KOMPLEXNÁ ANALÝZA PRE INFORMATIKOV

Peter Kostolányi

8. apríla 2024

Obsah

Označenia a konvencie

Číselné množiny. Ako $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ postupne označujeme množiny všetkých prirodzených čísel *vrátane nuly*, všetkých celých čísel, všetkých racionálnych čísel a všetkých reálnych čísel. Komplexné čísla zavedieme v prvej kapitole a ich množinu budeme označovať symbolom $\mathbb{C}$.

Reálne čísla. Nech $a \in \mathbb{R}$ je daná konštanta. Ak nie je povedané inak, treba zápisy ako „nech $x \geq a$“, „nech $x > a$“, „nech $x \leq a$“, alebo „nech $x < a$“ chápať tak, že x je nejaké *reálne* číslo spĺňajúce danú nerovnosť.

Intervaly. Pre uzavreté intervaly používame notáciu $[a, b]$ a pre otvorené intervaly notáciu (a, b). Zľava resp. sprava uzavreté intervaly potom zapisujeme ako $[a, b)$ resp. $(a, b]$.

Množinové relácie a operácie. Neostrú inklúziu označujeme vždy ako „$\subseteq$“ resp. „$\supseteq$“; naopak ostrú inklúziu vždy ako „$\subsetneq$“ resp. „$\supsetneq$“. Pre operáciu množinového rozdielu používame symbol „$\setminus$“.

Nula na nultú. V celom texte pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$, ktorá v rámci matematickej analýzy nie je úplne samozrejmá. Nám však táto konvencia, všeobecne prijímaná napríklad v kombinatorike, nebude nijak prekážať – naopak povedie k podstatnému zjednodušeniu niektorých zápisov.

Kapitola 1

Komplexné čísla a komplexná rovina

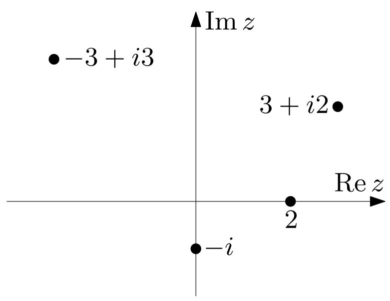
U čitateľa už predpokladáme určitú oboznámenosť s komplexnými číslami. Veľkú časť tejto kapitoly tak tvorí opakovanie známeho materiálu; jej prezentácia je sčasti ovplyvnená učebnicou [8].

1.1 Komplexné čísla a ich geometrická interpretácia

Komplexné čísla možno zaviesť rôznymi spôsobmi – azda najrýchlejšie by bolo povedať, že ide o prvky poľa $\mathbb{R}[i]/(i^2+1)$, kde $\mathbb{R}[i]$ označuje okruh polynómov o premennej i s reálnymi koeficientmi; tým je potom určená aj aritmetika komplexných čísel.

Za účelom zopakovania základných vlastností komplexných čísel ale bude účelnejšie definovať tento číselný obor elementárne. *Komplexným číslom* tak budeme rozumieť dvojicu reálnych čísel a a b, ktorú zapisujeme ako $a+ib$ alebo $a+bi$.[1] Komplexné číslo $a+i0$ stotožňujeme s reálnym číslom a a komplexné číslo $0+ib$ píšeme aj ako ib alebo bi; podobne namiesto $a+i1$ budeme väčšinou písať len $a+i$ a namiesto $0+i1$ len i. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme symbolom $\mathbb{C}$ a množinu reálnych čísel $\mathbb{R}$ chápeme – prostredníctvom spomenutého stotožnenia $a+i0$ s číslom a – ako podmnožinu množiny $\mathbb{C}$. Čísla $a+ib$ a $c+id$ považujeme za rovné – a píšeme $a+ib=c+id$ – ak $a=c$ a súčasne $b=d$.

Pre komplexné číslo $z=a+ib$ nazývame reálne číslo a jeho *reálnou zložkou* a píšeme $\operatorname{Re} z := a$. Podobne *reálne* číslo b nazývame *imaginárnou zložkou* komplexného čísla z a kladieme $\operatorname{Im} z := b$. Reprezentácia komplexných čísel ako usporiadaných dvojíc – teda pomocou ich reálnej a imaginárnej zložky – sa niekedy nazýva aj ich *karteziánskou reprezentáciou.* Komplexné číslo z tu totiž stotožňujeme s bodom – alebo ekvivalentne vektorom – $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ v rovine $\mathbb{R}^2$, ktorá sa v tomto kontexte nazýva aj *komplexnou rovinou* alebo *Gaussovou rovinou*; grafické znázornenie čísla bodom v rovine, tak ako na obrázku 1.1, sa v literatúre vyskytuje aj pod názvom *Argandov diagram.*



Obr. 1.1: Grafická reprezentácia čísel 2, $3+i2$, $-3+i3$ a $-i$ v komplexnej rovine.

[1] Na tomto mieste sa často uvádza, že i je prvok spĺňajúci rovnosť $i^2=-1$. To bude samozrejme pravda, ale nateraz nie je nutné zdôrazňovať to explicitne. V našom ponímaní bude i len skráteným zápisom komplexného čísla $0+i1$ a rovnosť $i^2=-1$ vyplynie z pravidiel aritmetiky komplexných čísel, ktorú onedlho zavedieme (operácie na komplexných číslach ale budeme samozrejme cielene definovať tak, aby rovnosť $i^2=-1$ bola splnená).

Čoskoro uvidíme, že oproti karteziánskej reprezentácii komplexných čísel býva často výhodnejšia ich polárna reprezentácia.

1.2 Aritmetika komplexných čísel

Operácie *sčítania* a *násobenia* komplexných čísel definujeme pre všetky $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nasledovne:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &:= (a+c)+i(b+d),\\ (a+ib)(c+id) &:= (ac-bd)+i(ad+bc).\end{aligned}$$

Je jasné, že číslo 0 je neutrálne vzhľadom na sčítanie a číslo 1 je neutrálne vzhľadom násobenie. Pre každé komplexné číslo $z = a+ib$ kladieme $-z := (-a)+i(-b)$ a v prípade $z \neq 0$ tiež píšeme $1/z := (a/(a^2+b^2))+i(-b/(a^2+b^2))$; ľahko pritom vidieť, že $z+(-z) = 0$ a $z(1/z) = 1$. Čitateľ ľahko overí, že množina $\mathbb{C}$ – s vyššie definovanými operáciami sčítania a násobenia – tvorí *pole*. Definície operácií ako odčítanie alebo delenie sú už potom rovnaké ako v každom poli. Vlastnosti poľa budeme pri práci s komplexnými číslami voľne využívať.

Umocňovanie komplexných čísel *na prirodzený exponent* je tak definované obvyklým induktívnym spôsobom, rovnako ako aj v ľubovoľnom inom poli: pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $z^0 = 1$ a $z^{n+1} = z^n z$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Z uvedených definícií zrejme vyplýva aj rovnosť $i^2 = -1$.

Absolútnu hodnotu komplexného čísla $z = a+ib$ definujeme ako bežnú euklidovskú vzdialenosť bodu (a, b) v komplexnej rovine od bodu $(0, 0)$ – teda

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Orientovaný uhol θ, ktorý v komplexnej rovine zviera kladná reálna os s vektorom (a, b), nazývame *argumentom*[2] komplexného čísla $z = a+ib$. Tento uhol nie je určený jednoznačne: pre $z \neq 0$ sa môže líšiť o celočíselné násobky čísla 2π a pre $z = 0$ môže byť ľubovoľný. Často si vystačíme s ľubovoľným z možných argumentov θ, prípadne je jeho konkrétna voľba zrejmá z kontextu – v takom prípade môžeme písať $\theta =: \arg z$. *Množinu všetkých argumentov* čísla z označíme $[\![\arg z]\!]$.

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a+ib$ nazveme číslo $\overline{z} := a-ib$. Je zrejmé, že zobrazenie $\overline{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dané ako $\overline{\cdot}\colon z \mapsto \overline{z}$ je bijektívne. Z častí (iii) a (iv) nasledujúceho tvrdenia vyplýva, že v skutočnosti ide o *automorfizmus* poľa $\mathbb{C}$ – čiže o izomorfizmus z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Tvrdenie 1.2.1. *Nech $z, w \in \mathbb{C}$. Potom:*

(i) $|zw| = |z||w|$; (iii) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$; (v) $\overline{\overline{z}} = z$; (vii) $|z| = |\overline{z}|$;

(ii) $|z|^2 = z\overline{z}$; (iv) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; (vi) $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; $(viii)$ $(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2$.

Dôkaz. Nech $z = a+ib$ a $w = c+id$. Potom

$$\begin{aligned}|zw| &= |(ac-bd)+i(ad+bc)| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} =\\ &= \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2} = \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)} =\\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z||w|,\end{aligned}$$

čo dokazuje rovnosť (i). Ďalej

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$$

[2] Kladnú reálnu os tu chápeme ako počiatočné rameno tohto orientovaného uhlu – ide teda o uhol, o ktorý je potrebné otočiť kladnú reálnu os *proti smeru hodinových ručičiek* tak, aby vznikla polpriamka jednoznačne určená smerovým vektorom (a, b).

a dokázaná je aj rovnosť (ii). Jednoduchý dôkaz rovnosti (iii) prenechávame čitateľovi. Na dôkaz rovnosti (iv) si stačí všimnúť, že

$$\overline{z}\,\overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = \overline{zw}.$$

Dôkaz rovností (v) až $(viii)$ je napokon celkom triviálny. □

Okrem práve dokázaných identít sú pri práci s komplexnými číslami užitočné aj nasledujúce nerovnosti – nerovnosť (ii) sa zvykne nazývať aj *trojuholníkovou nerovnosťou.*

Tvrdenie 1.2.2. *Nech* $z, w \in \mathbb{C}$. *Potom:*

(i) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ *a* $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$;

(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(iii) $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

Dôkaz. Nerovnosti (i) sú dôsledkom vzťahu $|\mathrm{Re}\, z|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 = |z|^2$ a nezápornosti absolútnych hodnôt. Na dôkaz nerovnosti (ii) stačí – vďaka nezápornosti čísel $|z + w|$ a $|z| + |w|$ – ukázať, že $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Tu však máme

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + w\overline{z}) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\overline{w}| = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.\end{aligned}$$

Napokon si všimnime platnosť nasledujúcich dvoch nerovností:

$$\begin{aligned}|z| - |w| &= |z + w - w| - |w| \leq |z + w| + |-w| - |w| = |z + w|, \\ |w| - |z| &= |w + z - z| - |z| \leq |w + z| + |-z| - |z| = |z + w|.\end{aligned}$$

Keďže je $||z| - |w||$ vždy rovné niektorej spomedzi hodnôt $|z| - |w|$ a $|w| - |z|$, dostávame ako dôsledok aj poslednú z dokazovaných nerovností. □

1.3 Goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla

Komplexnému číslu $z = a + ib$ zodpovedá bod komplexnej roviny s karteziánskymi súradnicami (a, b). Rovnaký bod komplexnej roviny môžeme zadať aj v *polárnych súradniciach* – je totiž jednoznačne určený svojou absolútnou hodnotou $|z| = r$ a hociktorým zo svojich argumentov $\arg z = \theta$. Ľahko pritom vidieť, že $a = r\cos\theta$ a $b = r\sin\theta$. Číslo z teda môžeme zadať v *goniometrickom tvare*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Takýto zápis je relatívne zdĺhavý; budeme preto častejšie používať ekvivalentný *exponenciálny tvar*, pri ktorom *definujeme*

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta;$$

namiesto $e^{i(-\theta)}$ budeme písať aj $e^{-i\theta}$. Komplexné číslo z spĺňajúce $|z| = r$ a $\arg z = \theta$ teda možno v exponenciálnom tvare písať ako

$$z = re^{i\theta}.$$

Zápis komplexného čísla v exponenciálnom tvare je pre nás v tomto momente čisto formálny a zatiaľ nie je ničím podložené interpretovať ho ako umocňovanie Eulerovho čísla na komplexný exponent – v skutočnosti ani zatiaľ nemáme definované, čo to umocňovanie na komplexný exponent je.

Exponenciálnu funkciu e^z komplexnej premennej z definujeme až v tretej kapitole; tým potom aj odôvodníme zmysluplnosť vyššie zavedenej notácie. *Na formálnej úrovni* však s exponenciálnym tvarom môžeme pracovať už teraz – v rámci nasledujúceho tvrdenia totiž overíme, že sa prinajmenšom pri najbežnejších operáciách správa tak, ako by sme od exponenciálnej funkcie očakávali.

Tvrdenie 1.3.1. *Nech* $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ *a* $k \in \mathbb{Z}$. *Potom:*

(i) $(e^{i\theta})(e^{i\phi}) = e^{i(\theta+\phi)}$;

(ii) $(1/e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$;

(iii) $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$.

Dôkaz. Z definície exponenciálneho tvaru a násobenia komplexných čísel, ako aj zo súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie dostávame

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})(e^{i\phi}) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = \\ &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = e^{i(\theta+\phi)}.\end{aligned}$$

Z definície prevrátenej hodnoty, rovnosti $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, párnosti funkcie kosínus a nepárnosti funkcie sínus ďalej

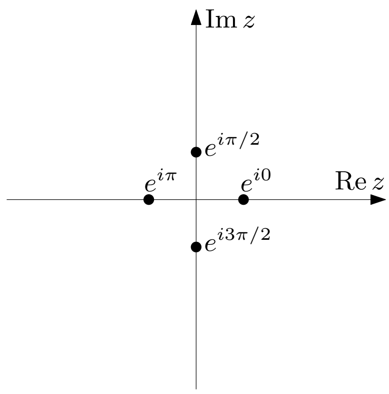
$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{i\theta}} &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} + i\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.\end{aligned}$$

Vzorec pre umocňovanie s využitím rovností (i) a (ii) ľahko dokážeme matematickou indukciou. □

S použitím exponenciálneho – alebo ekvivalentne goniometrického – tvaru komplexných čísel tak môžeme násobiť, deliť a umocňovať omnoho jednoduchšie, než pri ich karteziánskej reprezentácii. Pre $z = re^{i\theta}$ a $w = se^{i\phi}$ napríklad

$$\begin{aligned} zw &= rse^{i(\theta+\phi)}, \\ z/w &= (r/s)e^{i(\theta-\phi)} && (\text{ak } s \neq 0), \\ z^k &= r^k e^{ik\theta} && (\text{pre všetky } k \in \mathbb{N}; \text{ v prípade, že } r \neq 0, \text{ aj pre všetky } k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Z definície exponenciálneho tvaru je zrejmé, že napríklad $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ a $e^{i3\pi/2} = -i$ (obrázok 1.2). Okrem iného tak aj dostávame „formálnu verziu“ *Eulerovej rovnosti* $e^{i\pi} + 1 = 0$.



Obr. 1.2: Čísla $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ a $e^{i3\pi/2} = -i$.

Zo vzorca pre umocňovanie komplexných čísel v exponenciálnom tvare vyplýva ako jednoduchý dôsledok aj *de Moivreova veta.*

Tvrdenie 1.3.2 (De Moivreova veta). *Nech* $\theta \in \mathbb{R}$ *a* $k \in \mathbb{Z}$. *Potom* $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$.

Dôkaz. Je $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\sin k\theta$. □

Spomeňme ešte, že ako bezprostredný dôsledok periodicity funkcií sínus a kosínus – alebo alternatívne ako dôsledok rovnosti $e^{i2\pi} = 1$ a vzorca pre násobenie komplexných čísel v exponenciálnom tvare – dostávame pre všetky $k \in \mathbb{Z}$ rovnosť $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$. Navyše $e^{i\theta} = e^{i(\theta+\phi)}$ práve vtedy, keď $\phi = 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$.

1.4 Komplexné odmocniny jednej

Dôležitými špeciálnymi komplexnými číslami sú *n-té odmocniny jednej* pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ktorými rozumieme riešenia rovnice

$$z^n = 1 \tag{1.1}$$

o neznámej z. Nech $z = re^{i\theta}$, kde $r \geq 0$ a $\theta \in \mathbb{R}$. Zisťujeme, že rovnica (1.1) je ekvivalentná rovnici

$$r^n e^{in\theta} = 1.$$

Dve komplexné čísla sa môžu rovnať iba vtedy, keď sa rovnajú ich absolútne hodnoty; musí teda byť $r^n = 1$, z čoho pre nezáporné reálne číslo r nutne vyplýva $r = 1$. Preto $e^{in\theta} = 1$, čo je po prevedení do goniometrického tvaru ekvivalentné požiadavke

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = 1.$$

Keďže dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a imaginárne zložky, zisťujeme, že musia súčasne platiť rovnosti $\cos n\theta = 1$ a $\sin n\theta = 0$, z čoho vyplýva

$$\theta = 2k\pi/n, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Riešeniami rovnice (1.1) sú teda práve všetky komplexné čísla $e^{i2k\pi/n}$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Z pozorovaní na konci predchádzajúceho oddielu ale vyplýva, že stačí uvažovať argument $\theta \in [0, 2\pi)$. Riešeniami rovnice (1.1) tak sú práve všetky komplexné čísla $e^{i2k\pi/n}$ pre $k = 0, \ldots, n-1$, ktoré sú *po dvoch rôzne* a ktoré nazývame *n-tými komplexnými odmocninami jednej.* Napríklad na obrázku 1.2 sú teda znázornené všetky štvrté komplexné odmocniny jednej.

