analytickú funkciu $f : S \to \mathbb{C}$ na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ možno chápať aj ako globálnu analytickú funkciu na tejto oblasti. Mali by sme sa teda presvedčiť o tom, že izolované singularity – tak, ako sme ich chápali doteraz – sú singularitami aj podľa novej definície. Presnejšie teraz ukážeme, že táto vlastnosť platí pre póly a podstatné izolované singularity; *odstrániteľné singularity už ďalej za singularity považovať nebudeme.*

Tvrdenie P10.8. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f : S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $b \in \mathbb{C}$ je pól alebo podstatná izolovaná singularita funkcie f. Potom je bod b singularitou funkcie f.*

Dôkaz. Z definície izolovanej singularity vyplýva, že pre nejaké $r > 0$ musí platiť $D'(b, r) \subseteq S$. Vezmime ľubovoľné $a \in D'(b, r/2)$ a $D := D(a, |b - a|) \subseteq D'(b, r)$. Potom je (f, D) analytickým prvkom funkcie f. Keby bod b nebol singularitou funkcie f, muselo by existovať analytické predĺženie (g, E) prvku (f, D) pozdĺž úsečky $[a, b]$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $E = D(b, s)$, kde $0 < s < r$. Funkcia g sa zhoduje s funkciou f na množine $D(b, s) \cap D$ a prstencové okolie $D'(b, s)$, na ktorom sú definované obidve funkcie f a g, má hromadný bod v $D(b, s) \cap D$. Z vety o jednoznačnosti teda vyplýva, že pre všetky $z \in D'(b, s)$ platí $f(z) = g(z)$ a vďaka jednoznačnosti koeficientov Laurentových radov zisťujeme, že Laurentovým radom funkcie f v bode b musí byť Taylorov rad funkcie g v tomto bode. Bod b teda môže byť nanajvýš odstrániteľnou singularitou funkcie f, čo je spor s predpokladmi tvrdenia. $\square$

Singularity na hranici oboru konvergencie Taylorovho radu

Zaoberajme sa teraz na chvíľu „maximálnymi“ analytickými prvkami – čiže obormi konvergencie Taylorových radov analytických funkcií. Ukážeme najprv, že na hranici každého takéhoto analytického prvku, ak je ohraničený, musí byť aspoň jedna singularita.

Veta P10.9. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, s Taylorovým rozvojom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \tag{1}$$

o polomere konvergencie $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$. Potom na hranici $\kappa(a, \varrho)^*$ analytického prvku $(f, D(a, \varrho))$ existuje aspoň jedna singularita tohto prvku.

Dôkaz. Za účelom sporu predpokladajme, že žiaden bod $z \in \kappa(a, \varrho)^*$ nie je singularitou analytického prvku $(f, D(a, \varrho))$. Potom pre všetky $w \in \kappa(a, \varrho)^*$ existuje priame analytické predĺženie $(g[w], D(w, \varepsilon[w]))$ prvku $(f, D(a, \varrho))$ so stredom v bode w, kde $\varepsilon[w] > 0$. Množina

$$\{D(w, \varepsilon[w]) \mid w \in \kappa(a, \varrho)^*\}$$

je otvoreným pokrytím kružnice $\kappa(a,\varrho)^*$; z kompaktnosti tejto kružnice teda vyplýva, že existuje konečná množina bodov $J \subseteq \kappa(a,\varrho)^*$ taká, že

$$\{D(w,\varepsilon[w]) \mid w \in J\}$$

je konečným otvoreným pokrytím $\kappa(a,\varrho)^*$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že pre všetky $z \in \kappa(a,\varrho)^*$ platí $D(z,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{w \in J} D(w,\varepsilon[w])$. Ľahko potom vidieť, že funkcia $F\colon D(a,\varrho+\varepsilon) \to \mathbb{C}$ definovaná pre všetky $z \in D(a,\varrho+\varepsilon)$ predpisom

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{ak } |z-a| < \varrho, \\ g[w](z) & \text{ak pre nejaké } w \in J \text{ platí } z \in D(w,\varepsilon[w]) \end{cases}$$

je holomorfná na $D(a,\varrho+\varepsilon)$ a na $D(a,\varrho)$ sa zhoduje s funkciou f. Z vety o Taylorových radoch tak vyplýva, že polomer konvergencie radu (1) musí byť aspoň $\varrho+\varepsilon$: spor. □

Príklad P10.10. Polomer konvergencie Maclaurinovho radu funkcie

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

je rovný jednej, pričom *jedinou* jej singularitou v $\kappa(0,1)^*$ je bod $a = 1$. Rad pritom nekonverguje v žiadnom bode $\kappa(0,1)^*$. *Divergencia Taylorovho radu v nejakom bode na hranici jeho oboru konvergencie teda ešte nie je zárukou existencie singularity v tomto bode.*

Príklad P10.11. Ukážeme teraz, že funkcia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

definovaná na $D(0,1)$ – kde polomer konvergencie radu je očividne rovný jednej – má singularitu v každom bode $\kappa(0,1)^*$: hovoríme, že množina $\kappa(0,1)^*$ tvorí *prirodzenú hranicu* funkcie f.

