Domáce úlohy

1. Nájdite všetky holomorfné funkcie $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ také, že pre všetky $z \in D(0,1)$ platí $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

2. Dokážte alebo vyvráťte: pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ so stredom v bode 0 a s polomerom konvergencie 1, ktorý diverguje *v práve k rôznych bodoch* kružnice $|z| = 1$ (a vo zvyšných bodoch tejto kružnice konverguje).

3. Dokážte, že každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq D'(0,1)$ je homotopická v $D'(0,1)$ s krivkou $\hat{\gamma}$ takou, že $\hat{\gamma}^* \subseteq \kappa(0,1/2)^*$.

4. Zistite, či existuje nekonštantná celá funkcia taká, že pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $f(a+ib) = 0$. Svoje tvrdenie dokážte.

5. Zistite, či existuje nekonštantná celá funkcia taká, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí $f(z) = f(z+1)$ a súčasne $f(z) = f(z+i)$. Svoje tvrdenie dokážte.

6. Nájdite všetky holomorfné funkcie $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ také, že pre všetky kladné $n \in \mathbb{N}$ platí $f(1/\pi^n) = 1/\pi^{n+2}$.

7. Dokážte alebo vyvráťte: ak $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(0,1)$, pričom ± 1 a $\pm i$ sú hromadnými bodmi $Z(f)$, tak nutne $f \equiv 0$.

8. Nájdite funkciu f, ktorá je na $D'(0,1)$ reprezentovaná Laurentovým radom so stredom v 0 a s končeným počtom záporných členov a na $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ Laurentovým radom so stredom v 0 a s nekonečným počtom záporných členov, alebo dokážte, že taká funkcia neexistuje.

9. Nájdite funkciu f, ktorá je na $D'(0,1)$ reprezentovaná Laurentovým radom so stredom v 0 a s nekončeným počtom záporných členov a na $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ Laurentovým radom so stredom v 0 a s konečným počtom záporných členov, alebo dokážte, že taká funkcia neexistuje.

10. Skonštruujte funkciu f, ktorá je holomorfná na $\mathbb{C}$ a v ∞ má pól rádu 42.

11. Dokážte, že bod vetvenia b funkcie $\mathbf{f}$ konečného rádu je algebraický práve vtedy, keď existuje vlastná alebo nevlastná limita príslušnej vetvy funkcie $\mathbf{f}$ v bode b. Úpravou tohto tvrdenia charakterizujte aj *obyčajné* algebraické body vetvenia.

12. Nájdite globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ s práve dvoma jednohodnotovými vetvami holomorfnými na $D(1,1)$ a s iným ako algebraickým bodom vetvenia rádu 1 v bode 0.