1.5 Základy topológie komplexnej roviny

Budeme sa teraz zaoberať elementárnou topológiou komplexnej roviny – čiže pojmami ako okolie, otvorená a uzavretá množina, či hromadný bod. To nám napríklad neskôr umožní definovať limitu a spojitosť funkcií komplexnej premennej. Veľkú časť tohto oddielu možno zhrnúť do jediného pozorovania: množina $\mathbb{C}$ tvorí, spoločne s bežnou euklidovskou metrikou, úplný metrický priestor. Čitateľovi oboznámenému so základmi teórie metrických priestorov sa tak niektoré pasáže nasledujúceho textu môžu právom zdať dôverne známymi. O základoch teórie metrických priestorov a topológie sa možno dočítať napríklad v Simmonsovej učebnici [10].

Metrické priestory v tomto texte využívať nebudeme a k topológii komplexnej roviny budeme pristupovať *ad hoc.* Čitateľa opäť odkazujeme aj na učebnicu [8].

Väčšina matematickej analýzy, ak nie matematická analýza celá, je nejakým spôsobom spätá s konceptom blízkosti. Najbežnejší spôsob jeho podchytenia závisí od možnosti merať vzdialenosť medzi jednotlivými bodmi, pričom v komplexnej rovine sa na tento účel obyčajne používa bežná euklidovská vzdialenosť. *Vzdialenosťou* čísel $z, w \in \mathbb{C}$ teda nazveme hodnotu

$$d(z, w) := |z - w|.$$

Označenie $d(z, w)$ zvyčajne v budúcnosti používať nebudeme a bude sa rozumieť samosebou, že $|z-w|$ je vzdialenosť čísel z a w.

V reálnej analýze sa pod okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ rozumie otvorený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pre nejaké $\varepsilon > 0$. Tento interval obsahuje práve všetky reálne čísla vzdialené od a o menej ako ε. Podobne definujeme uzavreté alebo prstencové okolie bodu a. V nasledujúcej definícii tieto pojmy priamočiaro rozšírime do oboru komplexných čísel.

Definícia 1.5.1. Nech $a \in \mathbb{C}$ je komplexné číslo.

a) *Okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

b) *Uzavretým okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$\overline{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

c) *Prstencovým okolím* bodu a o polomere $r > 0$ nazveme množinu

$$D'(a, r) := D(a, r) \setminus \{a\}.$$

d) *Medzikružím* so stredom v bode a nazveme ľubovoľnú množinu typu

$$A(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\},$$

kde $0 \leq r_1 < r_2$ sú reálne čísla. Prstencové okolie je špeciálnym prípadom medzikružia.

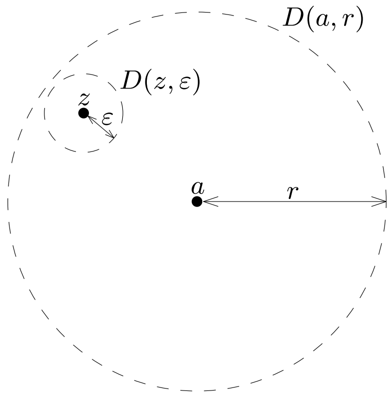
Otvorenou množinou teraz nazveme ľubovoľnú podmnožinu S množiny $\mathbb{C}$, ktorá pre každý bod z tejto množiny obsahuje aj nejaké jeho okolie. Inými slovami: nech zvolíme ľubovoľný bod otvorenej množiny S, vždy sa ešte z neho môžeme aspoň o nejakú malú vzdialenosť „pohnúť ľubovoľným smerom“ bez toho, aby sme množinu S opustili.

Definícia 1.5.2. Množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je *otvorená*, ak pre všetky $z \in S$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$.

Príklad 1.5.3. Každé okolie $D(a, r)$ pre $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ je otvorená množina. Ľubovoľné $z \in D(a, r)$ totiž musí spĺňať $|z - a| < r$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že $\varepsilon < r - |z - a|$. Potom $D(z, \varepsilon) \subseteq D(a, r)$, pretože pre $w \in D(z, \varepsilon)$ je

$$\begin{aligned} |w - a| = |w - z + z - a| \leq |w - z| + |z - a| < \varepsilon + |z - a| < \\ < r - |z - a| + |z - a| = r. \end{aligned}$$

Situácia je znázornená na obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Každé okolie $D(a, r)$ je otvorená množina.

Príklad 1.5.4. Podobne možno ukázať, že aj množina $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > r\}$ je otvorená pre všetky $a \in \mathbb{C}$ a $r \geq 0$.

Príklad 1.5.5. Prázdna množina $\emptyset$ a množina $\mathbb{C}$ sú triviálne otvorené.

Tvrdenie 1.5.6.

a) *Ak* $S_k \subseteq \mathbb{C}$ *je otvorená množina pre všetky* k *z nejakej množiny* K*, tak aj množina* $\bigcup_{k\in K} S_k$ *je otvorená.*

b) *Ak* $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{C}$ *sú otvorené množiny, tak aj množina* $\bigcap_{k=1}^{n} S_k$ *je otvorená.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie. □

Príklad 1.5.7. Ľubovoľné medzikružie je prienikom dvoch otvorených množín; tiež teda ide o otvorenú množinu. V dôsledku toho je otvorenou množinou aj každé prstencové okolie.

Nasledujúcu definíciu opäť získame priamočiarou úpravou analogickej definície v reálnom obore.

Definícia 1.5.8. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina. *Hromadným bodom* množiny S nazveme ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ také, že pre všetky $\varepsilon > 0$ obsahuje prstencové okolie $D'(z, \varepsilon)$ aspoň jeden bod množiny S. Ak $z \in \mathbb{C}$ patrí do S a súčasne nie je hromadným bodom S, nazýva sa *izolovaným bodom* množiny S.

Ďalšími dôležitými topologickými pojmami, ktoré teraz potrebujeme definovať, sú pojmy *uzavretej množiny* a *uzáveru*.

Definícia 1.5.9.

a) Množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je *uzavretá*, ak je množina $\mathbb{C} \setminus S$ otvorená.

b) *Uzáverom* množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ nazveme množinu $\overline{S}$ danú zjednotením S s množinou všetkých jej hromadných bodov.

Príklad 1.5.10. Z príkladu 1.5.4 je zrejmé, že každé uzavreté okolie $\overline{D}(a, r)$ pre $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ je uzavretá množina.

Definujme pre účely tejto a nasledujúcej kapitoly[3] *úsečku* $[a, b]$ z bodu $a \in \mathbb{C}$ do bodu $b \in \mathbb{C}$ ako množinu

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Príklad 1.5.11. Z príkladu 1.5.5 vyplýva, že množiny $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ sú súčasne otvorené aj uzavreté.

Ukážeme, že ide o jediné dve podmnožiny $\mathbb{C}$ s touto vlastnosťou. Skutočne: nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdna množina s neprázdnym komplementom $\mathbb{C} \setminus S$. Aby bola S otvorená a súčasne uzavretá, musia byť obidve množiny S a $\mathbb{C} \setminus S$ otvorené. Vezmime ľubovoľné $a \in S$ a $b \in \mathbb{C} \setminus S$ a spojme ich úsečkou $[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$. Uvažujme bod

$$z = a + t_0(b - a),$$

kde

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid a + t(b - a) \in S\}.$$

Určite pritom $0 < t_0 < 1$: z otvorenosti množiny S totiž vyplýva, že do S patrí aj nejaké dostatočne malé okolie bodu a; podobne z otvorenosti množiny $\mathbb{C} \setminus S$ vyplýva, že do $\mathbb{C} \setminus S$ musí patriť aj nejaké dostatočne malé okolie bodu b.

Ak teraz $z \in S$, z otvorenosti S dostávame existenciu $\varepsilon > 0$ takého, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Z toho vyplýva, že existuje aj nejaké $\delta > 0$ také, že $a + (t_0 + \delta)(b - a) \in S$, čo je spor s voľbou t_0. Podobne v prípade $z \in \mathbb{C} \setminus S$ dostávame existenciu čísla $\varepsilon > 0$ takého, že $D(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$, z čoho vyplýva, že pre nejaké $\delta > 0$ a všetky $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ platí $a + t(b - a) \in \mathbb{C} \setminus S$, čo je opäť spor s voľbou t_0. Množina S teda nemôže byť otvorená a súčasne uzavretá.

Dá sa očakávať, že pojem uzáveru bude s pojmom uzavretej množiny úzko súvisieť. Nasledujúce tvrdenie na tento súvis poukazuje.

[3] Neskôr úsečku definujeme viac „dynamickým“, aj keď v princípe ekvivalentným, spôsobom.

Tvrdenie 1.5.12.

(*i*) *Množina* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je uzavretá práve vtedy, keď obsahuje všetky svoje hromadné body.*

(*ii*) *Množina* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je uzavretá práve vtedy, keď* $\overline{S} = S$.

(*iii*) *Uzáver* $\overline{S}$ *množiny* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je najmenšou uzavretou množinou* T *spĺňajúcou* $S \subseteq T \subseteq \mathbb{C}$.

Dôkaz. Množina S je uzavretá práve vtedy, keď je množina $\mathbb{C} \setminus S$ otvorená. To je pravda práve vtedy, keď pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus S$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$, čiže $D'(z, \varepsilon)$ neobsahuje žiaden bod množiny S. To je práve vtedy, keď žiadne $z \in \mathbb{C} \setminus S$ nie je hromadným bodom S, t. j. keď S obsahuje všetky svoje hromadné body. Tým je dokázané tvrdenie (*i*) a aj tvrdenie (*ii*).

Zostáva dokázať časť (*iii*). Z tvrdenia (*i*) vyplýva, že každá uzavretá nadmnožina množiny S musí obsahovať množinu $\overline{S}$. Stačí teda ukázať, že množina $\overline{S}$ je uzavretá. Nech $z \in \mathbb{C}$ je hromadný bod množiny $\overline{S}$. Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom $D'(z, \varepsilon)$ obsahuje aspoň jeden bod $a \in \overline{S}$. Potom buď $a \in S$, alebo je bod a hromadným bodom množiny S, a teda pre všetky $\delta > 0$ obsahuje $D'(a, \delta)$ aspoň jeden bod množiny S; v druhom prípade zvoľme δ tak, aby bolo $\delta < \min\{|z - a|, \varepsilon - |z - a|\}$. Zisťujeme potom, že $D'(z, \varepsilon)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny S; keďže je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, je z hromadným bodom množiny S, a teda patrí do $\overline{S}$. Množina $\overline{S}$ teda obsahuje všetky svoje hromadné body a je uzavretá podľa tvrdenia (*i*). □

Definícia 1.5.13. Množinu $S \subseteq \mathbb{C}$ nazveme:

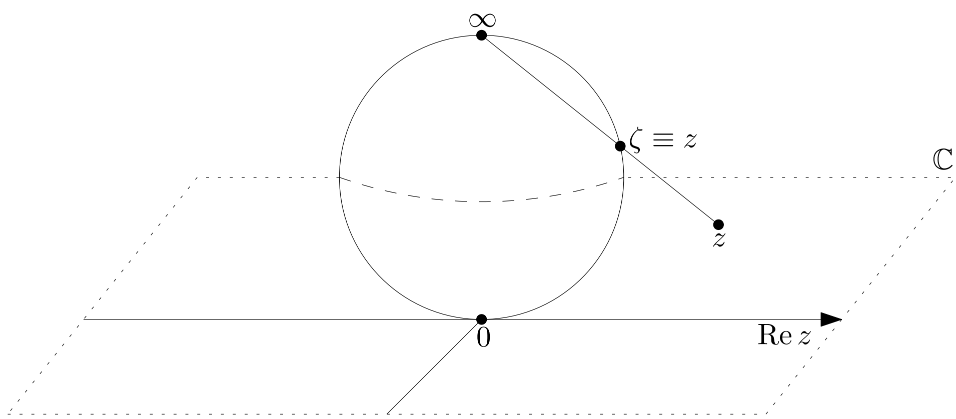
a) *Ohraničenou*, ak existuje $M \geq 0$ také, že pre všetky $z \in S$ je $|z| \leq M$.

b) *Kompaktnou*, ak je súčasne ohraničená a uzavretá.

1.6 Rozšírená komplexná rovina a Riemannova sféra

V reálnej analýze je často užitočné pracovať s rozšírenou reálnou osou $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. V nasledujúcom obdobným spôsobom rozšírime komplexnú rovinu. Na rozdiel od reálnej osi teraz máme viac ako dve možnosti ako „prísť do nekonečna“: môžeme sa tam totiž vydať napríklad po ľubovoľnej priamke v komplexnej rovine. Uvažovať komplexnú rovinu rozšírenú o nekonečne veľa bodov v nekonečne by bolo trochu ťažkopádne; oveľa užitočnejším konceptom sa javí byť *rozšírená komplexná rovina* $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, v ktorej všetky body v nekonečne stotožníme – všetky priamky teda oboma smermi vedú do jedného a toho istého nekonečna.

Prirodzeným modelom rozšírenej komplexnej roviny je takzvaná *Riemannova sféra*. Ide o povrch gule (napríklad o polomere 1/2) položenej svojím „južným pólom“ na bod $z = 0$ komplexnej roviny tak, ako na obrázku 1.4.



Obr. 1.4: Riemannova sféra a stereografická projekcia.

Každý bod ζ Riemannovej sféry, okrem jej „severného pólu“, môžeme stotožniť s práve jedným bodom komplexnej roviny nasledujúcim spôsobom: veďme priamku pretínajúcu Riemannovu sféru v jej „severnom póle“ a v bode ζ. Táto priamka pretne komplexnú rovinu v jedinom bode z; body z a ζ následne stotožníme. Špeciálne teda napríklad „južný pól“ Riemannovej sféry zodpovedá bodu 0. Takéto zobrazenie Riemannovej sféry bez „severného pólu“ do komplexnej roviny $\mathbb{C}$, ktoré je evidentne bijektívne, nazývame *stereografickou projekciou.*

Jediným bodom Riemannovej sféry, ktorý sa pri stereografickej projekcii do komplexnej roviny nezobrazí, je jej „severný pól“. Čím bližšie je však bod k „severnému pólu“, tým väčšia je absolútna hodnota čísla, na ktoré sa tento bod v komplexnej rovine zobrazí. Je preto prirodzené „severný pól“ Riemannovej sféry stotožniť s bodom ∞, čím získavame užitočný model rozšírenej komplexnej roviny.

Dá sa ukázať, že vzorom ľubovoľnej kružnice v komplexnej rovine je pri stereografickej projekcii kružnica na Riemannovej sfére neprechádzajúca cez ∞ a naopak. Podobne vzorom ľubovoľnej priamky v komplexnej rovine je kružnica na Riemannovej sfére *prechádzajúca* cez bod ∞ a naopak. Detaily možno nájsť v [8].

Okolia a prstencové okolia je možné definovať aj v rozšírenej komplexnej rovine: pre všetky $r > 0$ kladieme

$$D'(\infty, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} = \left\{z \in \tilde{\mathbb{C}} \;\middle|\; \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{r}\right\} \setminus \{\infty\},$$
$$D(\infty, r) := D'(\infty, r) \cup \{\infty\} = \left\{z \in \tilde{\mathbb{C}} \;\middle|\; \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{r}\right\},$$

kde $1/0 := \infty$ a $1/\infty := 0$. Opodstatnenie týchto definícií sa ukáže najmä vtedy, keď sa pozrieme na ich vzory na Riemannovej sfére.[4] Pomocou uvedených pojmov je možné definovať otvorené a uzavreté množiny v $\tilde{\mathbb{C}}$, hromadné body podmnožín $\tilde{\mathbb{C}}$ a podobne.

1.7 Súvislé množiny a oblasti

Intuitívne je viac ako zrejmé, čo treba rozumieť pod *súvislou* množinou $S \subseteq \mathbb{C}$ – ide o množinu, ktorá pozostáva „z jedného kusu“ a nie z „viacerých kusov“. Exaktná definícia tohto pojmu už tak jednoduchá nie je. Náš prístup teda bude nasledujúci: súvislosť množiny najprv definujeme štandardným topologickým spôsobom [9]. Následne vo vete 1.7.4 dokážeme ekvivalentnú charakterizáciu súvislosti pre otvorené množiny, vďaka ktorej uvidíme, že pojem súvislej otvorenej množiny je možné zachytiť aj elementárnejším spôsobom a naozaj zodpovedá tomu, čo by sme intuitívne očakávali.