Skutočne – ľahko vidieť, že pre všetky $z \in D(0,1)$ platí

$$f(z) = z + f(z^2) = z + z^2 + f(z^4) = \ldots = \sum_{j=0}^{s-1} z^{2^j} + f(z^{2^s}), \tag{2}$$

kde $s \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné.

Ak teda špeciálne pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ vezmeme za z ľubovoľnú 2^n-tú odmocninu jednej prenásobenú nejakým $r \in (0,1)$ – t.j. $z = re^{i2k\pi/2^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,\ldots,2^n-1\}$ a $r \in (0,1)$, tak z (2) pre $s = n$ dostávame

$$f(re^{i2k\pi/2^n}) = \sum_{j=0}^{n-1} r^{2^j} e^{i2k\pi/2^{n-j}} + f(r^{2^n}).$$

Pre fixné n potom

$$\lim_{r\to 1} \left| f(re^{i2k\pi/2^n}) \right| \geq -n + \lim_{r\to 1} \left| f(r^{2^n}) \right| = \infty, \tag{3}$$

kde posledná rovnosť vyplýva zo skutočnosti, že vďaka kladnosti čísla r pre všetky $s \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| f(r^{2^n}) \right| = \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} + f(r^{2^s}) \right| \geq \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} \right|,$$

a teda aj

$$\lim_{r\to 1} \left| f(r^{2^n}) \right| \geq \lim_{r\to 1} \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} \right| = s$$

pre všetky $s \in \mathbb{N}$. Z (3) teda vyplýva, že v žiadnej 2^n-tej odmocnine jednej nemôže existovať priame analytické predĺženie prvku $(f, D(0,1))$ a ide teda o jeho singularitu.[3] Navyše je zrejmé, že množina singularít analytického prvku $(f, D(0,1))$ na $\kappa(0,1)^*$ musí byť uzavretá.[4] Keďže ale platí

$$\overline{\left\{ e^{i2k\pi/2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N};\ k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \right\}} = \kappa(0,1)^*,$$

musí byť množina týchto singularít rovná celej kružnici $\kappa(0,1)^*$, čo bolo treba dokázať.

Základná klasifikácia singularít

Singularity globálnych analytických funkcií v danej oblasti S možno v prvom rade rozdeliť na *izolované* a *neizolované* (alebo *podstatné*[5]). Pojem izolovanej singularity pritom bude zahŕňať izolované singularity jednohodnotových funkcií – čiže póly a podstatné izolované singularity[6] – tak, ako sme ich chápali doteraz, ako aj singularity viachodnotového typu, ktorými budú takzvané *body vetvenia*.

Definícia P10.12. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *izolovaná singularita* funkcie $\mathbf{f}$, ak existuje $r > 0$, analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v bode $a \in S$ a krivka $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ a nasledujúcimi vlastnosťami:

(i) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta)$ existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, t]$.

(ii) Neexistuje žiadne analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ.

(iii) Nech $\tau \in [\alpha, \beta)$ je také, že $(\gamma \restriction [\tau, \beta])^* \subseteq D(b, r)$ a (g, E) je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$ také, že $E \subseteq D'(b, r)$. Potom je (g, E) neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b, r)$.

Bod $b \in \mathbb{C}$ je *neizolovaná* alebo *podstatná* singularita funkcie $\mathbf{f}$, ak preň existuje prvok (f, D) a krivka γ s vlastnosťami *(i)* a *(ii)* tak, že pre žiadne $r > 0$ nie je splnená vlastnosť *(iii)*.

Izolovaná singularita je teda prekážkou pri analytickom predĺžení pozdĺž krivky γ, ale ide o jedinú takúto prekážku na celom okolí $D(b, r)$.[7] Z uvedenej definície je bezprostredne zrejmé, že každá izolovaná singularita globálnej analytickej funkcie $\mathbf{f}$ v S je skutočne singularitou funkcie $\mathbf{f}$.

Poznámka P10.13. V nasledujúcom budeme trochu nepresne hovoriť o analytickom predĺžení pozdĺž kružnice $\kappa(b, s)$ pre *ľubovoľný analytický prvok so stredom v* $\kappa(b, s)^*$. Rozumieme pritom samo sebou, že ide o kružnicu „zrotovanú“ tak, aby jej začiatok a koniec bol zhodný so stredom daného analytického prvku. Rovnakú konvenciu budeme občas používať aj pre ľubovoľnú jednoduchú uzavretú krivku γ prechádzajúcu cez stred daného analytického prvku.

Póly a podstatné izolované singularity jednohodnotových funkcií sú zjavne špeciálnymi prípadmi izolovaných singularít. Mali by sme ešte tieto pojmy definovať aj pre globálne analytické funkcie v nejakej oblasti S, resp. pre ich vetvy. Pre takúto funkciu $\mathbf{f}$ budeme hovoriť o singularite $b \in \mathbb{C}$ *jednohodnotového typu* práve vtedy, keď je jednohodnotová – pri označení z predchádzajúcej definície – vetva funkcie $\mathbf{f}$ na $D'(b, r)$ obsahujúca analytický prvok (g, E). To znamená, že analytickým predĺžením ľubovoľného analytického prvku tejto vetvy pozdĺž ľubovoľnej krivky v $D'(b, r)$ s pevným koncovým bodom získame vždy (až na $\equiv$) ten istý prvok. Ľahko pritom vidieť, že táto požiadavka je ekvivalentná tomu, aby existoval *nejaký* analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$ tejto vetvy a *nejaká* kružnica $\kappa(b, s)$ s $\kappa(b, s)^* \subseteq D'(b, r)$ taká, že analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž $\kappa(b, s)$ je (až na $\equiv$) opäť $(\hat{f}, \hat{D})$. Takéto predĺženie totiž definuje „bežnú“ jednohodnotovú holomorfnú funkciu na nejakom medzikruží so stredom v bode b, ktoré je celé obsiahnuté v $D'(b, r)$, pričom táto funkcia je daná hodnotami uvažovanej vetvy funkcie $\mathbf{f}$. Ľahko vidieť, že konečným počtom priamych analytických

[3] Ľahko vidieť, že v opačnom prípade by predĺžená funkcia musela mať v danom bode vlastnú limitu.

[4] Ak existuje priame analytické predĺženie (g, E) prvku $(f, D(0,1))$ so stredom v nejakom bode $a \in \kappa(0,1)^*$, existuje toto predĺženie aj vo všetkých bodoch $\kappa(0,1)^* \cap E$; komplement množiny týchto singularít je teda otvorená množina.

[5] „Podstatná singularita“ je teda niečo iné ako „podstatná izolovaná singularita“.

[6] Odstrániteľné singularity sme už z nášho pojmu singularity nadobro vylúčili.

[7] Je dôležité uvedomiť si, že toto nie je ekvivalentné neexistencii ďalšej singularity v tomto okolí – takáto singularita sa v $D(b, r)$ nachádzať môže, ale v takom prípade musí ísť o singularitu inej vetvy funkcie $\mathbf{f}$.

predĺžení prvkov tejto funkcie možno získať jednohodnotovú holomorfnú funkciu F na *ľubovoľnom* medzikruží $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - b| < r_2\}$, kde $0 < r_1 < r_2 < r$. Ak je ale γ_1, γ_2 ľubovoľná dvojica kriviek v $D'(b,r)$ s počiatočným bodom v strede nejakého prvku (F, D), musí existovať medzikružie $A(r_1, r_2)$ také, že $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq A(r_1, r_2)$ a predĺžením prvku (F, D) pozdĺž obidvoch kriviek získame (až na $\equiv$) ten istý prvok. Jednohodnotová funkcia F je teda globálnou analytickou funkciou v $D'(b,r)$. Keďže ale funkcia F súčasne obsahuje analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$, je rovná F a jednohodnotová aj pôvodne uvažovaná vetva funkcie $\mathbf{f}$.

Okolo izolovaných singularít jednohodnotového typu sa teda vetvy globálnych analytických funkcií správajú rovnako ako „bežné“ holomorfné funkcie v blízkosti svojich izolovaných singularít. Možno ich tam teda lokálne rozvinúť do *Laurentovho radu* a podľa charakteru tohto radu môžeme izolované singularity jednohodnotového typu rozdeliť na *póly* a *podstatné izolované singularity.*

Definícia P10.14. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ nazveme *bodom vetvenia*[8] funkcie $\mathbf{f}$, ak je izolovanou singularitou $\mathbf{f}$, ktorá nie je jednohodnotového typu.[9]

Bod b je teda bodom vetvenia, ak je viachodnotová – pri označeniach z definície P10.12 – vetva funkcie $\mathbf{f}$ na $D'(b,r)$ obsahujúca analytický prvok (g, E). Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že táto situácia nastane práve vtedy, keď je analytickým predĺžením nejakého analytického prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ z tejto vetvy pozdĺž nejakej kružnice $\kappa(b,s)$ s $\kappa(b,s)^* \subseteq D'(b,r)$ analytický prvok, ktorý s $(\hat{f}, \hat{D})$ nie je v relácii $\equiv$. To je ďalej ekvivalentné existencii takejto kružnice pre *každý* prvok danej vetvy.

Klasifikácia bodov vetvenia a Puiseuxove rady

Nasledujúca veta [1] sumarizuje základné poznatky umožňujúce jemnejšiu klasifikáciu bodov vetvenia.