Definícia 1.7.1. Množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je *súvislá*, ak *neexistuje* dvojica neprázdnych množín $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ takých, že $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$ a $X \cup Y = S$. Množina S je *nesúvislá*, ak nie je súvislá.

Poznámka 1.7.2. Množina S je teda súvislá práve vtedy, keď platí nasledujúca vlastnosť: kedykoľvek rozložíme množinu S na dve disjunktné neprázdne množiny X a Y – t. j. kedykoľvek $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ a $X \cup Y = S$ – musí buď uzáver množiny X obsahovať bod množiny Y, alebo naopak. To znamená, že tieto dve množiny spolu musia v určitom veľmi silnom zmysle slova „susediť“ – jedna z nich musí obsahovať nejaký hromadný bod tej druhej.

Dokážme najprv, že pre *otvorené* množiny možno definíciu súvislosti sformulovať o niečo jednoduchším spôsobom.

[4] Jediné, čo tu trochu nesedí je, že okolie sa so zväčšujúcim sa polomerom zmenšuje. Táto skutočnosť však až tak podstatná nie je.

Tvrdenie 1.7.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je* otvorená *množina. Potom je S súvislá práve vtedy, keď neexistujú disjunktné neprázdne otvorené množiny $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ také, že $S = X \cup Y$.*

Dôkaz. Ak je množina S nesúvislá, musí existovať dvojica neprázdnych množín $U, V \subseteq \mathbb{C}$ takých, že $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ a $U \cup V = S$. To znamená, že

$$U \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{V} \qquad \text{a} \qquad V \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{U}, \tag{1.2}$$

kde množiny $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ a $\mathbb{C} \setminus \overline{V}$ sú otvorené. Množiny $X := S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{V})$ a $Y := S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U})$ sú preto tiež otvorené podľa tvrdenia 1.5.6. Z (1.2) a z inklúzií $U \subseteq S$ a $V \subseteq S$ vyplýva $U \subseteq X$ a $V \subseteq Y$. Zo vzťahu $S = U \cup V$ na druhej strane dostávame $X = S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{V}) \subseteq S \cap (\mathbb{C} \setminus V) \subseteq U$ a $Y = S \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U}) \subseteq S \cap (\mathbb{C} \setminus U) \subseteq V$. Teda $X = U$ a $Y = V$, pričom tieto množiny sú disjunktné, neprázdne a otvorené a platí $S = X \cup Y$; tým je jedna z implikácií dokázaná.

Na dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že existuje dvojica neprázdnych disjunktných otvorených množín $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ takých, že $S = X \cup Y$. Keby množina Y obsahovala hromadný bod a množiny X, musela by vďaka svojej otvorenosti obsahovať pre nejaké $\varepsilon > 0$ aj celé okolie $D(a, \varepsilon)$. Toto okolie ale nutne obsahuje aspoň jeden bod množiny X, čo odporuje disjunktnosti množín X a Y. Nutne teda $\overline{X} \cap Y = \emptyset$ a obdobne by sme dokázali aj $X \cap \overline{Y} = \emptyset$: množina S je nesúvislá. □

Lomenou čiarou z $a \in \mathbb{C}$ do $b \in \mathbb{C}$ v množine $S \subseteq \mathbb{C}$ budeme rozumieť zjednotenie úsečiek

$$L = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n],$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 = a$, $a_n = b$ a $L \subseteq S$.

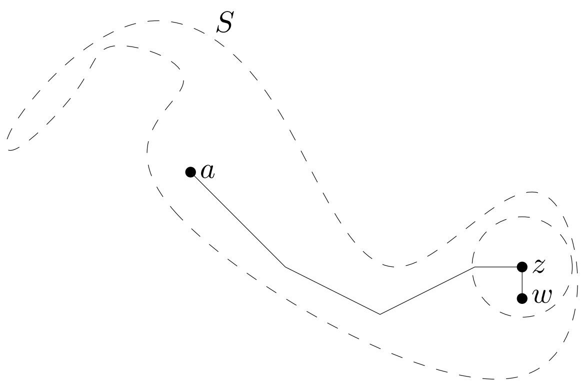
Veta 1.7.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je* otvorená *množina. Potom je S súvislá práve vtedy, keď pre všetky $a, b \in S$ existuje v S lomená čiara z bodu a do bodu b.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že je množina S súvislá. Zvoľme pevné $a, b \in S$ a dokážme existenciu lomenej čiary z a do b. Definujme množinu $F \subseteq S$ nasledovne:

$$F := \{z \in S \mid \text{v množine } S \text{ existuje lomená čiara z } a \text{ do } z\}.$$

Dokážeme, že množiny F a $S \setminus F$ sú obidve otvorené, z čoho vďaka otvorenosti a predpokladanej súvislosti množiny S z tvrdenia 1.7.3 vyplynie prázdnosť jednej z týchto množín. Keďže očividne $a \in F$, bude musieť byť prázdnou množina $S \setminus F$. Pretože v takom prípade nutne $F = S$, a teda aj $b \in F$, bude tak prvá z implikácií dokázaná.

Zvoľme ľubovoľné $z \in F$. Potom existuje lomená čiara L z a do z. Keďže je množina S otvorená, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Ak teraz $w \in D(z, \varepsilon)$, predĺžením lomenej čiary L úsečkou $[z, w]$ tiež dostávame lomenú čiaru v S. Platí teda $D(z, \varepsilon) \subseteq F$ a F je otvorená množina (obrázok 1.5).



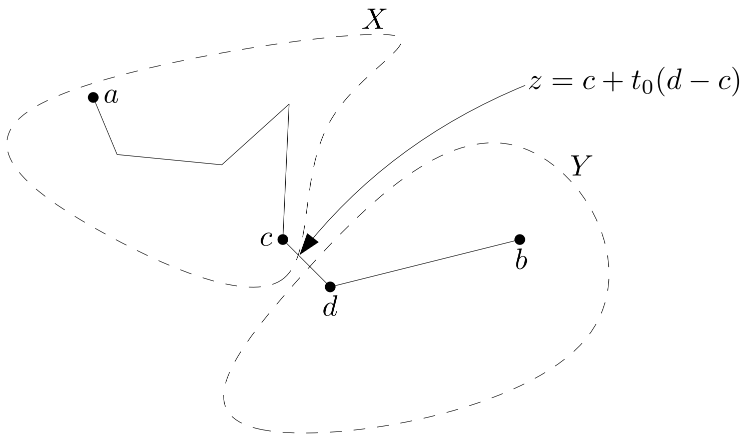
Obr. 1.5: Dôkaz, že množina F je otvorená.

Zvoľme teraz ľubovoľné $z \in S \setminus F$. Keďže je množina S otvorená, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Keby pre niektoré $w \in D(z, \varepsilon)$ bolo $w \in F$, existovala by v S lomená čiara L z a do w. Tú by ale úsečkou $[w, z]$ bolo možné predĺžiť na lomenú čiaru z a do z, tiež ležiacu v S; išlo by teda o spor s predpokladom $z \in S \setminus F$. Preto $D(z, \varepsilon) \subseteq S \setminus F$ a množina $S \setminus F$ je otvorená.

Za účelom dôkazu opačnej implikácie predpokladajme, že množina S nie je súvislá a súčasne z každého $a \in S$ do každého $b \in S$ možno viesť v S lomenú čiaru. Podľa tvrdenia 1.7.3 potom existujú disjunktné neprázdne otvorené množiny $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ také, že $X \cup Y = S$. Zvoľme $a \in X$ a $b \in Y$ a uvažujme lomenú čiaru z a do b. Jej súčasťou musí byť úsečka

$$[c, d] = \{c + t(d - c) \mid t \in [0, 1]\}$$

vedúca z bodu $c \in X$ do bodu $d \in Y$, ako je to znázornené na obrázku 1.6.



Obr. 1.6: Dôkaz, že nesúvislosť znemožňuje existenciu lomenej čiary medzi niektorými dvojicami bodov.

Položme $t_0 := \sup\{t \in [0, 1] \mid c + t(d - c) \in X\}$. Z otvorenosti množín X a Y evidentne vyplýva $0 < t_0 < 1$. Uvažujme bod $z = c + t_0(d - c)$. Keby bolo $z \in X$, z otvorenosti X by sme dostali existenciu okolia $D(z, \varepsilon) \subseteq X$, a teda aj existenciu čísla $\delta > 0$ takého, že $c + (t_0 + \delta)(d - c) \in X$; to by bol spor s definíciou t_0. Keby na druhej strane bolo $z \in Y$, z otvorenosti Y by vyplývala existencia okolia $D(z, \varepsilon) \subseteq Y$; existovalo by preto $\delta > 0$ také, že pre všetky $t \in [t - \delta, t_0]$ je $c + t(d - c) \in Y$, čo je opäť spor s definíciou t_0. Prišli sme teda k sporu a aj druhá implikácia je dokázaná. $\square$

Poznámka 1.7.5. Veta 1.7.4 zostane v platnosti, aj keď v jej znení nahradíme existenciu lomenej čiary napríklad existenciou vhodne definovanej krivky alebo existenciou lomenej čiary pozostávajúcej iba z „horizontálnych a vertikálnych úsečiek“. Čitateľ sa o tom môže presvedčiť sám v rámci jednoduchého cvičenia.

Na záver tohto oddielu ešte uveďme definíciu tzv. *oblasti* – najčastejšie uvažovaného typu definičného oboru (jednohodnotovej) funkcie komplexnej premennej.

Pôjde o podmnožinu komplexnej roviny, ktorá je súvislá – čo je v súvislosti s funkciami celkom logický predpoklad, keďže funkciu definovanú na nesúvislej množine možno typicky opísať pomocou niekoľkých funkcií na jej súvislých komponentoch – a zároveň otvorená – čo znamená, že v každom bode oblasti môžeme skúmať lokálne vlastnosti funkcie „v ľubovoľnom smere“, čím sa zbavíme množstva nepríjemných okrajových prípadov. Všimnime si tiež, že vďaka otvorenosti je súvislosť oblasti daná aj ekvivalentnými podmienkami z tvrdenia 1.7.3 a vety 1.7.4.

Definícia 1.7.6. *Oblasť* je ľubovoľná súvislá otvorená množina $S \subseteq \mathbb{C}$.

Cvičenia

1. Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Dokážte, že
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2k\pi/n} = 0;$$
súčet všetkých n-tých komplexných odmocnín jednej je teda pre $n \geq 2$ rovný nule. Aplikujte tento poznatok na výpočet sumy
$$\sum_{k=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \binom{m}{3k}$$
pre dané prirodzené číslo m.

2. Dokážte tvrdenie 1.5.6.

3. Dokážte, že pre všetky $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ je $\overline{D}(a, r) = \overline{D(a, r)}$.

4. *Otvoreným pokrytím* množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ nazveme systém $(S_j \mid j \in J)$ otvorených podmnožín $\mathbb{C}$, kde J je ľubovoľná množina a
$$\bigcup_{j \in J} S_j \supseteq S.$$
Otvoreným podpokrytím pokrytia $(S_j \mid j \in J)$ nazveme ľubovoľné otvorené pokrytie $(S_j \mid j \in K)$ množiny S také, že $K \subseteq J$. Otvorené pokrytie $(S_j \mid j \in J)$ nazveme *konečným*, ak je J konečná množina.

   Dokážte, že množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktná práve vtedy, keď ľubovoľné jej otvorené pokrytie má aspoň jedno konečné podpokrytie.

5. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$. *Hranicou* množiny S nazveme množinu ∂S všetkých bodov $a \in \mathbb{C}$ takých, že pre všetky $\varepsilon > 0$ je $D(a, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ a zároveň $D(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$. Dokážte, že hranica ∂S ľubovoľnej množiny S je vždy uzavretá a množina S je uzavretá práve vtedy, keď $\partial S \subseteq S$.

6. *Vnútrom* množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ nazveme množinu $\operatorname{Int}(S) = \{z \in S \mid \exists \varepsilon > 0 : D(z, \varepsilon) \subseteq S\}$. Dokážte, že vnútro $\operatorname{Int}(S)$ ľubovoľnej množiny S je vždy otvorené a množina S je otvorená práve vtedy, keď $S = \operatorname{Int}(S)$.

7. Dokážte, že pre ľubovoľnú množinu $S \subseteq \mathbb{C}$ je $\partial S = \overline{S} \setminus \operatorname{Int}(S)$.

Kapitola 2

Holomorfné funkcie

2.1 Komplexné funkcie komplexnej premennej

Komplexná analýza sa zaoberá *komplexnými funkciami komplexnej premennej.* Po približne prvé dve tretiny tohto textu budeme takéto funkcie chápať zvyčajným spôsobom, čiže ako zobrazenia $f\colon S \to \mathbb{C}$ pre nejakú množinu $S \subseteq \mathbb{C}$.

Takáto zdanlivo jasná a bezproblémová interpretácia pojmu komplexnej funkcie komplexnej premennej nemusí byť vždy postačujúca: už sme napríklad narazili na viachodnotovosť argumentu; keby sme teda chceli argument chápať ako funkciu $\arg z$ komplexnej premennej z, šlo by o *viachodnotovú funkciu* – čiže o tzv. *multifunkciu.* Ukáže sa, že viachodnotové sú v komplexnom obore aj funkcie ako logaritmus alebo odmocnina. Spočiatku budeme medzi funkciami a multifunkciami rozlišovať, pričom multifunkciami sa budeme zaoberať len okrajovo – väčšinou z nich budeme „vyrábať" jednohodnotové funkcie vhodnou voľbou „správnej" výstupnej hodnoty. Neskôr sa už však situácia stane neúnosnou a pojem funkcie komplexnej premennej budeme nútení zrevidovať tak, aby vhodným spôsobom zahŕňal jednohodnotové aj viachodnotové funkcie.

Zatiaľ ale komplexnou funkciou komplexnej premennej rozumieme obyčajné zobrazenie $f\colon S \to \mathbb{C}$. Ku každej takejto funkcii môžeme definovať jej *reálnu časť* ako funkciu $\operatorname{Re} f\colon S \to \mathbb{R}$ definovanú pre všetky $z \in S$ predpisom $(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re}(f(z))$ a jej *imaginárnu časť* ako funkciu $\operatorname{Im} f\colon S \to \mathbb{R}$ danú pre všetky $z \in S$ ako $(\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im}(f(z))$. Zjavne potom $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

2.2 Limita a spojitosť

Definujeme teraz *limitu postupnosti* komplexných čísel, *limitu funkcie* komplexnej premennej a *spojité funkcie* komplexnej premennej. Pôjde pritom o samozrejmé analógie definícií z reálnej analýzy; okolia bodov na reálnej osi akurát nahradíme okoliami bodov v komplexnej rovine.

Definícia 2.2.1. Hovoríme, že postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ má *limitu* $b \in \tilde{\mathbb{C}}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $n_0 \geq k$ a pre všetky $n \geq n_0$ je $a_n \in D(b, \varepsilon)$. V takom prípade píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ alebo $a_n \to b$ pre $n \to \infty$. Ak navyše $b \in \mathbb{C}$, hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *konverguje* a jej limitu b nazývame *vlastnou*; pre $b = \infty$ hovoríme o *nevlastnej limite.*

Limita postupnosti $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ evidentne nezávisí od počiatočného indexu k; pod zápisom $\lim_{n\to\infty} a_n$ tak treba rozumieť limitu ktorejkoľvek z dobre definovaných postupností $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Definícia 2.2.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in \mathbb{C}$ je hromadným bodom množiny S. Hovoríme, že funkcia f má v bode a *limitu* $b \in \tilde{\mathbb{C}}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a, \delta) \cap S$ je $f(z) \in D(b, \varepsilon)$. V takom prípade píšeme $\lim_{z\to a} f(z) = b$ alebo $f(z) \to b$ pre $z \to a$. Pre $b \in \mathbb{C}$ hovoríme o *vlastnej* a pre $b = \infty$ o *nevlastnej* limite b.

Úplne rovnako možno definovať aj limitu funkcie $f\colon S \to \mathbb{C}$ v nekonečne za predpokladu, že je $a = \infty$ hromadným bodom S v rozšírenej komplexnej rovine $\tilde{\mathbb{C}}$ – čiže v prípade, že je množina S neohraničená.[1]

Definícia 2.2.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je neohraničená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Hovoríme, že funkcia f má v nekonečne *limitu* $b \in \tilde{\mathbb{C}}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(\infty, \delta) \cap S$ je $f(z) \in D(b, \varepsilon)$. V takom prípade píšeme $\lim_{z\to\infty} f(z) = b$ alebo $f(z) \to b$ pre $z \to \infty$. Pre $b \in \mathbb{C}$ hovoríme o *vlastnej* a pre $b = \infty$ o *nevlastnej* limite b.

Definícia 2.2.4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Hovoríme, že funkcia f je *spojitá v bode* a, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a, \delta) \cap S$ je $f(z) \in D(f(a), \varepsilon)$.

Definícia 2.2.5. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Hovoríme, že funkcia f je *spojitá na množine* T, ak je spojitá vo všetkých bodoch $a \in T$. Ďalej hovoríme, že funkcia $f\colon S \to \mathbb{C}$ je *spojitá*, ak je spojitá na S.