Veta P10.15. *Nech $b \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Nech (f, D) s $D \subseteq D'(b,r)$ je analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b,r)$ a $\mathbf{f}$ je (jediná) globálna analytická funkcia v $D'(b,r)$ obsahujúca analytický prvok (f, D). Označme $H := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w < \ln r\}$. Potom:*

a) Existuje jednohodnotová analytická funkcia $f^*\colon H \to \mathbb{C}$ taká, že pre všetky $w \in H$ platí

$$f^*(w) \in [\![\mathbf{f}(b + e^w)]\!].$$

b) Ak navyše existuje prirodzené $k \geq 1$ také, že pre (niektorú takúto) funkciu f^* a všetky $w \in H$ je

$$f^*(w) = f^*(w + i2k\pi),$$

kde k je najmenšie *kladné prirodzené číslo s touto vlastnosťou, tak pre každý analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ je k zároveň aj najmenšie kladné prirodzené číslo také, že analytickým predĺžením $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž spojenia k kružníc $\kappa(b,s)$ so stredom v bode b a prechádzajúcich cez stred $\hat{a}$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ je (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$. Všeobecnejšie možno kružnicu $\kappa(b,s)$ nahradiť ľubovoľnou jednoduchou uzavretou krivkou γ takou, že $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$.*[10]

c) Ak takéto prirodzené $k \geq 1$ neexistuje, tak je analytickým predĺžením každého prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ pozdĺž spojenia ľubovoľného počtu kružníc so stredom v bode b a prechádzajúcich cez stred $\hat{a}$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ analytický prvok, ktorý s prvkom $(\hat{f}, \hat{D})$ nie je v relácii $\equiv$ (a podobne pre ľubovoľnú uzavretú krivku γ s $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$).

d) Ak existuje k z tvrdenia b), nadobúda $\mathbf{f}$ v každom $z \in D'(b,r)$ najviac k rôznych hodnôt a prvky funkcie $\mathbf{f}$ so stredom z tvoria presne k tried relácie $\equiv$. Inak existuje nekonečne veľa týchto tried.

e) Ak pre k z tvrdenia b) platí $k = 1$, bod b buď nie je singularitou funkcie $\mathbf{f}$, alebo je jej singularitou jednohodnotového typu. Ak $k \geq 2$ alebo také k vôbec neexistuje, je b bodom vetvenia funkcie $\mathbf{f}$.

[8] Alebo *singularitou viachodnotového typu.*

[9] Opäť treba upozorniť na to, že kvôli možnej „viacvetvovosti“ funkcie táto formulácia *nie je* ekvivalentná formulácii „b je izolovaná singularita a súčasne b nie je singularita jednohodnotového typu“.

[10] V duchu poznámky P10.13 opäť „zrotovanou“ tak, aby začínala aj končila v $\hat{a}$.

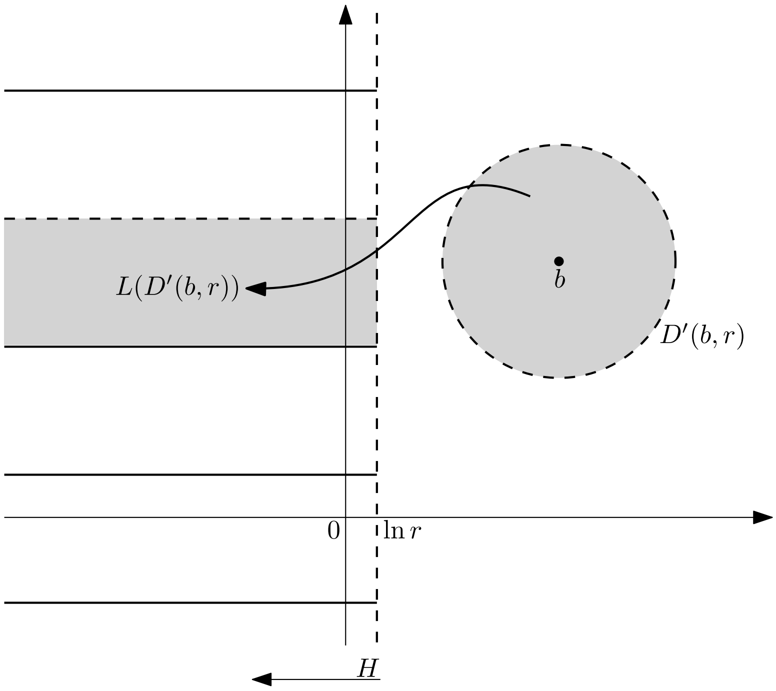
Dôkaz. Označme ako $\ln_D$ ľubovoľnú holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu na $\mathbb{C} \setminus \{se^{i\alpha} \mid s \geq 0\}$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $z \in D$ platí $\alpha \notin [\![\arg(z-b)]\!]$; ľahko vidieť, že také α musí určite existovať. Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{se^{i\alpha} \mid s \geq 0\}$ a nejaké $m \in \mathbb{Z}$ teda

$$\ln_D(z) = \ln|z| + i\theta, \qquad \text{kde } \theta \in [\![\arg z]\!] \cap [2m\pi + \alpha, 2(m+1)\pi + \alpha).$$

Pre funkciu $L\colon D'(b,r) \to \mathbb{C}$, danú pre všetky $z \in D'(b,r)$ predpisom $L(z) := \ln_D(z-b)$, potom platí

$$L(D'(b,r)) = H \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 2m\pi + \alpha \leq \operatorname{Im} z < 2(m+1)\pi + \alpha\}.$$

Táto situácia je znázornená na obrázku P10.1.



Obr. P10.1: Definičný obor a možný obraz funkcie $L(z)$.

Prstencové okolie $D'(b,r)$ sa teda cez L zobrazí na jeden pás v H. Idea dôkazu spočíva v tom, že každú krivku γ v $D'(b,r)$ možno pomocou „vhodne predĺženej“ funkcie L zobraziť na krivku λ v H, ktorá už môže prechádzať aj cez viac takýchto pásov (čo zodpovedá tomu, že vetva L môže spojite prejsť v inú vetvu zodpovedajúcej globálnej analytickej funkcie v $D'(b,r)$). Tým rozlíšime medzi rovnakými bodmi na krivke γ, ktoré však dosiahneme po rôznom počte „obkrúžení“ bodu b.

Analytický prvok (f,D) je neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b,r)$ – pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ spĺňajúcu $\gamma^* \subseteq D'(b,r)$, s počiatočným bodom v strede $a \in D'(b,r)$ prvku (f,D), existuje nejaké analytické predĺženie prvku (f,D) pozdĺž γ. Pozdĺž γ tiež možno analyticky predĺžiť funkciu L, čím získame spojitý výber funkcie $\ln(z-b)$ pozdĺž tejto krivky – a teda aj (spojitú) krivku $\lambda\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\lambda^* \subseteq H$ takú, že $\lambda(\alpha) = L(a)$ a pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ platí $\lambda(t) \in [\![\ln(\gamma(t)-b)]\!]$. Ak teraz vezmeme analytický prvok (φ,Δ) pre nejaké kruhové okolie $\Delta \subseteq L(D)$ so stredom v $L(a)$ a funkciu $\varphi\colon \Delta \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $w \in \Delta$ ako $\varphi(w) = f(b+e^w)$, musí existovať jeho analytické predĺženie pozdĺž krivky λ v H: k pokrytiu krivky λ „dostatočne malými“ kruhovými okoliami $\Delta = \Delta_1, \ldots, \Delta_n \subseteq H$ totiž možno nájsť pokrytie γ analytickými prvkami $(f,D) = (f_1,D_1), \ldots, (f_n,D_n)$ v $D'(b,r)$ tak, že pre $j = 1,\ldots,n$ je $\Delta_j \subseteq L(D_j)$. Na Δ_j tak pre $j = 1,\ldots,n$ môžeme definovať funkciu $\varphi_j\colon \Delta_j \to \mathbb{C}$ pre všetky $w \in \Delta_j$ ako $\varphi_j(w) = f_j(b+e^w)$ a ľahko vidieť, že postupnosť prvkov $(\varphi_1,\Delta_1),\ldots,(\varphi_n,\Delta_n)$ určuje analytické predĺženie prvku (φ,Δ) pozdĺž krivky λ v oblasti H.

Keďže môže byť krivka γ v $D'(b,r)$ ľubovoľná, môže byť ľubovoľná aj krivka λ v H; analytickými predĺženiami prvku (φ,Δ) v H je teda definovaná globálna analytická funkcia f^* v H, ktorá je neobmedzene predĺžiteľná v jednoducho súvislej oblasti H. Podľa vety o monodrómii potom musí byť funkcia f^* jednohodnotová. Navyše je zrejmé, že pre takto definovanú funkciu f^* musí pre každé $w \in H$ existovať analytický prvok $(f[w], D[w])$ v $\mathbf{f}$ taký, že na nejakom okolí bodu w platí $f^*(w) = f[w](b + e^w)$. Pre všetky $w \in H$ preto $f^*(w) \in [\![\mathbf{f}(b + e^w)]\!]$, čím je dokázané tvrdenie a).

Takáto funkcia f^* samozrejme nie je daná jednoznačne, ale je determinovaná počiatočnou voľbou funkcie L, resp. zodpovedajúcej vetvy prirodzeného logaritmu.

Dokážeme tvrdenie b). Nech je prirodzené $k \geq 1$ z jeho znenia dané. Analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$ so stredom $\hat{a} \in D'(b, r)$ musí byť analytickým predĺžením prvku (f, D) pozdĺž nejakej krivky (alebo dokonca lomenej čiary) γ s $\gamma^* \subseteq D'(b, r)$. Rovnako ako vyššie teda môžeme nájsť krivku λ končiacu v nejakom bode $w_0 \in H$ takom, že $b + e^{w_0} = \hat{a}$ a na nejakom okolí bodu w_0 platí $f^*(w) = \hat{f}(b + e^w)$. Nech je funkcia $\hat{L}$ daná pre $(\hat{f}, \hat{D})$ rovnako ako L pre (f, D).

Analytickému predĺženiu $(\hat{g}, \hat{E})$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž k kladne orientovaných kružníc so stredom v b a prechádzajúcich cez $\hat{a}$ zodpovedá, rovnako ako vyššie, analytické predĺženie funkcie f^* pozdĺž úsečky $[w_0, w_0 + i2k\pi]$. Ak je teda (f^*, Δ_1) analytický prvok f^* so stredom w_0 taký, že $\Delta_1 \subseteq \hat{L}(\hat{D})$ a (f^*, Δ_2) je analytický prvok f^* so stredom $w_0 + i2k\pi$ taký, že $\Delta_2 \subseteq \hat{L}(\hat{E})$, vďaka periodicite funkcie f musí pre všetky $w \in \Delta_2$ platiť[11]

$$\hat{g}(b + e^w) = f^*(w) = f^*(w - i2k\pi) = \hat{f}(b + e^{w - i2k\pi}) = \hat{f}(b + e^w),$$

a teda aj $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (\hat{f}, \hat{D})$.