Ľahko vidieť, že každá funkcia je spojitá v izolovaných bodoch svojho definičného oboru. Nasledujúce tvrdenie, analogické podobnému tvrdeniu z reálnej analýzy, charakterizuje spojitosť funkcie v bodoch definičného oboru S, ktoré sú súčasne hromadnými bodmi množiny S.

Tvrdenie 2.2.6. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$ je* hromadným bodom S. *Potom je f spojitá v bode a práve vtedy, keď $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.*

Dôkaz. Jednoduché cvičenie. □

Nasledujúce tvrdenie umožňuje previesť skúmanie komplexných limít na skúmanie reálnych limít.

Tvrdenie 2.2.7. *Nech $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Potom:*

(i) *Postupnosť $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ konverguje k vlastnej limite práve vtedy, keď konvergujú obidve postupnosti $(\operatorname{Re} a_n)_{n=k}^{\infty}$ a $(\operatorname{Im} a_n)_{n=k}^{\infty}$. V takom prípade*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

(ii) *Nech a je hromadný bod množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Vlastná limita $\lim_{z\to a} f(z)$ existuje práve vtedy, keď existujú obe vlastné limity $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z)$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z)$. Vtedy*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) + i \lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z).$$

(iii) *Nech $a \in S$. Potom je funkcia f spojitá v bode a práve vtedy, keď sú v bode a spojité obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.*

Dôkaz. Na ukážku dokážeme tvrdenie (ii); dôkazy zvyšných dvoch tvrdení sú analogické. Ak existuje vlastná limita $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a, \delta) \cap S$ je $f(z) \in D(b, \varepsilon)$ – čiže $|f(z) - b| < \varepsilon$. Keďže ale pre všetky $w \in \mathbb{C}$ je $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$ a $|\operatorname{Im} w| \leq |w|$, musí v takom prípade byť aj $|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} b| = |\operatorname{Re}(f(z) - b)| < \varepsilon$ a $|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} b| = |\operatorname{Im}(f(z) - b)| < \varepsilon$, v dôsledku čoho $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} b$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} b$.

[1] V reálnej analýze sa niekedy hromadné body definujú ako prvky rozšírenej reálnej osi. Keby sme v podobnom duchu definovali hromadné body podmnožín $\mathbb{C}$ ako prvky $\tilde{\mathbb{C}}$, nemuseli by sme prípad $a = \infty$ riešiť osobitne. Na druhej strane by ale prestali platiť niektoré užitočné vlastnosti z minulej kapitoly – napríklad by už nebola pravda, že množina je uzavretá práve vtedy, keď obsahuje všetky svoje hromadné body.

Nech teraz naopak existujú limity $\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = c$ a $\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = d$. Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom vieme zvoliť[2] $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ je $|\operatorname{Re} f(z) - c| < \varepsilon/2$ a *súčasne* $|\operatorname{Im} f(z) - d| < \varepsilon/2$. Z trojuholníkovej nerovnosti tak pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ dostávame

$$|f(z) - (c+id)| = |(\operatorname{Re} f(z) - c) + i(\operatorname{Im} f(z) - d)| \leq |\operatorname{Re} f(z) - c| + |\operatorname{Im} f(z) - d| < \varepsilon$$

a skutočne $\lim_{z\to a} f(z) = c + id$. $\square$

Limity funkcií komplexnej premennej a postupností komplexných čísel, ako aj spojité funkcie komplexnej premennej, zdieľajú s ich náprotivkami z reálnej analýzy viacero elementárnych vlastností – napríklad tie z nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 2.2.8. *Nech $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, $S \subseteq \mathbb{C}$ množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia.*

(*i*) *Ak existuje $b \in \mathbb{C}$ také, že $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, tak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |b|$.*

(*ii*) *Nech a je hromadný bod množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Ak existuje $b \in \mathbb{C}$ také, že $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak $\lim_{z\to a} |f(z)| = |b|$.*

(*iii*) *Nech $a \in S$. Ak je $f(z)$ spojitá v bode a, je v bode a spojitá aj funkcia $|f(z)|$.*

Dôkaz. Opäť dokážeme len tvrdenie (*ii*); dôkaz zvyšných dvoch tvrdení je analogický. Ak existuje limita $\lim_{z\to a} f(z) = b$, tak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ je $f(z) \in D(b,\varepsilon)$, čiže $|f(z) - b| < \varepsilon$. Potom však $||f(z)| - |b|| = ||f(z)| - |-b|| \leq |f(z) - b| < \varepsilon$, a teda $\lim_{z\to a} |f(z)| = |b|$. $\square$

Nasledujúce tvrdenie možno ľahko dokázať priamo z definícií limity a spojitosti, a to prakticky rovnako ako v reálnej analýze; dôkaz preto prenechávame čitateľovi.

Tvrdenie 2.2.9. *Nech $(a_n)_{n=k}^{\infty}, (b_n)_{n=k}^{\infty}$ sú postupnosti komplexných čísel, nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a nech $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú funkcie.*

(*i*) *Ak existujú vlastné limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$, tak existujú aj vlastné limity*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \qquad a \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Ak navyše $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, existuje aj vlastná limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

(*ii*) *Nech a je hromadný bod množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Ak existujú vlastné limity $\lim_{z\to a} f(z)$ a $\lim_{z\to a} g(z)$, tak existujú aj vlastné limity*

$$\lim_{z\to a} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z\to a} f(z) \pm \lim_{z\to a} g(z) \qquad a \qquad \lim_{z\to a} (f(z)g(z)) = \left(\lim_{z\to a} f(z)\right)\left(\lim_{z\to a} g(z)\right).$$

Ak navyše $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0$, existuje aj vlastná limita

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to a} f(z)}{\lim_{z\to a} g(z)}.$$

(*iii*) *Nech $a \in S$. Ak sú funkcie $f(z)$ a $g(z)$ spojité v bode a, sú v bode a spojité aj funkcie $f(z) \pm g(z)$ a $f(z)g(z)$. Ak navyše $g(a) \neq 0$, je v bode a spojitá aj funkcia $f(z)/g(z)$.*

[2] Pre každú z funkcií $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ dostaneme jednu hodnotu δ; stačí potom vybrať tú menšiu.

V poslednom z elementárnych tvrdení o limitách a spojitosti sa zameriame na zložené funkcie – opäť pôjde o obdobu dobre známeho tvrdenia z reálnej analýzy, ktorú tu ale nevyslovíme v najvšeobecnejšej možnej podobe.

Tvrdenie 2.2.10. *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú množiny, $g\colon S \to \mathbb{C}$, $f\colon T \to \mathbb{C}$ sú funkcie a nech $T \supseteq g(S)$.*

(i) *Nech a je hromadný bod množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Ak existuje vlastná limita $\lim_{z\to a} g(z) = b \in T$ a funkcia $f(z)$ je spojitá v bode b, existuje aj vlastná limita*

$$\lim_{z\to a}(f\circ g)(z) = \lim_{z\to a} f(g(z)) = f(b).$$

(ii) *Nech a je hromadný bod množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Nech existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim_{z\to a} g(z) = b$, kde b je buď hromadným bodom množiny T, alebo je množina T neohraničená a $b = \infty$; nech ďalej existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim_{w\to b} f(w) = c$. Ak $g(z) \neq b$ pre všetky $z \in S \setminus \{a\}$, tak existuje aj limita*

$$\lim_{z\to a}(f\circ g)(z) = \lim_{z\to a} f(g(z)) = c.$$

(iii) *Ak je funkcia $g(z)$ spojitá v bode $a \in S$ a funkcia $f(z)$ je spojitá v bode $g(a) \in T$, je v bode a spojitá aj funkcia $(f\circ g)(z) = f(g(z))$.*

Dôkaz. Začnime *dôkazom časti* (*i*). Z predpokladu existencie limity $\lim_{z\to a} g(z) = b \in T$ vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta)\cap S$ je $g(z) \in D(b,\varepsilon)$.

Ak je b izolovaným bodom množiny T, môžeme zvoliť $\varepsilon > 0$ tak, aby $D(b,\varepsilon)\cap T = \{b\}$ a vďaka inklúzii $T \supseteq g(S)$ zisťujeme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta)\cap S$ je $g(z) = b$ – a teda aj $f(g(z)) = f(b) \in D(f(b),\varepsilon)$. Naozaj teda $\lim_{z\to a} f(g(z)) = f(b)$.

Ak je naopak b hromadným bodom množiny T, podľa tvrdenia 2.2.6 je $\lim_{z\to b} f(z) = f(b)$. Ku každému $\varepsilon > 0$ teda existuje $\eta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(b,\eta)\cap T$ je $f(z) \in D(f(b),\varepsilon)$. Keďže ale súčasne $\lim_{z\to a} g(z) = b$, musí existovať aj $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta)\cap S$ je $g(z) \in D(b,\eta)$ – a keďže $T \supseteq g(S)$, nutne aj $g(z) \in D(b,\eta)\cap T$. Pre každé $z \in D'(a,\delta)\cap S$ teda buď $g(z) \in D'(b,\eta)\cap T$ a $f(g(z)) \in D(f(b),\varepsilon)$, alebo $g(z) = b$ a $f(g(z)) = f(b) \in D(f(b),\varepsilon)$. Pretože je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, skutočne $\lim_{z\to a} f(g(z)) = f(b)$.

Pokračujme *dôkazom časti* (*ii*). Vďaka existencii limity $\lim_{w\to b} f(w) = c$ zisťujeme, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ také, že pre všetky $w \in D'(b,\eta)\cap T$ je $f(w) \in D(c,\varepsilon)$. Podobne vďaka existencii limity $\lim_{z\to a} g(z) = b$ musí existovať $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta)\cap S$ je $g(z) \in D(b,\eta)$. Vďaka predpokladom tvrdenia navyše $g(z) \in T$ a $g(z) \neq b$; je teda $g(z) \in D'(b,\eta)\cap T$, v dôsledku čoho $f(g(z)) \in D(c,\varepsilon)$. Keďže je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, naozaj $\lim_{z\to a} f(g(z)) = c$.

Na *dôkaz časti* (*iii*) uvažujme ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Zo spojitosti funkcie f v bode $g(a)$ vyplýva existencia čísla $\eta > 0$ takého, že pre všetky $z \in D(g(a),\eta)\cap T$ je $f(z) \in D(f(g(a)),\varepsilon)$. K danému η navyše vďaka spojitosti funkcie g v bode a existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,\delta)\cap S$ je $g(z) \in D(g(a),\eta)$; keďže $T \supseteq g(S)$, je aj $g(z) \in D(g(a),\eta)\cap T$ a z predchádzajúceho vyplýva $f(g(z)) \in D(f(g(a)),\varepsilon)$. Číslo $\varepsilon > 0$ sme uvažovali ľubovoľné – funkcia $(f\circ g)(z)$ je teda skutočne spojitá v bode a. □

Vyslovme ešte niekoľko ďalších viet o limitách, ktoré sú komplexnými analógiami dobre známych tvrdení z reálnej analýzy. Dôkazy prvých dvoch z nich, založené na využití ich reálnych náprotivkov a tvrdenia 2.2.7, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

Veta 2.2.11 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie). *Postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ konverguje k vlastnej limite práve vtedy, keď pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $n_0 \geq k$ a pre všetky $n, m \geq n_0$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Veta 2.2.12 (Bolzanova-Weierstrassova veta). *Z každej ohraničenej*[3] *postupnosti komplexných čísel* $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ *možno vybrať konvergentnú podpostupnosť.*

Veta 2.2.13 (Heineho definícia limity). *Nech* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je množina a* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *funkcia. Nech* $a \in \mathbb{C}$ *je hromadným bodom množiny* S*, alebo nech je* S *neohraničená a* $a = \infty$*. Nech* $b \in \tilde{\mathbb{C}}$*. Potom* $\lim_{z\to a} f(z) = b$ *práve vtedy, keď pre každú postupnosť* $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ *čísel z* $S \setminus \{a\}$ *takú, že* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ *platí* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$.

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $\lim_{z\to a} f(z) = b$ a súčasne existuje postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ čísel z $S\setminus\{a\}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ a súčasne limita $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ neexistuje alebo sa nerovná b. Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ tak, že $f(z_n) \notin D(b,\varepsilon)$. Pre ľubovoľné $\delta > 0$ teraz zvoľme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pre všetky $n \geq n_0$ bolo $z_n \in D(a,\delta)$; to ide, lebo $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Zisťujeme, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $\delta > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je $z_n \in D'(a,\delta) \cap S$ a súčasne $f(z_n) \notin D(b,\varepsilon)$. To je v spore s predpokladom $\lim_{z\to a} f(z) = b$.

Na dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že pre každú postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ čísel z $S \setminus \{a\}$ spĺňajúcu $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ je $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$. Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,\delta) \cap S$ je $f(z) \in D(b,\varepsilon)$. Sporom, nech to nie je pravda. Ak $a \in \mathbb{C}$, môžeme pre $n = 1,2,3,\ldots$ položiť $\delta_n = 1/n$, pričom pre každé takéto n nutne existuje $w_n \in D'(a,\delta_n) \cap S$ také, že $f(w_n) \notin D(b,\varepsilon)$. Podobne pre $a = \infty$ môžeme pre $n = 1,2,3,\ldots$ položiť $\delta_n = n$ a pre každé takéto n opäť dostaneme existenciu $w_n \in D'(a,\delta_n) \cap S$ takého, že $f(w_n) \notin D(b,\varepsilon)$. V oboch prípadoch zrejme $\lim_{n\to\infty} w_n = a$, kým limita $\lim_{n\to\infty} f(w_n)$ nemôže súčasne existovať a byť rovná b. To je spor s naším predpokladom. □

Veta 2.2.14 (O spojitosti na kompakte). *Nech* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je kompaktná množina a* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* S*. Potom je funkcia* f *na množine* S *ohraničená – čiže existuje* $M \geq 0$ *také, že pre všetky* $z \in S$ *je* $|f(z)| \leq M$*. Funkcia* $|f(z)|$ *navyše na* S *nadobúda maximum a minimum, čiže existujú* $a_1, a_2 \in S$ *také, že pre všetky* $z \in S$ *platí* $|f(a_1)| \leq |f(z)| \leq |f(a_2)|$.

Dôkaz. Za účelom sporu predpokladajme, že funkcia f na množine S nie je ohraničená. Potom existuje postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ bodov S taká, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|f(z_n)| \geq n$. Z ohraničenosti množiny S vyplýva, že je ohraničená aj postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, a teda z nej podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety možno vybrať podpostupnosť $(z_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ konvergujúcu k nejakému $a \in \mathbb{C}$. Pretože postupnosť $(z_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ evidentne obsahuje nekonečne veľa rôznych prvkov, musí byť a hromadným bodom množiny S. Z uzavretosti množiny S potom dostávame $a \in S$. Zo spojitosti f na S ďalej $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$; na druhej strane ale $\lim_{k\to\infty}|f(z_{n_k})| = \infty$, a teda nemôže platiť $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(a)$. Dostávame teda spor s vetou 2.2.13.

Z ohraničenosti funkcie f na S vyplýva, že existuje reálne číslo $H = \sup_{z\in S}|f(z)|$. Keby neexistovalo žiadne $a_2 \in S$ také, že $|f(a_2)| = H$, bola by na S funkcia $1/(H - |f(z)|)$ spojitá a súčasne neohraničená, lebo pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $z \in S$ také, že $|H - |f(z)|| < \varepsilon$. To je spor s prvou časťou vety. Existenciu minima možno dokázať analogicky. □

2.3 Derivácia a Cauchyho-Riemannove podmienky

Deriváciu funkcie komplexnej premennej f definujeme, podobne ako pre funkcie reálnej premennej, v ľubovoľnom bode a, ktorý je *súčasne* prvkom aj hromadným bodom definičného oboru funkcie f – samotná definícia derivácie pritom bude tiež prakticky rovnaká, ako v reálnej analýze. Poväčšine nás však bude zaujímať iba situácia, keď táto definícia naozaj zohľadňuje všetky možné spôsoby, ktorými sa k bodu a dá približovať – to znamená, keď je funkcia f definovaná na nejakej otvorenej množine obsahujúcej bod a. V komplexnej analýze sa preto derivácia a diferencovateľnosť často definujú

[3] Postupnosť komplexných čísel $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ je ohraničená, ak je ohraničená postupnosť reálnych čísel $(|a_n|)_{n=k}^{\infty}$.

len v uvedenom menej všeobecnom prípade – a čitateľ sa nedopustí veľkej chyby, ak si nasledujúcu definíciu v tomto duchu preformuluje.[4]

Definícia 2.3.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$ je hromadným bodom množiny S. Ak existuje vlastná limita

$$D = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

hovoríme, že je funkcia f *diferencovateľná* v bode a a číslo D nazývame *deriváciou* funkcie f v bode a. V takom prípade tiež píšeme

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(a) := D.$$

Poznámka 2.3.2. Uvažujme množinu $R = \{h \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid a + h \in S\}$ a funkciu $g\colon R \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $h \in R$ ako $g(h) = a + h$. Keďže je a hromadným bodom množiny S, je 0 evidentne hromadným bodom množiny R, pričom zrejme $\lim_{h\to 0} g(h) = a$. Zrejme navyše $S \supseteq g(R)$ a pre všetky $h \in R$ je $g(h) \neq a$. Z tvrdenia 2.2.10(*ii*) teda vyplýva, že derivácia funkcie f v bode a, ak existuje, je daná zvyčajným spôsobom ako

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.1}$$

Podobne by bolo možné ukázať, že z existencie limity (2.1) vyplýva existencia derivácie, ktorú tak podľa očakávania možno prostredníctvom limity (2.1) ekvivalentne definovať. V nasledujúcom budeme vždy používať tú z definícií, ktorá sa bude v danom momente javiť ako vhodnejšia.

Definícia 2.3.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *diferencovateľná* na množine T, ak T pozostáva iba z hromadných bodov množiny S a funkcia f je diferencovateľná v každom bode $a \in T$.

Označenie 2.3.4. Derivácie vyšších rádov definujeme a označujeme rovnako ako v reálnej analýze: napríklad

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}$$

označuje druhú deriváciu funkcie f a

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}$$

jej n-tú deriváciu.

Ak je množina S otvorená a $a \in S$, môže sa h v limite (2.1) približovať k nule z ľubovoľného smeru v komplexnej rovine; nech sa ale h približuje k nule akýmkoľvek spôsobom, podiel

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

musí vždy konvergovať k tej istej limite. Špeciálne sa teda musia rovnať limity pre h približujúce sa k nule po reálnej a po imaginárnej osi. Dôsledkom tohto jednoduchého pozorovania sú nasledujúce *nutné* podmienky diferencovateľnosti funkcie v danom bode, známe ako *Cauchyho-Riemannove podmienky*. Nesplnenie týchto podmienok znamená, že funkcia nemôže byť diferencovateľná.

[4] Všeobecnejšiu definíciu uvádzame najmä z toho dôvodu, aby sme neskôr mohli do vety o derivácii zloženej funkcie zahrnúť prípad zloženia komplexnej funkcie komplexnej premennej s komplexnou funkciou reálnej premennej definovanou na uzavretom intervale; s deriváciu takejto zloženej funkcie sa stretneme v súvislosti s krivkovými integrálmi.

Poznámka 2.3.5. Formulácia Cauchyho-Riemannových podmienok využíva pojem *parciálnej derivácie* funkcie dvoch reálnych premenných, s ktorým sa čitateľ doposiaľ nemusel stretnúť. Nech $S \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f\colon S \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia dvoch reálnych premenných x a y. *Parciálnu deriváciu funkcie f podľa x* získame tak, že premennú y zafixujeme – teda ju „vyhlásime za konštantu" – a funkciu f zderivujeme podľa premennej x. Pre $(a, b) \in S$ také, že a je hromadným bodom množiny $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in S\}$ teda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

(ak táto limita existuje a je vlastná). Podobne definujeme aj *parciálnu deriváciu $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkcie f podľa y.* Ak teda napríklad $f(x, y) = 2x^2y + y^2$, pre všetky $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 2y.$$

Veta 2.3.6 (Cauchyho-Riemannove podmienky)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a u, v sú funkcie dvoch reálnych premenných x a y také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ s $x + iy \in S$ je $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, čiže*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode $a \in S$, tak existujú obidve parciálne derivácie funkcií u a v v bode $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$, pričom

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).$$

Dôkaz. Z diferencovateľnosti funkcie f v bode a podľa definície 2.3.1 dostávame

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \left(\frac{u(\operatorname{Re} a + h, \operatorname{Im} a) - u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{h} + i \frac{v(\operatorname{Re} a + h, \operatorname{Im} a) - v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{h} \right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a),
\end{aligned}$$

kde existencia parciálnych derivácií vyplýva z tvrdenia 2.2.7. Podobne tiež

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a + ih) - f(a)}{ih} = \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \left(\frac{u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a + h) - u(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{ih} + i \frac{v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a + h) - v(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)}{ih} \right) = \\
&= -i \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).
\end{aligned}$$

Z toho

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) + \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a).$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí jednotlivých strán predchádzajúcej rovnosti teda zisťujeme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a),$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

Príklad 2.3.7. Uvažujme funkciu $f(z) = \operatorname{Re} z$ definovanú na $\mathbb{C}$. Funkcie u, v prislúchajúce k f podľa znenia predchádzajúcej vety sú dané ako $u(x, y) = x$ a $v(x, y) = 0$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Pre ľubovoľné $a \in \mathbb{C}$ preto dostávame

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = 0.$$

Nie je teda splnená podmienka

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a) = \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$$

a funkcia f nie je diferencovateľná v žiadnom bode $a \in \mathbb{C}$.

Príklad 2.3.8. Treba pamätať na to, že Cauchyho-Riemannove podmienky sú len *nutnými* a nie postačujúcimi podmienkami diferencovateľnosti. Vezmime napríklad $a = 0$ a funkciu $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danú ako

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \operatorname{Re} z = 0 \text{ alebo } \operatorname{Im} z = 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Ľahko vidieť, že – pri použití notácie zavedenej vyššie – je $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$ a Cauchyho-Riemannove podmienky sú teda splnené. Napríklad limita

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(e^{i\pi/4}h) - f(0)}{e^{i\pi/4}h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} -\frac{1}{e^{i\pi/4}h} = -\frac{1}{e^{i\pi/4}} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{1}{h}$$

ale nie je vlastná[5] a funkcia f teda nie je diferencovateľná v bode $a = 0$.

2.4 Holomorfné funkcie

Najdôležitejšiu triedu diferencovateľných funkcií komplexnej premennej tvoria takzvané *holomorfné funkcie* (z gr. *holos* = úplný a *morfé* = tvar), ktoré teraz definujeme.

Definícia 2.4.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Funkcia f je *holomorfná* v bode a, ak existuje $r > 0$ také, že funkcia f je diferencovateľná na množine $D(a, r)$.

Definícia 2.4.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *holomorfná* na množine T, ak je holomorfná v každom bode $a \in T$.

Holomorfnosť funkcie f v bode je teda silnejšou podmienkou, než diferencovateľnosť v bode – vyžaduje sa totiž aj diferencovateľnosť vo všetkých ostatných bodoch nejakého dostatočne malého okolia. Na druhej strane možno bez problémov vidieť, že *holomorfnosť funkcie f na otvorenej množine T je ekvivalentná s jej diferencovateľnosťou na T.*

Poznámka 2.4.3. Práve zavedená terminológia – ktorú sme v princípe prebrali z [8] – nie je úplne štandardná. Holomorfnosť funkcie v bode mnohí autori ani nedefinujú, prípadne pod ňou môžu chápať diferencovateľnosť v bode. Najpodstatnejšia je však definícia holomorfnosti na *otvorenej* množine; táto štandardná je a zhoduje sa s tou našou. Niektorí autori – napríklad L. V. Ahlfors [1] – tiež namiesto o *holomorfných* funkciách hovoria o funkciách *analytických*. My pojem analytickej funkcie v nasledujúcej kapitole definujeme odlišným spôsobom, ktorý o niečo lepšie odzrkadľuje historické súvislosti. Neskôr ale ukážeme, že analytickosť funkcie je s jej holomorfnosťou ekvivalentná – používanie nejednotnej terminológie teda v tomto prípade nepredstavuje žiaden problém.

[5] Jej existencia závisí na tom, či ju chápeme ako limitu funkcie komplexnej premennej s definičným oborom zúženým na podmnožinu $\mathbb{R}$, alebo ako limitu funkcie reálnej premennej. V prvom prípade je rovná ∞, v druhom neexistuje.

Príklad 2.4.4. Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako $f(z) = |z|^2$. Funkcia f *je v bode* 0 *diferencovateľná*, lebo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{|h|e^{i\theta(h)}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{e^{i\theta(h)}} = 0,$$

kde $\theta(h) \in [\![\arg h]\!]$ je *ľubovoľný* z argumentov komplexného čísla h. Pre $z \neq 0$ ale máme – používajúc notáciu z vety 2.3.6 – $u(x,y) = x^2 + y^2$ a $v(x,y) = 0$, z čoho

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 2\operatorname{Re} z, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 2\operatorname{Im} z, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = 0.$$

Pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z \neq 0$ teda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z),$$

kým pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Im} z \neq 0$ zisťujeme, že

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \neq -\frac{\partial v}{\partial x}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

Funkcia f teda nie je diferencovateľná v žiadnom $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; *nie je teda ani holomorfná v bode* 0.

2.5 Niektoré vlastnosti holomorfných a diferencovateľných funkcií

Podobne ako v reálnej analýze je každá diferencovateľná – a tým pádom aj každá holomorfná – funkcia nutne spojitá.

Veta 2.5.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$ je hromadným bodom množiny S. Ak je funkcia f diferencovateľná v bode a, je v bode a aj spojitá.*

Dôkaz. Pre všetky $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ také, že $a + h \in S$ položme

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) =: \varepsilon(h);$$

potom

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Preto

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \big(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\big) = f(a)$$

a funkcia f je v bode a spojitá. □

Dôsledok 2.5.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Ak je funkcia f holomorfná na T, je aj spojitá na T.*

Dôkazy nasledujúcich dvoch viet, umožňujúcich zo známych diferencovateľných resp. holomorfných funkcií vytvárať ďalšie, sú v zásade identické ako v reálnej analýze a prenechávame ich preto čitateľovi ako jednoduché cvičenie na manipuláciu s limitami.

Veta 2.5.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, nech $a \in S$ je hromadný bod množiny S, nech $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú funkcie diferencovateľné v bode a a nech $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom je v bode a diferencovateľná aj:*

a) Funkcia λf, pričom $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

b) Funkcia $f + g$, pričom $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

c) Funkcia fg, pričom $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Ak navyše $f(a) \neq 0$, je v bode a diferencovateľná aj:

d) Funkcia $1/f$, pričom $(1/f)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Veta 2.5.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, nech $R \subseteq S$, nech $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú funkcie holomorfné na R a nech $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom je na R holomorfná aj:*

a) Funkcia λf, pričom $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$ pre všetky $z \in R$.

b) Funkcia $f + g$, pričom $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ pre všetky $z \in R$.

c) Funkcia fg, pričom $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ pre všetky $z \in R$.

Ak navyše $f(z) \neq 0$ pre všetky $z \in R$, je na R holomorfná aj:

d) Funkcia $1/f$, pričom $(1/f)'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$ pre všetky $z \in R$.

Je jednoduchým cvičením na limity dokázať, že funkcie $f(z) = 1$ a $g(z) = z$ sú holomorfné na $\mathbb{C}$, pričom $f'(z) = 0$ a $g'(z) = 1$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Z uvedenej vety teda vyplýva, že sú na $\mathbb{C}$ holomorfné aj všetky polynomické funkcie; rovnako všetky racionálne funkcie $p(z)/q(z)$, kde p a q sú polynomické funkcie, sú holomorfné na každej otvorenej množine neobsahujúcej (komplexný) koreň funkcie q. Derivácie všetkých týchto funkcií sa počítajú rovnako ako v reálnej analýze.

Dokážeme teraz dva varianty vety o derivácii zloženej funkcie. Prvý z nich hovorí o diferencovateľnosti a je dostatočne všeobecný na to, aby zahŕňal aj prípad zloženia funkcie komplexnej premennej s komplexnou funkciou reálnej premennej definovanou na uzavretom intervale (to sa nám neskôr zíde v súvislosti s integrovaním). Druhý variant hovorí o holomorfnosti a práve túto formuláciu vety budeme využívať najčastejšie.

Veta 2.5.5 (O derivácii zloženej funkcie I)**.** *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú množiny, $g\colon S \to \mathbb{C}$, $f\colon T \to \mathbb{C}$ sú funkcie a nech $T \supseteq g(S)$. Ak g je diferencovateľná na množine S a f je diferencovateľná na množine T, je na množine S diferencovateľná aj funkcia $f \circ g$, pričom pre všetky $a \in S$ je*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $a \in S$. Nech $b = g(a) \in T$. Z predpokladov vety vyplýva, že funkcia g je diferencovateľná v bode a a funkcia f je diferencovateľná v bode b – pričom, samozrejme, a musí byť hromadným bodom množiny S a b musí byť hromadným bodom množiny T. Pre všetky $h \in \mathbb{C}$ také, že $a + h \in S$ a všetky $\ell \in \mathbb{C}$ také, že $b + \ell \in T$ položme

$$\varepsilon(h) := \begin{cases} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} - g'(a) & \text{ak } h \neq 0, \\ 0 & \text{ak } h = 0, \end{cases}$$
$$\eta(\ell) := \begin{cases} \frac{f(b+\ell)-f(b)}{\ell} - f'(b) & \text{ak } \ell \neq 0, \\ 0 & \text{ak } \ell = 0. \end{cases}$$

Úpravou pre všetky prípustné h, ℓ dostávame

$$g(a + h) - g(a) = (g'(a) + \varepsilon(h))h, \tag{2.2}$$
$$f(b + \ell) - f(b) = (f'(b) + \eta(\ell))\ell. \tag{2.3}$$

Vezmime teraz $\ell = g(a + h) - b$. Z (2.3) potom

$$f(g(a + h)) - f(b) = \big(f'(b) + \eta(g(a + h) - b)\big)\,(g(a + h) - b);$$

to je ekvivalentné rovnosti

$$f(g(a + h)) - f(g(a)) = \big(f'(g(a)) + \eta(g(a + h) - g(a))\big)\,(g(a + h) - g(a)),$$

z ktorej použitím vzťahu (2.2) dostávame

$$f(g(a + h)) - f(g(a)) = \big(f'(g(a)) + \eta(g(a + h) - g(a))\big)\,(g'(a) + \varepsilon(h))h. \tag{2.4}$$

Podľa vety 2.5.1 a tvrdenia 2.2.6 je

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) - g(a) = 0;$$

keďže je súčasne zrejmé, že

$$\lim_{\ell\to 0} \eta(\ell) = 0 = \eta(0),$$

je funkcia η spojitá v bode 0 a z tvrdenia 2.2.10(i) vyplýva

$$\lim_{h\to 0} \eta(g(a+h) - g(a)) = 0. \tag{2.5}$$

Evidentne tiež

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{2.6}$$

S použitím rovnosti (2.4) a limít (2.5) a (2.6) potom dostávame

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \big(f'(g(a)) + \eta(g(a+h) - g(a))\big)\left(g'(a) + \varepsilon(h)\right) = f'(g(a))g'(a),$$

čo bolo treba dokázať. □

Veta 2.5.6 (O derivácii zloženej funkcie II)**.** *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú otvorené množiny, $g\colon S \to \mathbb{C}$, $f\colon T \to \mathbb{C}$ sú funkcie a $T \supseteq g(S)$. Ak g je holomorfná na množine S a f je holomorfná na množine T, je na množine S holomorfná aj funkcia $f \circ g$, pričom pre všetky $a \in S$ je*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Dôkaz. V prípade, že funkcie g a f spĺňajú podmienky vety, je funkcia $f \circ g$ podľa vety 2.5.5 diferencovateľná v každom bode $a \in S$. Keďže je množina S otvorená, je funkcia $f \circ g$ na S aj holomorfná. Vzorec pre deriváciu je daný vetou 2.5.5. □

Vetu o derivácii inverznej funkcie teraz sformulujeme iba v reči diferencovateľnosti. Pre holomorfné funkcie je existencia holomorfnej inverznej funkcie zaručená aj za slabších predpokladov – stačí injektívnosť uvažovanej holomorfnej funkcie, pričom tá je navyše lokálne dôsledkom nenulovosti derivácie. Dôkaz tohto tvrdenia, známeho ako *veta o inverznej funkcii*, však vyžaduje určité pokročilejšie znalosti; dostaneme sa teda k nemu až neskôr. Zatiaľ teda iba vyslovme pomerne elementárnu *vetu o derivácii inverznej funkcie*, v ktorej navyše musíme predpokladať spojitosť inverznej funkcie; zato však namiesto holomorfnosti funkcie f stačí predpokladať jej diferencovateľnosť.

Veta 2.5.7 (O derivácii inverznej funkcie)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je* injektívna *funkcia, $T = f(S)$ a inverzná funkcia $f^{-1}\colon T \to \mathbb{C}$ k funkcii f je* spojitá*. Nech $a \in S$ je hromadný bod množiny S. Ak je funkcia f diferencovateľná v bode a, pričom $f'(a) \neq 0$, je $b = f(a)$ hromadným bodom množiny T, funkcia f^{-1} je diferencovateľná v bode b a*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dôkaz. Funkcia f, diferencovateľná v bode a, tam podľa vety 2.5.1 musí byť aj spojitá. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tak špeciálne existuje $\delta_n > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a, \delta_n) \cap S$ je $f(z) \in D(b, 1/n)$. Keďže je navyše a hromadným bodom množiny S, môžeme pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zvoliť nejaké $z_n \in D'(a, \delta_n) \cap S$; vďaka injektívnosti funkcie f potom $f(z_n) \in D'(b, 1/n) \cap T$. Pre všetky $\varepsilon > 0$ tak môžeme zvoliť $n \in \mathbb{N}$ také, že $1/n < \varepsilon$; potom $f(z_n) \in D'(b, \varepsilon) \cap T$. Bod b je teda skutočne hromadným bodom množiny T.