Dokážeme minimalitu čísla k. Keby pre nejaké $j \in \{1, \ldots, k - 1\}$ bol analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž j uvažovaných kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$, musel by z rovnakých dôvodov ako vyššie byť analytickým predĺžením prvku (f^*, Δ_1) pozdĺž $[w_0, w_0 + i2j\pi]$ prvok (f^*, Δ_3) taký, že pre všetky $w \in \Delta_3$ platí[12]

$$f^*(w) = f^*(w - i2j\pi).$$

Množina Δ_3 má však v H hromadný bod a z vety o jednoznačnosti tak vyplýva platnosť vzťahu

$$f^*(w) = f^*(w + i2j\pi)$$

pre všetky $w \in H$ – čo je zrejmý spor s voľbou čísla k.

Toto tvrdenie možno zovšeobecniť aj na prípad jednoduchej uzavretej krivky γ v $D'(b, r)$ s $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$. Keďže je každá takáto krivka homotopická s jednoduchou uzavretou *po častiach hladkou* krivkou (alebo dokonca s lomenou čiarou), môžeme predpokladať, že je krivka γ po častiach hladká. Vďaka súvisu indexu so spojitým výberom argumentu potom zisťujeme, že analytické predĺženie prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž k takýchto kriviek zodpovedá predĺženiu f^* pozdĺž krivky λ s počiatočným bodom w_0 a koncovým bodom $w_0 + i \operatorname{Ind}_\gamma(b) 2k\pi$. Zvyšok argumentácie je rovnaký ako vyššie.

Na dôkaz tvrdenia c) si (pre kružnicu) stačí rovnako ako vyššie uvedomiť, že keby bol analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž j uvažovaných kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$, muselo by pre všetky w z nejakého okolia bodu $w_0 + i2j\pi$ platiť

$$f^*(w) = f^*(w - i2j\pi)$$

a z vety o jednoznačnosti tak aj

$$f^*(w) = f^*(w + i2j\pi)$$

pre všetky $w \in H$; to by bol spor s neexistenciou takéhoto j. Rovnako ako vyššie možno tvrdenie zovšeobecniť aj na iné jednoduché uzavreté krivky.

Tvrdenie d) je bezprostredným dôsledkom tvrdení b) a c), rovnako ako tvrdenie e). □

Poznámka P10.16. Vlastnosti zhrnuté v predchádzajúcej vete vo všeobecnosti *závisia* na voľbe konkrétneho analytického prvku (f, D) globálnej analytickej funkcie – môže sa totiž stať, že predĺženiami dvoch rôznych analytických prvkov tejto funkcie v $D'(a, r)$ dostaneme dve rôzne vetvy $\mathbf{f}$ tejto globálnej funkcie na $D'(a, r)$. Na druhej strane však ľahko vidieť, že tvrdenie *nezávisí* od polomeru r okolia $D'(a, r)$ (ak sú preň splnené predpoklady vety).

[11] Ak budeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že Δ_1 a Δ_2 majú rovnaký polomer.

[12] Opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme rovnosť polomerov okolí Δ_1 a Δ_3.

Prirodzene sa ponúka myšlienka klasifikácie bodov vetvenia na základe čísla k z predchádzajúcej vety. Ak takéto k pre bod vetvenia b existuje, budeme hovoriť, že b je vetviacim bodom *rádu* $k-1$.[13]

Definícia P10.17. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a $b \in \mathbb{C}$ je bod vetvenia funkcie $\mathbf{f}$, uvažovaný v súvislosti s neexistenciou analytického predĺženia nejakého prvku (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s počiatočným bodom v strede prvku (f, D) a koncovým bodom v b. Nech $r > 0$ a $\tau \in [\alpha, \beta)$ sú také, že $(\tau \restriction [\tau, \beta])^* \subseteq D(b, r)$ a (g, E) s $E \subseteq D'(b, r)$ je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, ktoré je neobmedzene predĺžiteľné v $D'(b, r)$. Pre prirodzené $k \geq 2$ potom hovoríme, že b je *bodom vetvenia rádu* $k - 1$, ak je k najmenšie kladné prirodzené číslo také, že analytickým predĺžením prvku (g, E) pozdĺž k kladne orientovaných kružníc so stredom b, prechádzajúcich cez stred prvku (g, E), je (až na $\equiv$) opäť prvok (g, E). Ak žiadne takéto k neexistuje,[14] nazývame b *bodom vetvenia rádu* ∞.