Nech $\varphi(z)$ je funkcia daná pre všetky $z \in S \setminus \{a\}$ ako

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{f(z)-f(a)}.$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode a s $f'(a) \neq 0$, je

$$\lim_{z\to a} \varphi(z) = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{f(z)-f(a)} = \frac{1}{\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Funkcia $f^{-1}(w)$ je navyše spojitá v hromadnom bode b množiny T – podľa tvrdenia 2.2.6 teda

$$\lim_{w\to b} f^{-1}(w) = f^{-1}(b) = a,$$

pričom z injektívnosti funkcií f a f^{-1} vyplýva, že pre všetky $w \in T\setminus\{b\}$ je $f^{-1}(w) \neq a$. Z tvrdenia 2.2.10 preto

$$\lim_{w\to b} \varphi(f^{-1}(w)) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{2.7}$$

Keďže pre všetky $w \in T \setminus \{b\}$ je

$$\varphi(f^{-1}(w)) = \frac{f^{-1}(w)-a}{f(f^{-1}(w))-f(a)} = \frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(b)}{w-b},$$

môžeme (2.7) prepísať ako

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{w\to b} \frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(b)}{w-b} = \frac{1}{f'(a)},$$

čím je tvrdenie dokázané. □

Na záver tejto kapitoly ešte dokážme užitočné kritérium konštantnosti funkcie f na oblasti.

Tvrdenie 2.5.8. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Ak $f'(z) = 0$ pre všetky $z \in S$, tak je funkcia f na S konštantná.*

Dôkaz. Dokážeme, že za uvedených predpokladov je $f(a) = f(b)$ pre všetky $a, b \in S$. Sporom, nech $a, b \in S$ sú také, že $f(a) \neq f(b)$. Keďže je S oblasť, existuje lomená čiara v S spájajúca bod a s bodom b. Musia preto existovať aj dva po sebe idúce vrcholy $c \neq d$ tejto lomenej čiary, pre ktoré $f(c) \neq f(d)$. Uvažujme teraz úsečku z bodu c do bodu d,

$$[c, d] = \{c + t(d-c) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq S.$$

Táto situácia je znázornená na obrázku 2.1.

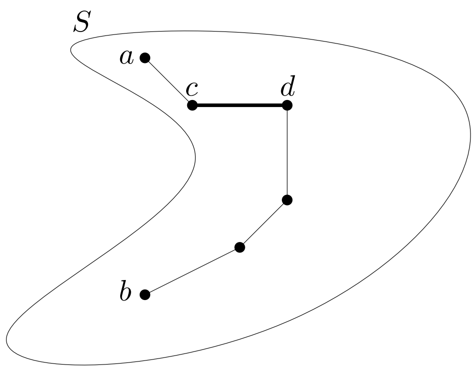
Dokážeme, že pre všetky $t \in [0, 1]$ je

$$\left|\frac{f(c+t(d-c))-f(c)}{d-c}\right| \leq \frac{t}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|. \tag{2.8}$$

Nerovnosť (2.8) tak bude musieť platiť aj pre $t = 1$; to bude spor, pretože v takom prípade

$$\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|,$$

kde číslo v absolútnej hodnote je nenulové.



Obr. 2.1: Lomená čiara z a do b v S, na ktorej vyberieme úsečku z c do d takú, že $f(c) \neq f(d)$.

Nerovnosť (2.8) ale očividne platí pre $t = 0$; môžeme teda zmysluplne definovať $t_0 \in [0,1]$ ako

$$t_0 = \sup \left\{ t \in [0,1] \;\middle|\; \forall t' \in [0,t] : \left| \frac{f(c + t'(d-c)) - f(c)}{d-c} \right| \leq \frac{t'}{2} \left| \frac{f(d) - f(c)}{d-c} \right| \right\}. \tag{2.9}$$

Keďže $f'(c + t_0(d-c)) = 0$, pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre ľubovoľné $h \in \mathbb{C}$ s $0 < |h| < \delta$ je

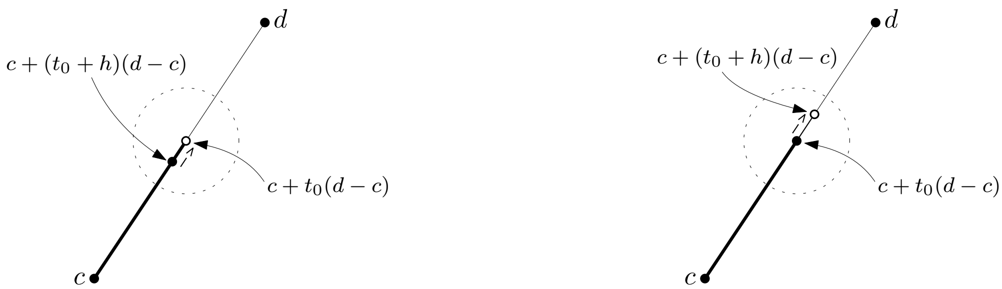
$$\left| \frac{f(c + t_0(d-c) + h) - f(c + t_0(d-c))}{h} \right| < \varepsilon.$$

Špeciálne teda existuje aj (vo všeobecnosti iné) $\delta > 0$ také, že pre všetky $h \in \mathbb{R}$ s $0 < |h| < \delta$ je

$$\left| \frac{f(c + (t_0 + h)(d-c)) - f(c + t_0(d-c))}{h(d-c)} \right| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Zvoľme

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \left| \frac{f(d) - f(c)}{d-c} \right|.$$



(a) Z platnosti (2.8) na $[0, t_0)$ usúdime na platnosť pre t_0. **(b)** Následne usúdime na platnosť (2.8) na $[0, t_0 + \delta']$.

Obr. 2.2: Schéma kľúčovej časti dôkazu tvrdenia 2.5.8.

Dokážeme najprv, že nerovnosť (2.8) platí pre samotné $t = t_0$. Ak $t_0 = 0$, nie je čo dokazovať. Ak $t_0 > 0$, môžeme predpokladať $\delta < t_0$ a v (2.10) zvoliť h tak, aby $-\delta < h < 0$. Z definície t_0 potom vyplýva, že (2.8) platí pre $t = t_0 + h$ a dostávame

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(c+t_0(d-c))-f(c)}{d-c}\right| = \\
&\quad = \left|\frac{f(c+t_0(d-c))-f(c+(t_0+h)(d-c))+f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c)}{d-c}\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\frac{f(c+t_0(d-c))-f(c+(t_0+h)(d-c))}{d-c}\right| + \left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c)}{d-c}\right| < \\
&\quad < -\frac{h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| + \frac{t_0+h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| = \\
&\quad = \frac{t_0}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|.
\end{aligned}$$

Ak teraz $t_0 = 1$, tvrdenie je dokázané. V opačnom prípade môžeme predpokladať $\delta < 1 - t_0$, zvoliť kladné $\delta' < \delta$ a uvažovať ľubovoľné h spĺňajúce $0 < h \leq \delta' < \delta$. Z práve dokázanej platnosti (2.8) pre $t = t_0$ dostávame

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c)}{d-c}\right| = \\
&\quad = \left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c+t_0(d-c))+f(c+t_0(d-c))-f(c)}{d-c}\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\frac{f(c+(t_0+h)(d-c))-f(c+t_0(d-c))}{d-c}\right| + \left|\frac{f(c+t_0(d-c))-f(c)}{d-c}\right| < \\
&\quad < \frac{h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| + \frac{t_0}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| = \\
&\quad = \frac{t_0+h}{2}\left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|.
\end{aligned}$$

Nerovnosť (2.8) teda platí pre všetky $t \in [0, t_0+\delta']$, čo je spor s definíciou čísla t_0 prostredníctvom (2.9). Týmto je tvrdenie dokázané. □

Cvičenia

1. Dokážte tvrdenie 2.2.6.
2. Dokážte tvrdenie 2.2.9.
3. Dokážte vety 2.2.11 a 2.2.12.
4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia. Nech a je hromadným bodom množiny S, alebo nech je S neohraničená a $a = \infty$. Dokážte, že $\lim_{z\to a} f(z) = 0$ práve vtedy, keď $\lim_{z\to a}|f(z)| = 0$.
5. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia. Dokážte, že funkcia f je spojitá práve vtedy, keď pre všetky otvorené množiny $X \subseteq \mathbb{C}$ je jej vzor $f^{-1}(X) = \{z \in S \mid f(z) \in X\}$ pri zobrazení f tiež otvorená množina.
6. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $T \subseteq S$. Funkcia $f\colon S \to \mathbb{C}$ je *rovnomerne spojitá* na T, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, z_2 \in T$ spĺňajúce $|z_1 - z_2| < \delta$ je $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.
   a) Nájdite príklad funkcie, ktorá je na nejakej podmnožine $\mathbb{C}$ spojitá, ale nie je tam rovnomerne spojitá.
   b) Dokážte, že ak $T \subseteq S$ je *kompaktná* množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá na T, je funkcia f na T aj rovnomerne spojitá.

7. Nájdite všetky body $a \in \mathbb{C}$, v ktorých je diferencovateľná funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daná ako:

   a) $f(z) = |z|$;

   b) $f(z) = \operatorname{Im} z$;

   c) $f(z) = \overline{z}$;

   d) $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } |\operatorname{Re} z| < 1 \text{ a zároveň } |\operatorname{Im} z| < 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$.

8. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Dokážte, že každá funkcia $f\colon S \to \mathbb{R}$ holomorfná na S je na oblasti S nutne konštantná.

9. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na S taká, že funkcia $\operatorname{Re} f$ je na S konštantná. Dokážte, že v takom prípade musí byť na S konštantná aj samotná funkcia f.

10. Zistite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ktorá je:

    a) Diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď $\operatorname{Im} a = 0$.

    b) Holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď $\operatorname{Im} a = 0$.

    V prípade kladnej odpovede príslušnú funkciu nájdite a dokážte, že skutočne má danú vlastnosť. V prípade zápornej odpovede svoje tvrdenie dokážte.

11. Zistite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ktorá:

    a) Nie je spojitá v žiadnom bode $a \in \mathbb{C}$.

    b) Nie je spojitá v žiadnom bode $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale v bode $a = 0$ je dokonca diferencovateľná.

    V prípade kladnej odpovede príslušnú funkciu nájdite a dokážte, že skutočne má danú vlastnosť. V prípade zápornej odpovede svoje tvrdenie dokážte.

12. Dokážte, že predpoklad spojitosti je vo vete 2.5.7 skutočne podstatný. To znamená: nájdite príklad množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ a injektívnej funkcie $f\colon S \to \mathbb{C}$, diferencovateľnej v nejakom hromadnom bode $a \in S$ množiny S, takej, že inverzná funkcia f^{-1} nie je v bode $b = f(a)$ ani len spojitá.

Kapitola 3

Analytické funkcie

V nasledujúcom definujeme triedu *analytických funkcií* – čiže funkcií lokálne reprezentovateľných mocninovými radmi – a preskúmame niektoré jej základné vlastnosti. Neskôr uvidíme, že analytickosť funkcie je v skutočnosti ekvivalentná jej holomorfnosti; nech pritom zvolíme akékoľvek pomenovanie, ide o bezpochyby najvýznamnejšiu triedu funkcií skúmanú v komplexnej analýze. V tejto kapitole dokážeme jeden smer tejto ekvivalencie: každá analytická funkcia je holomorfná. Navyše ukážeme, že holomorfné sú aj derivácie analytických funkcií; každá analytická funkcia tak má derivácie všetkých rádov. Čitateľa odkazujeme aj na [8].

Cestu k analytickým funkciám začneme skúmaním radov komplexných čísel – uvidíme, že mnohé ich kľúčové vlastnosti sú rovnaké ako pri radoch reálnych čísel. Následne preskúmame základné vlastnosti mocninových radov, definujeme analytické funkcie a dokážeme vetu o derivovaní mocninových radov ukazujúcu, že každá analytická funkcia je holomorfná. Definujeme tiež exponenciálnu funkciu a goniometrické funkcie a opodstatníme tak zápis $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, ktorý sme doposiaľ používali čisto formálne. V krátkosti sa tiež dotkneme logaritmických a mocninových funkcií komplexnej premennej, ktoré sú vo všeobecnosti viachodnotové; náš prístup k takýmto funkciám bude zatiaľ pomerne naivný a neskôr sa k tejto problematike ešte vrátime.

3.1 Nekonečné rady komplexných čísel

Aby sme sa mohli zaoberať mocninovými radmi, musíme najprv do komplexného oboru preniesť niektoré poznatky o nekonečných radoch čísel. Podobne ako pri limitách a spojitosti pôjde o priamočiare zovšeobecnenie výsledkov známych z reálnej analýzy.

Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Potom hovoríme, že *nekonečný rad komplexných čísel* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje k súčtu* $s \in \mathbb{C}$, ak je s limitou postupnosti čiastočných súčtov tohto radu, teda ak pre postupnosť $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ danú pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

V takom prípade tiež hovoríme, že s je *súčtom* radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Ak pre nejaký rad neexistuje žiaden súčet $s \in \mathbb{C}$, hovoríme, že tento rad *diverguje*.

Keďže sú uvedené definície navlas rovnaké ako pre rady reálnych čísel, dostávame nasledujúce tvrdenie umožňujúce previesť skúmanie radov komplexných čísel na skúmanie radov reálnych čísel.

Tvrdenie 3.1.1. *Rad komplexných čísel* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď konvergujú obidva rady reálnych čísel* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$. *V takom prípade je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Dôkaz. Ide o bezprostredný dôsledok tvrdenia 2.2.7. □

Nasledujúce tri tvrdenia sú priamymi dôsledkami analogických tvrdení pre rady reálnych čísel a tvrdenia 3.1.1.

Tvrdenie 3.1.2. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je konvergentný rad komplexných čísel. Potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a postupnosť* $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ *je zhora ohraničená.*

Tvrdenie 3.1.3. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je rad komplexných čísel a* $k \in \mathbb{N}$. *Potom rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď konverguje rad* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}$ *a v takom prípade je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Tvrdenie 3.1.4. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sú konvergentné rady komplexných čísel a* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Potom:*

a) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ *je konvergentný a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

b) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ *je konvergentný a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Podobne ako pre rady reálnych čísel hovoríme, že rad komplexných čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne*, ak konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Tvrdenie 3.1.5. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne. Potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Dôkaz. Keďže pre všetky $a \in \mathbb{C}$ je $|\operatorname{Re} a| \le |a|$ a $|\operatorname{Im} a| \le |a|$, z porovnávacieho kritéria pre rady *reálnych* čísel vyplýva, že rady $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergujú absolútne. Stačí už teda využiť známu skutočnosť, že z absolútnej konvergencie radu reálnych čísel vyplýva jeho konvergencia a odvolať sa na tvrdenie 3.1.1. □

Kritériá konvergencie nekonečných radov

Veta 3.1.6 (Porovnávacie kritérium konvergencie). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *je konvergentný rad nezáporných reálnych čísel a pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *je* a_n *komplexné číslo také, že* $|a_n| \le b_n$. *Potom rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne (a teda konverguje).*

Dôkaz. Triviálny dôsledok porovnávacieho kritéria pre rady reálnych čísel. □

Veta 3.1.7 (D'Alembertovo kritérium konvergencie[1]). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je rad komplexných čísel taký, že existuje limita*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Ak $\ell < 1$, *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne. Ak* $\ell > 1$, *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Dôkaz. Z d'Alembertovho kritéria konvergencie pre rady nezáporných reálnych čísel v prípade $\ell < 1$ priamo vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ – a teda aj absolútna konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ak naopak $\ell > 1$, pre všetky dostatočne veľké n nutne $|a_{n+1}| > |a_n|$; nemôže teda platiť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a rad diverguje podľa tvrdenia 3.1.2. □

Veta 3.1.8 (Cauchyho odmocninové kritérium). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je rad komplexných čísel a nech* $\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Ak* $\ell < 1$, *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne. Ak* $\ell > 1$, *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Dôkaz. Ak $\ell < 1$, pre všetky dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, a teda aj $|a_n| < q^n$ pre nejaké $q \in (0,1)$. Keďže rad $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje, stačí sa odvolať na porovnávacie kritérium a tvrdenie 3.1.3. Ak naopak $\ell > 1$, zrejme nemôže byť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a rad diverguje podľa tvrdenia 3.1.2. □

Nasledujúce Dirichletovo kritérium konvergencie je pomerne „špecializované“ a neskôr ho využijeme v príklade 3.2.4 demonštrujúcom možné správanie mocninových radov na kružnici konvergencie. Čitateľ toto kritérium pravdepodobne ocení lepšie, ak sa najprv oboznámi so spomínaným príkladom.