Poznámka P10.18. Podobne ako niekoľkokrát vyššie je v uvedenej definícii zamlčaný jeden podstatný aspekt: rád bodu vetvenia $b \in \mathbb{C}$ nezávisí len na tomto bode, ale aj na vetve, v ktorej ho uvažujeme – čiže presnejšie na analytickom prvku (f, D) a krivke γ z predchádzajúcej definície. Nie je teda vylúčená ani situácia, kde b je v niektorých vetvách bodom vetvenia rádu r_1, v iných vetvách bodom vetvenia rádu $r_2 \neq r_1$ a v ešte ďalších vetvách vôbec nie je bodom vetvenia.

Príklad P10.19. Pre každú vetvu funkcie $z^{1/n}$ s $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ je $b = 0$ bodom vetvenia rádu $n - 1$.

Príklad P10.20. Pre každú vetvu funkcie $\ln z$ je $b = 0$ bodom vetvenia rádu ∞.

Dokážeme teraz veľmi dôležitú vetu o singulárnych rozvojoch funkcií v bodoch vetvenia konečného rádu – takéto rozvoje budeme nazývať *Puiseuxovými radmi*[15] a pôjde o zovšeobecnenie Laurentových radov, pri ktorom sa v rade vyskytujú aj racionálne mocniny $(z-a)$; tie sú už samotné multifunkciami, čo je v súlade so skutočnosťou, že má daný rad vyjadrovať viachodnotovú funkciu. Prípadné rozšírenie nasledujúcej vety na prípad $k = 1$ by zahŕňalo aj vetu o Laurentových radoch.

Veta P10.21. *Nech $b \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v $D'(a, r)$ taká, že ľubovoľný analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ je neobmedzene predĺžiteľný v $D'(a, r)$, pričom a je bodom vetvenia funkcie $\mathbf{f}$ rádu $k - 1$, kde $k \geq 2$ je prirodzené číslo. Potom existuje jednoznačne daná postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ taká, že pre všetky $z \in D'(a, r)$ platí*

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^{n/k}$$

(kde rad konverguje).[16] *Uvedený rad nazývame* Puiseuxovým radom *funkcie* $\mathbf{f}$ *v bode* a.

Dôkaz. Uvažujme zobrazenie $M\colon D'(a, r) \to \mathbb{C}$ dané pre všetky $z \in D'(a, r)$ predpisom

$$M(z) = (z - a)^{1/k}$$

pre nejakú holomorfnú vetvu funkcie $z^{1/k}$ na $\mathbb{C} \setminus \{se^{i\alpha} \mid s \geq 0\}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pre nejaké $\beta \in \mathbb{R}$ platí

$$M(D'(a, r)) = D'(0, r^{1/k}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \arg z < \beta + 2\pi/k\}.$$

Táto situácia je (pre $\beta = 0$) znázornená na obrázku P10.2.

Vezmime ľubovoľné $D \subseteq D'(a, r)$ také, že uvažovaná vetva funkcie $(z - a)^{1/k}$ je na D holomorfná a ľubovoľný analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$. Na kruhovom okolí $\Delta \subseteq M(D)$ potom môžeme definovať funkciu $f^\circ\colon \Delta \to \mathbb{C}$ pre všetky $u \in \Delta$ predpisom

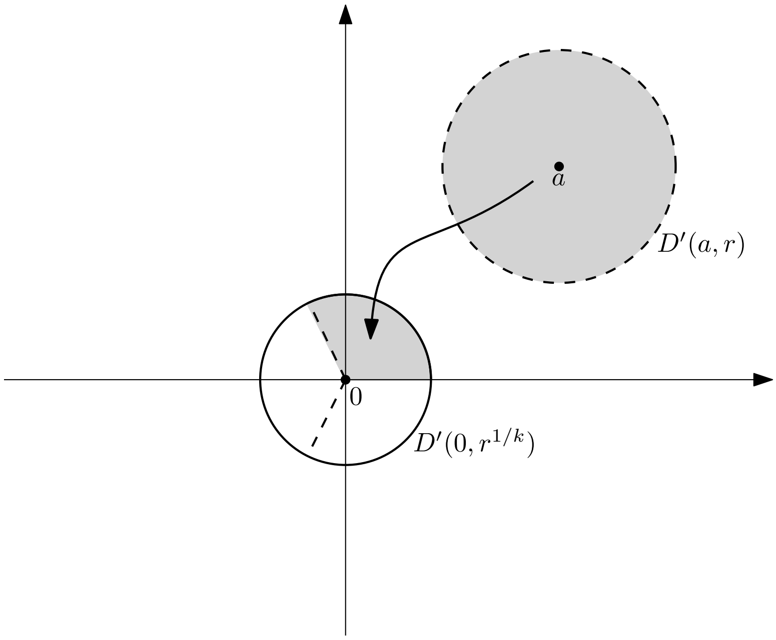
$$f^\circ(u) = f(a + u^k).$$

[13] Pričom singularity jednohodnotového typu a body, ktoré nie sú singularitami, by sme mohli nazvať vetviacimi bodmi rádu 0.

[14] V takom prípade nemôže uvedená vlastnosť platiť ani pre $k = 1$, pretože vtedy by podľa predchádzajúcej vety bod b nebol bodom vetvenia, ale nanajvýš singularitou jednohodnotového typu.