Veta 3.1.9 (Dirichletovo kritérium konvergencie). *Nech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *je postupnosť nezáporných reálnych čísel,* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *je postupnosť komplexných čísel a sú splnené nasledujúce podmienky:*

(*i*) *Pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n \geq a_{n+1}$.

(*ii*) *Platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*iii*) *Existuje konštanta* $M \geq 0$ *taká, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\left|\sum_{j=0}^{n} b_j\right| \leq M$.

Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Dôkaz. Označme n-tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ symbolom S_n:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Podobne označme

$$T_n := \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

Potom

$$S_n = T_n a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} T_k (a_k - a_{k+1}). \tag{3.1}$$

Rad $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(a_k - a_{k+1})$ konverguje absolútne podľa porovnávacieho kritéria: pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je totiž $|T_k(a_k - a_{k+1})| = |T_k|(a_k - a_{k+1}) \leq M(a_k - a_{k+1})$ a rad $\sum_{k=0}^{\infty} M(a_k - a_{k+1})$ konverguje, keďže

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(a_k - a_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} M(a_j - a_{j+1}) = M \lim_{k\to\infty} (a_0 - a_{k+1}) = M a_0.$$

Z predpokladov (*ii*) a (*iii*) vyplýva $\lim_{n\to\infty} T_n a_{n+1} = 0$ a zo vzťahu (3.1) tak dostávame

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n a_{n+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T_k(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T_k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(a_k - a_{k+1}),$$

v dôsledku čoho konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. □

[1]Presnejšie ide o relatívne slabú verziu tohto kritéria.

3.2 Mocninové rady

Pod *mocninovým radom* s komplexnými koeficientmi a stredom v bode $a \in \mathbb{C}$ rozumieme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde z je komplexná premenná a $c_n \in \mathbb{C}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.2.1. Typickým príkladom mocninového radu je geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Z tvrdenia 3.1.2 je jasné, že tento rad diverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| \geq 1$. Ak ale $|z| < 1$, je

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}.$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ teda konverguje pre práve všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| < 1$.

Kľúčovým pojmom súvisiacim s mocninovými radmi je *polomer konvergencie* radu. Hoci sa jeho nasledujúca definícia môže na prvý pohľad zdať zvláštna, veta 3.2.3 nás hneď vzápätí ubezpečí, že je v súlade s intuitívnou predstavou o tomto koncepte.

Definícia 3.2.2. *Polomerom konvergencie* mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ s $a \in \mathbb{C}$ a $c_n \in \mathbb{C}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ nazveme hodnotu $\varrho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ danú ako

$$\varrho := \sup \left\{ |z-a| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \text{ a číselný rad } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| \text{ konverguje} \right\}.$$

Z pozorovaní učinených v príklade 3.2.1 teda okrem iného vyplýva, že polomerom konvergencie geometrického radu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je $\varrho = 1$. Tento rad navyše konverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| < \varrho$ a diverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že $|z| > \varrho$. Nasledujúca veta ukazuje, že rovnaká vlastnosť platí aj vo všeobecnosti. Ako ale neskôr uvidíme v rámci príkladu 3.2.4, pre z na *kružnici konvergencie* $|z-a| = \varrho$ sa situácia môže rad od radu líšiť.

Veta 3.2.3 (O polomere konvergencie)**.** *Nech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninový rad s komplexnými koeficientmi a s polomerom konvergencie ϱ. Potom:*

(*i*) *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z-a| < \varrho$ číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje absolútne.*

(*ii*) *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z-a| > \varrho$ číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ diverguje.*

Polomer konvergencie ϱ je navyše daný vzťahom

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

kde pre účely tejto vety je $1/0 = \infty$ a $1/\infty = 0$.

Dôkaz. Na *dôkaz tvrdenia* (*i*) vezmime ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ také, že $|z-a| < \varrho$. Podľa definície 3.2.2 existuje aspoň jedno $w \in \mathbb{C}$, pre ktoré je $|z-a| < |w-a| \leq \varrho$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(w-a)^n|$ konverguje. Keďže pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|c_n(z-a)^n| \leq |c_n(w-a)^n|$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje absolútne vďaka porovnávaciemu kritériu.

Dokážeme teraz tvrdenie (ii). Sporom. Nech $|z-a| > \varrho$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje. Vďaka tvrdeniu 3.1.2 potom existuje konštanta $M \geq 0$ taká, že $|c_n(z-a)^n| \leq M$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Zvoľme si ľubovoľné $w \in \mathbb{C}$ také, že $|z-a| > |w-a| > \varrho$. Potom

$$\frac{1}{M}|c_n(w-a)^n| = \frac{1}{M}|c_n(z-a)^n| \left|\frac{w-a}{z-a}\right|^n \leq \left|\frac{w-a}{z-a}\right|^n.$$

Iste $|(w-a)/(z-a)| < 1$; podľa pozorovania z príkladu 3.2.1 teda rad $\sum_{n=0}^{\infty}|(w-a)/(z-a)|^n$ konverguje a z porovnávacieho kritéria vyplýva, že konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M}|c_n(w-a)^n|$. Vďaka tomu podľa tvrdenia 3.1.4 konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(w-a)^n|$. Keďže ale $|w-a| > \varrho$, číslo ϱ nemôže byť polomerom konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Dokážme napokon vzťah

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{3.2}$$

Z Cauchyho odmocninového kritéria vyplýva, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje kedykoľvek

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 \tag{3.3}$$

a diverguje kedykoľvek

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1. \tag{3.4}$$

Nerovnosť (3.3) je splnená vždy, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ také, že pre dostatočne veľké n je

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-a| < 1-\varepsilon,$$

čo možno – ak pre účely tohto dôkazu prijmeme konvenciu $(1-\varepsilon)/0 = \infty$ – ekvivalentne vyjadriť ako

$$|z-a| < \frac{1-\varepsilon}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Rad teda konverguje vždy, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ a $\delta > 0$ tak, že

$$|z-a| < \frac{1-\varepsilon}{\delta + \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

čo je pravda kedykoľvek, keď

$$|z-a| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Nerovnosť (3.4) je splnená kedykoľvek, keď existuje $\varepsilon \in (0,1)$ také, že pre nekonečne veľa n je

$$|z-a| > \frac{1+\varepsilon}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

a podobne ako vyššie zisťujeme, že rad diverguje kedykoľvek

$$|z-a| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Z dokázaných tvrdení (i) a (ii) teda vyplýva, že skutočne platí vzťah (3.2). □

Príklad 3.2.4. Veta o polomere konvergencie nehovorí nič o konvergencii alebo divergencii mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ na jeho *kružnici konvergencie* – čiže v bodoch z, pre ktoré je hodnota $|z-a|$ rovná polomeru konvergencie ϱ. Ukážeme teraz, že situácia tu môže byť pre rôzne mocninové rady veľmi rozdielna.

a) V príklade 3.2.1 sme dokázali, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ má polomer konvergencie $\varrho = 1$, pričom tento rad diverguje na celej kružnici $|z| = \varrho$.

b) Uvažujme mocninový rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$. Pre polomer konvergencie tohto radu platí

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(\ln n)/n}} = 1,$$

z čoho $\varrho = 1$. Pre $z = 1$ ide o harmonický rad, o ktorom je známe, že diverguje. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ spĺňajúce $|z| = 1$ môžeme na druhej strane pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ položiť $a_n := 1/n$ a $b_n := z^n$. Pre všetky kladné prirodzené n zjavne $a_n \geq a_{n+1}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; navyše

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right| \leq \frac{2}{|z-1|}.$$

Môžeme sa teda odvolať na Dirichletovo kritérium konvergencie,[2] podľa ktorého rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ pre uvedené z konverguje. Rad teda konverguje na celej kružnici $|z| = \varrho$ s výnimkou bodu $z = 1$.

c) Uvažujme mocninový rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. Polomer konvergencie je opäť daný vzťahom

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(2\ln n)/n}} = 1,$$

čiže $\varrho = 1$. Pre $z = 1$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; tam však pre $n \geq 2$ máme

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teda

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Postupnosť čiastočných súčtov $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je teda zhora ohraničená; keďže je aj neklesajúca, musí konvergovať k vlastnej limite, v dôsledku čoho konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Použitím porovnávacieho kritéria tak dostávame konvergenciu mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ na celej kružnici $|z| = \varrho$.

3.3 Analytické funkcie

Analytickou funkciou nazveme funkciu komplexnej premennej, ktorá je lokálne reprezentovateľná mocninovým radom (s nenulovým polomerom konvergencie).

Definícia 3.3.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, nech $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Funkcia f je *analytická* v bode a, ak existuje $r > 0$ také, že $D(a,r) \subseteq S$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sú nejaké komplexné čísla a rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje pre všetky $z \in D(a,r)$.[3]

[2] Zjavne je možné rad preindexovať tak, aby začínal nultým členom.

[3] Uvedený rad má teda polomer konvergencie $\varrho \geq r > 0$.

Definícia 3.3.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $T \subseteq S$. Funkcia f je *analytická* na množine T, ak je analytická v každom bode $a \in T$.

Príklad 3.3.3. Z príkladu 3.2.1 vyplýva, že funkcia $f(z) = 1/(1-z)$ je analytická v bode 0, pričom

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

pre všetky $z \in D(0,1)$. V skutočnosti je však táto funkcia analytická aj na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, hoci uvedený rad pre $z \notin D(0,1)$ diverguje. Pre ľubovoľné $a, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ totiž

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-(z-a)/(1-a)}$$

a pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ spĺňajúce

$$\left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1$$

– to znamená pre $z \in D(a, |1-a|)$ – je

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

Príklad 3.3.4. Podobne pre ľubovoľné čísla $c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je funkcia $f(z) = 1/(cz+d)$ analytická na $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. V bode $a = 0$ je pritom táto funkcia daná mocninovým radom

$$\frac{1}{cz+d} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1+(c/d)z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^n}{d^{n+1}} z^n$$

s polomerom konvergencie $\varrho = |d/c|$. Pre všeobecné $a \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ máme

$$\frac{1}{cz+d} = \frac{1}{c(z-a)+(ca+d)} = \frac{1}{ca+d} \cdot \frac{1}{1+(c/(ca+d))(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{(ca+d)^{n+1}} (z-a)^n,$$

kde polomer konvergencie mocninového radu je $\varrho = |(ca+d)/c|$.

3.4 Derivovanie mocninových radov

Dokážeme teraz, že mocninové rady možno derivovať člen po člene. To znamená, že každá funkcia f analytická v bode $a \in \mathbb{C}$ je v tomto bode aj holomorfná, pričom funkcia f' je v bode a opäť analytická a mocninový rad reprezentujúci f' v bode a získame zderivovaním jednotlivých členov mocninového radu pre f. Ukážeme navyše, že polomer konvergencie mocninového radu pre deriváciu je rovnaký ako pre mocninový rad reprezentujúci pôvodnú funkciu.

Keďže túto úvahu možno ľubovoľný počet ráz zopakovať, ľahko dôjdeme k záveru, že funkcia analytická v bode $a \in \mathbb{C}$ má v tomto bode derivácie všetkých rádov, ktoré sú taktiež analytické.

Lema 3.4.1. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *je mocninový rad s polomerom konvergencie* $\varrho > 0$. *Polomer konvergencie radu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \tag{3.5}$$

je potom tiež rovný ϱ.

Dôkaz. Rad (3.5) má vďaka tvrdeniu 3.1.4 rovnaký polomer konvergencie R ako rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^n = (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Z vety 3.2.3 potom pre tento polomer konvergencie R dostávame

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varrho^{-1},$$

kde predposledná rovnosť platí vďaka tomu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Presnejšie*: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

Keďže

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

a z $\varrho > 0$ vyplýva $\varrho^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, z definície limes superior dostávame, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_1$ je

$$\left|\sup_{m\geq n} \sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| < \varepsilon.$$

Pre všetky $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ teda

$$\begin{aligned}
\left|\sup_{m\geq n}\left(\sqrt[m]{m}\sqrt[m]{|c_m|}\right) - \varrho^{-1}\right| &= \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|} + \sqrt[m]{|c_m|}\right) - \varrho^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|}\right) + \sup_{m\geq n}\sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| \leq \\
&\leq \left|\sup_{m\geq n}\left(\left(\sqrt[m]{m}-1\right)\sqrt[m]{|c_m|}\right)\right| + \left|\sup_{m\geq n}\sqrt[m]{|c_m|} - \varrho^{-1}\right| < \\
&< \varepsilon \sup_{m\geq n}\left(\sqrt[m]{|c_m|}\right) + \varepsilon < \varepsilon(\varrho^{-1}+\varepsilon) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Keďže $\varrho^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je konštanta, z uvedeného naozaj vyplýva $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|} = \varrho^{-1}$. □

Veta 3.4.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Ak pre nejaké $r > 0$ a všetky $z \in D(a,r)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

(kde mocninový rad konverguje), je funkcia f holomorfná na $D(a,r)$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ je

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Dôkaz. Budeme uvažovať iba $a = 0$. Z tohto špeciálneho prípadu vyplynie aj ten všeobecný – stačí uvažovať funkciu $f(z+a)$ a jej deriváciu.

Z reprezentácie funkcie f mocninovým radom na $D(0,r)$ vyplýva, že má tento rad polomer konvergencie $\varrho \geq r$. Preto má podľa lemy 3.4.1 polomer konvergencie ϱ aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} =: g(z).$$

Zostáva dokázať, že $g(z)$ je na $D(0,r)$ deriváciou funkcie f. Zvoľme preto ľubovoľné $b \in D(0,r)$. Pre všetky $h > 0$ také, že $b + h \in D(0,r)$ potom

$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} - g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} \right).$$

Stačí dokázať, že pravá strana tejto rovnosti speje pre $h \to 0$ k nule. Vďaka binomickej vete

$$(b+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k b^{n-k},$$

z čoho

$$\begin{aligned}
\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k b^{n-k}}{h} - \binom{n}{1} b^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} b^{n-k} = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^{j+1} b^{n-j-2} = h \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^j b^{n-j-2}.
\end{aligned}$$

Ak ďalej číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ konverguje absolútne, s použitím trojuholníkovej nerovnosti a limitného prechodu ľahko dokážeme[4] $|\sum_{n=0}^{\infty} d_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$. Za predpokladu konvergencie radu z (3.6) nižšie preto

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{(b+h)^n - b^n}{h} - nb^{n-1} \right) \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(h \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j+2} h^j b^{n-j-2} \right) \right| = \\
&= |h| \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{(j+2)!(n-j-2)!} h^j b^{n-j-2} \right| \leq \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{(j+2)!(n-j-2)!} |h|^j |b|^{n-j-2} \leq \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!(n-2-j)!} |h|^j |b|^{n-2-j} = \\
&= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |h|^j |b|^{n-2-j} = \\
&= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \left(|h| + |b| \right)^{n-2}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Dvojnásobným použitím lemy 3.4.1 zisťujeme, že rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2}$$

má tiež polomer konvergencie ϱ. Z definície polomeru konvergencie teda vyplýva, že pre h spĺňajúce $|b| + |h| < \varrho$ číselný rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) \left(|h| + |b| \right)^{n-2}$$

konverguje k nejakej reálnej konštante. Výraz (3.6) teda skutočne pre $h \to 0$ speje k nule. □

[4] Ide o cvičenie 1 na konci tejto kapitoly.

Dôsledok 3.4.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$. Ak je funkcia f analytická v bode a, je funkcia f v bode a holomorfná a funkcia f' je opäť analytická v bode a. V dôsledku toho má funkcia f v bode a derivácie ľubovoľného rádu, pričom všetky sú analytické v a.*

Týmto pozorovaním nateraz skúmanie vlastností analytických funkcií zanecháme. Neskôr sa k tejto problematike ešte vrátime a dokážeme okrem iného aj opačnú implikáciu k predošlému zisteniu – že totiž každá holomorfná funkcia je analytická. Tiež potom uvidíme, že lokálne reprezentácie analytických funkcií pomocou mocninových radov sú vždy Taylorovými radmi danej funkcie (definovanými obdobne ako v reálnom prípade).

3.5 Exponenciálna funkcia a goniometrické funkcie

Zavedieme teraz exponenciálnu funkciu a goniometrické funkcie komplexnej premennej. Ako je dobre známe, na $\mathbb{R}$ sú tieto funkcie reprezentovateľné ich Maclaurinovými radmi. Komplexné obdoby týchto radov využijeme na to, aby sme spomínané funkcie *definovali* na obore $\mathbb{C}$.

Definícia 3.5.1.