[15] Niekde sa tiež možno stretnúť s pomenovaniami ako *Newtonov-Puiseuxov rad* alebo *zovšeobecnený Laurentov rad.*

[16] Je dôležité uvedomiť si, že ide o rad multifunkcií. Uvedený zápis pritom chápeme tak, že zakaždým vyberieme jednu konkrétnu vetvu funkcie $(z - a)^{1/k}$, ktorú použijeme na výpočet $(z - a)^{n/k}$ pre *všetky* $n \in \mathbb{Z}$. Takto dostávame presne k jednohodnotových vetiev funkcie $\mathbf{f}(z)$ na každom kruhovom okolí $D \subseteq D'(a, r)$.



Obr. P10.2: Definičný obor a možný obraz funkcie $M(z)$.

Podobne ako v dôkaze vety P10.15 zodpovedá každému analytickému predĺženiu prvku (f,D) pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq D'(a,r)$ predĺženie prvku (f°,Δ) pozdĺž krivky $\mu\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ takej, že $\mu^* \subseteq D'(0,r^{1/k})$, $\mu(\alpha)$ je stred prvku (f°,Δ) a pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ platí $\mu(t) \in [\![(\gamma(t)-a)^{1/k}]\!]$. Ak je navyše predĺžením (f,D) pozdĺž γ prvok (f_γ,D_γ), musí byť predĺžením (f°,Δ) pozdĺž μ prvok (f°_μ,Δ_μ) taký, že (ak je D_μ dostatočne malé) pre všetky $u \in \Delta_\mu$ platí $f^\circ_\mu(u) = f_\gamma(a+u^k)$. Tieto predĺženia môžu byť ľubovoľné – prvok (f°,Δ) je teda neobmedzene predĺžiteľný v $D'(0,r^{1/k})$, čím je daná aj globálna analytická funkcia $\mathbf{f}^\circ$ v tomto prstencovom okolí.

Ak je špeciálne krivka γ daná ako spojenie k kladne orientovaných kružníc cez stred prvku (f,D), je krivka μ zjavne uzavretá. Keďže je a bodom vetvenia rádu $k-1$, je predĺžením (f,D) pozdĺž takýchto k kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok (f,D). Predĺženie prvku (f°,Δ) pozdĺž krivky μ teda tiež musí byť (až na $\equiv$) opäť (f°,Δ). Z vety P10.15 teda zisťujeme, že $\mathbf{f}^\circ$ je na $D'(0,r^{1/k})$ jednohodnotová; v bode 0 má teda táto funkcia jednoznačne daný Laurentov rozvoj

$$\mathbf{f}^\circ(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u^n.$$

Pre všetky $u \in D'(0,r^{1/k})$ preto existuje analytický prvok $(\hat{f},\hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ taký, že

$$\hat{f}(a+u^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u^n$$

a aj opačne pre každý prvok $(\hat{f},\hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ existuje vetva funkcie $(z-a)^{1/k}$ taká, že

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}.$$

Keďže pre každé $z \in D'(a,r)$ existuje presne k neekvivalentných analytických prvkov funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v z, musia sa tieto líšiť iba vo voľbe vetvy funkcie $(z-a)^{1/k}$ a nutne

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k},$$

kde koeficienty $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ sú dané jednoznačne. Tým je dôkaz vety dokončený. $\square$

Práve dokázanú vetu o Puiseuxových radoch ešte využijeme na ďalšiu klasifikáciu bodov vetvenia. Terminológia z nasledujúcej definície je inšpirovaná charakterom bodov vetvenia algebraických funkcií (ako napríklad $z^{1/n}$ pre prirodzené $n \geq 2$) a prirodzených logaritmov.

Definícia P10.22. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a $b \in \mathbb{C}$ je bod vetvenia funkcie $\mathbf{f}$. Potom hovoríme, že b je:

a) *Algebraický bod vetvenia*, ak je b konečného rádu $k \geq 2$ a existuje $m \in \mathbb{Z}$ také, že funkcia $\mathbf{f}$ má v bode b Puiseuxov rozvoj

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-b)^{n/k}$$

Ak navyše $m \geq 0$, hovoríme o *obyčajnom bode vetvenia.*

b) *Logaritmický bod vetvenia*, ak je b nekonečného rádu.

c) *Transcendentný bod vetvenia*, ak b nie je algebraický bod vetvenia – čiže ak ide o logaritmický bod vetvenia, alebo o bod vetvenia konečného rádu $k \geq 2$ taký, že v Puiseuxovom rozvoji

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}$$

existuje nekonečne veľa rôznych $n < 0$ takých, že $c_n \neq 0$.

Poznámka P10.23. Algebraické body vetvenia sa často namiesto prostredníctvom Puiseuxových radov definujú prostredníctvom existencie vlastnej alebo nevlastnej limity funkcie v danom bode – pre nás to bude ekvivalentná charakterizácia algebraických bodov vetvenia, ktorú dokážeme na nasledujúcich cvičeniach.

Literatúra

[1] Markushevich, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 3.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.

[2] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.