(*i*) *Exponenciálnu funkciu* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

(*ii*) *Funkciu sínus* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(*iii*) *Funkciu kosínus* definujeme pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Poznámka 3.5.2. Korektnosť uvedenej definície nie je úplne evidentná; je totiž potrebné dokázať, že mocninové rady v nej použité majú nekonečný polomer konvergencie. Polomer konvergencie ϱ radu definujúceho funkciu e^z je ale daný ako

$$\begin{aligned} \varrho^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\ln(n!)/n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(n/2)\ln(n/2)/n}} = \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} = 0 \end{aligned}$$

(kde použitá exponenciálna funkcia je *reálna*), z čoho $\varrho = \infty$. Nekonečný polomer konvergencie radov pre sínus a kosínus potom vyplýva bezprostredne z porovnávacieho kritéria.

Keďže sme na definíciu všetkých troch funkcií použili komplexnú obdobu ich Taylorových radov v reálnom obore, na $\mathbb{R}$ tieto funkcie splývajú s ich reálnymi náprotivkami. Ďalej už teda nemusíme rozlišovať medzi ich reálnymi a komplexnými verziami.

V nasledujúcom tvrdení okrem iného vyjadríme pomocou reálnych funkcií sínus a kosínus hodnotu exponenciálnej funkcie pre rýdzo imaginárne argumenty (stačí zvoliť $z \in \mathbb{R}$). Odôvodníme tak aj zápis komplexných čísel v exponenciálnom tvare, ktorý sme doposiaľ chápali čisto formálne. Na druhej strane bude z nasledujúceho tvrdenia vyplývať, že vlastnosti „formálneho“ exponenciálneho tvaru platia aj pre „ozajstnú“ exponenciálnu funkciu.

Tvrdenie 3.5.3. *Nech* $z \in \mathbb{C}$. *Potom* $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z definície 3.5.1 a tvrdenia 3.1.4. □

Dôsledok 3.5.4 (Eulerova rovnosť)**.** *Platí* $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Tvrdenie 3.5.5. *Funkcie* e^z, $\sin z$ *a* $\cos z$ *sú holomorfné na* $\mathbb{C}$, *pričom* $(e^z)' = e^z$, $\sin' z = \cos z$ *a* $\cos' z = -\sin z$.

Dôkaz. Všetky tri funkcie sú analytické v bode 0 a zodpovedajúce mocninové rady majú nekonečný polomer konvergencie. Stačí teda aplikovať vetu 3.4.2. □

Tvrdenie 3.5.6. *Nech* $z, w \in \mathbb{C}$. *Potom* $e^{z+w} = e^z e^w$.

Dôkaz. Zvoľme $a \in \mathbb{C}$ a položme $f(z) := e^z e^{a-z}$. Z viet 2.5.3 a 2.5.6 potom $f'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$. Podľa tvrdenia 2.5.8 je teda funkcia f konštantná. Navyše $f(a) = e^a e^0 = e^a$ – pre všetky $z \in \mathbb{C}$ teda $f(z) = e^a$. Pre ľubovoľné $z, w \in \mathbb{C}$ teraz zvoľme $a = z + w$; zisťujeme, že $f(z) = e^z e^w = e^{z+w}$, čo bolo treba dokázať. □

Dôsledok 3.5.7. *Nech* $z \in \mathbb{C}$. *Potom* $e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ *a* $[\![\arg e^z]\!] = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3.6 Argument, logaritmus a mocninové funkcie

Viaceré elementárne funkcie reálnej premennej sa pri pokuse o zovšeobecnenie do komplexného oboru jemne vymykajú našej doterajšej predstave o funkciách komplexnej premennej ako o zobrazeniach $f\colon S \to \mathbb{C}$ pre nejakú množinu $S \subseteq \mathbb{C}$ – pre jedno $z \in \mathbb{C}$ totiž môžu nadobúdať viac ako jednu zmysluplnú výstupnú hodnotu. Na viachodnotovosť sme už narazili pri argumente; dnes uvidíme, že rovnaká situácia nastáva aj pri logaritmoch, či iných ako celočíselných mocninách.

V rámci tohto oddielu k *viachodnotovým funkciám* – alebo tiež *multifunkciám* – zaujmeme pomerne naivný prístup a budeme sa z nich pokúšať vyrábať jednohodnotové funkcie vhodnou voľbou argumentu. V kapitole 12 naše chápanie analytických funkcií prehĺbime a uvidíme, že na jednohodnotové a viachodnotové funkcie je v skutočnosti možné nazerať jednotným spôsobom.

V prvej kapitole sme videli, že *argument* komplexného čísla z nie je daný jednoznačne, ale určuje celú množinu hodnôt $[\![\arg z]\!]$: ide o takzvanú *viachodnotovú funkciu* alebo *multifunkciu*. Pre nenulové komplexné čísla sa však rôzne argumenty môžu líšiť iba o celočíselný násobok 2π. Pre každé $k \in \mathbb{Z}$ preto môžeme definovať jednohodnotovú funkciu $\arg_k\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ takú, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$\arg_k(z) = \theta \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \theta \in [\![\arg z]\!] \cap ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi],$$

t. j. vyberieme jednoznačne danú hodnotu argumentu z intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$. Takéto funkcie nazývame *vetvami* viachodnotovej funkcie $\arg z$. Každá vetva $\arg_k(z)$ je zjavne spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na takzvanom *reze* komplexnej roviny $(-\infty, 0)$ spojitá nie je. Pre všetky $a \in (-\infty, 0)$ ale

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \arg_k(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg_{k+1}(z);$$

vetva $\arg_k$ teda akoby „chcela spojito prejsť“ do vetvy $\arg_{k+1}$. Možno si tiež všimnúť, že namiesto rezu $(-\infty, 0)$ môžeme komplexnú rovinu narezať aj pozdĺž inej polpriamky z bodu 0 a dostaneme obdobnú situáciu – v takom prípade len argument vyberáme z iných intervalov.

V jednohodnotovú funkciu argumentu, ktorá by bola spojitá v bode 0, očividne dúfať nemôžeme: v každom okolí bodu 0 totiž vieme nájsť komplexné číslo ľubovoľného argumentu. Neexistuje však ani funkcia argumentu, ktorá by bola spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. To možno dokázať nasledovne: predpokladajme, že takáto spojitá funkcia $\theta\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ existuje. Potom by bola spojitá aj funkcia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ daná pre všetky $t\in\mathbb{R}$ predpisom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(\theta(e^{it}) - t).$$

Ľahko ale vidieť, že táto spojitá funkcia nadobúda iba celočíselné hodnoty – musí preto byť konštantná, z čoho dostávame napríklad $\theta(e^0) = \theta(e^{i2\pi}) - 2\pi$. To je spor, pretože $e^{i2\pi} = e^0 = 1$.

Prirodzený logaritmus $\ln x$ kladného reálneho čísla x je – vďaka injektívnosti reálnej exponenciálnej funkcie – definovaný ako *jediné* reálne číslo y, pre ktoré $e^y = x$. Túto funkciu by sme teraz chceli rozšíriť do komplexného oboru. Pre dané $z\in\mathbb{C}$ teda hľadáme všetky komplexné riešenia w rovnice

$$e^w = z. \tag{3.7}$$

Z dôsledku 3.5.7 vyplýva nenulovosť exponenciálnej funkcie na celom $\mathbb{C}$; môžeme preto predpokladať, že $z\neq 0$. Ak položíme $w = u+iv$, vďaka dôsledku 3.5.7 máme $|e^w| = e^u$ a $[\![\arg e^w]\!] = \{v+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Rovnosť (3.7) je teda ekvivalentná dvojici rovností $e^u = |z|$ a $v\in[\![\arg z]\!]$. Pre všetky $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ preto

$$e^w = z \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad w = \ln|z| + i\theta,\ \text{ kde } \theta\in[\![\arg z]\!].$$

To nás vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia 3.6.1. *Prirodzený logaritmus* komplexného čísla $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ je množina

$$[\![\ln z]\!] := \{\ln|z| + i\theta \mid \theta\in[\![\arg z]\!]\}.$$

Získavame tak ďalšiu dôležitú viachodnotovú funkciu. Z vyššie učinených úvah pritom vyplýva, že $w\in[\![\ln z]\!]$ práve vtedy, keď $e^w = z$.

Uvažované argumenty môžeme opäť obmedziť na vhodný interval. Napríklad môžeme komplexnú rovinu rozrezať pozdĺž polpriamky $(-\infty,0]$ a pre ľubovoľné $k\in\mathbb{Z}$ uvažovať funkciu $\ln_k\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ definovanú pre všetky $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ predpisom

$$\ln_k(z) := \ln|z| + i\theta, \qquad \text{kde } \theta\in[\![\arg z]\!]\cap((2k-1)\pi,(2k+1)\pi].$$

Vidíme potom, že funkcia $\operatorname{Re}\ln_k(z) = \ln|z|$ je spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $\operatorname{Im}\ln_k(z)$ je – keďže ide o funkciu argumentu obmedzenú na $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi]$ – spojitá na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ a nespojitá na $(-\infty,0)$. Funkcia $\ln_k(z)$ je teda podľa tvrdenia 2.2.7 tiež spojitá na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ a nespojitá na $(-\infty,0)$. Pre všetky $a\in(-\infty,0)$ navyše

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} \ln_k(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ \operatorname{Im} z<0}} \ln_{k+1}(z).$$

Funkcia $\ln_k(z)$ je pre všetky $k\in\mathbb{Z}$ holomorfná na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Jej zúženie na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ je totiž spojitou inverznou funkciou k funkcii e^w zúženej na $S = \{w\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)\}$. Ak teda pre ľubovoľné $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ položíme $w = \ln_k(z)$, z vety 2.5.7 vyplýva diferencovateľnosť funkcie $\ln_k$ v bode z, pričom

$$\ln_k'(z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{e^{\ln_k(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Funkcie $\ln_k(z)$ teda nazývame aj *holomorfnými vetvami prirodzeného logaritmu.*

Nech $z \in \mathbb{C}$. Pre dané $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ najprv nájdime všetky *n-té odmocniny* čísla z; to znamená všetky čísla $w \in \mathbb{C}$, pre ktoré je splnená rovnosť

$$w^n = z.$$

Ak $z = re^{i\theta}$ a $w = se^{i\phi}$ pre nejaké $r, s \geq 0$ a $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, musí byť $s = r^{1/n}$ a $n\phi = \theta + 2k\pi$ pre nejaké $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Preto kladieme

$$[\![z^{1/n}]\!] := \left\{ |z|^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} = \left\{ e^{i2k\pi/n} |z|^{1/n} e^{i\theta/n} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}, \quad (3.8)$$

kde θ je ľubovoľný prvok $[\![\arg z]\!]$. Takto by sme vedeli definovať aj racionálne mocniny komplexného čísla, avšak na definíciu *reálnych a komplexných mocnín* potrebujeme zvoliť iný prístup – využiť funkciu prirodzeného logaritmu komplexnej premennej.

Definícia 3.6.2. Nech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom

$$[\![z^\alpha]\!] := \{ e^{\alpha w} \mid w \in [\![\ln z]\!] \} = \left\{ e^{\alpha(\ln|z| + i\theta)} \;\middle|\; \theta \in [\![\arg z]\!] \right\}.$$

Ľahko overíme, že definícia 3.6.2 je konzistentná s definíciou odmocnín prostredníctvom (3.8); pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ totiž

$$e^{(\ln|z| + i\theta)/n} = e^{\ln|z|/n} e^{i\theta/n} = |z|^{1/n} e^{i\theta/n}$$

a všetky rôzne $\theta \in [\![\arg z]\!]$ tak dajú práve množinu (3.8). Máme teda definovanú ďalšiu spomedzi najvýznamnejších multifunkcií.

Vráťme sa ešte na chvíľu k multifunkcii $[\![z^{1/n}]\!]$ pre prirodzené $n \geq 2$. Obmedzme sa na argumenty z intervalu $(-\pi, \pi]$ – čiže narežme komplexnú rovinu pozdĺž polpriamky $(-\infty, 0]$ – a definujme pre $k = 0, \dots, n-1$ funkciu $f_k \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ako vetvu multifunkcie $[\![z^{1/n}]\!]$, v ktorej vyberieme k-tu spomedzi jej n-tých odmocnín: pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ teda položme

$$f_k(z) := e^{i2k\pi/n} |z|^{1/n} e^{i\theta/n},$$

kde $\theta \in [\![\arg z]\!] \cap (-\pi, \pi]$ je argument z nami zvoleného intervalu. Pre $k = 0, \dots, n-1$ a všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ potom $f_k(z)^n = z$. Funkcie $f_k(z)$ sú navyše holomorfné na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, keďže

$$f_k(z) = e^{\ln_k(z)/n},$$

kde $\ln_k(z)$ je k-ta holomorfná vetva logaritmu; holomorfnosť funkcie f_k na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tak vyplýva z vety o derivácii zloženej funkcie. Ľahko tiež overíme, že funkcie $f_k(z)$ sú nespojité na $(-\infty, 0)$, pričom ale pre všetky $a \in (-\infty, 0)$ je

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f_k(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} f_{k+1}(z),$$

kde sčítanie v indexe funkcie f je modulo n. Funkcie $f_0, \dots, f_{n-1}$ teda nazývame *holomorfnými vetvami multifunkcie* $[\![z^{1/n}]\!]$. Ľahko tiež vidieť, že počiatočná voľba argumentu z intervalu $(-\pi, \pi]$ nebola nijak zásadná – pre argumenty vyberané z intervalu $((2\ell - 1)\pi, (2\ell + 1)]$ pre $\ell \in \mathbb{Z}$ by sme vždy dostali tých istých n holomorfných vetiev, akurát s cyklicky posunutými indexmi. Veľmi podobná je situácia aj pri všeobecnom komplexnom exponente α; takáto mocninová funkcia však má pre $\alpha \notin \mathbb{Q}$ nekonečne veľa holomorfných vetiev.

Pri manipulácii s inými ako celočíselnými mocninami komplexných čísel je vždy namieste určitá opatrnosť, pretože nie všetky vlastnosti umocňovania reálnych čísel na reálny exponent sú pre komplexné čísla plnohodnotne zachované. V nasledujúcom si teda uvedieme aspoň dve spomedzi vlastností, ktoré pri práci s mocninami komplexných čísel používať môžeme.

Tvrdenie 3.6.3. *Nech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Potom pre každé $w \in [\![z^{\alpha+\beta}]\!]$ existujú $u \in [\![z^{\alpha}]\!]$ a $v \in [\![z^{\beta}]\!]$ také, že $w = uv$.*

Dôkaz. Z definície 3.6.2 je
$$w = e^{(\alpha+\beta)(\ln|z|+i\theta)}$$
pre nejaké $\theta \in [\![\arg z]\!]$. Potom
$$u = e^{\alpha(\ln|z|+i\theta)} \in [\![z^{\alpha}]\!]$$
a
$$v = e^{\beta(\ln|z|+i\theta)} \in [\![z^{\beta}]\!],$$
pričom
$$uv = e^{\alpha(\ln|z|+i\theta)}e^{\beta(\ln|z|+i\theta)} = e^{(\alpha+\beta)(\ln|z|+i\theta)}.$$ □

Poznámka 3.6.4. Na prvý pohľad sugestívne vyzerajúca rovnosť $[\![z^{\alpha+\beta}]\!] = [\![z^{\alpha}]\!][\![z^{\beta}]\!]$ na rozdiel od vlastnosti z tvrdenia 3.6.3 *neplatí.* Stačí si napríklad všimnúť, že
$$[\![1^{1/3}]\!][\![1^{2/3}]\!] = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\} = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\} \neq \{1\} = [\![1^{1}]\!].$$
Kľúčovým faktorom pri dôkaze tvrdenia 3.6.3 bolo, že sme pri obidvoch mocninách uvažovali rovnaký argument čísla z.

Identita $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$, platná pre všetky $a, b > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, nemá žiadnu obdobu umožňujúcu uvažovať komplexné základy aj exponenty. V nasledujúcom ale aspoň dokážeme, že odmocňovanie komplexných čísel – a teda aj ich umocňovanie na racionálnu mocninu – sa v tomto zmysle správa očakávaným spôsobom.

Tvrdenie 3.6.5. *Nech $a, b \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre ľubovoľné $u \in [\![a^{1/n}]\!]$ a $v \in [\![b^{1/n}]\!]$ potom*
$$[\![(ab)^{1/n}]\!] = [\![a^{1/n}]\!][\![b^{1/n}]\!] = u[\![b^{1/n}]\!] = [\![a^{1/n}]\!]v.$$

Dôkaz. Evidentne stačí dokázať iba rovnosť $[\![(ab)^{1/n}]\!] = [\![a^{1/n}]\!]v$. Nech $\theta \in [\![\arg a]\!]$ a $\phi \in [\![\arg b]\!]$. Podľa (3.8) existuje $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, pre ktoré je $v = e^{i2\ell\pi/n}|b|^{1/n}e^{i\phi/n}$. Preto
$$\begin{aligned}
[\![a^{1/n}]\!]v &= \left\{ e^{i2k\pi/n}|a|^{1/n}e^{i\theta/n} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} e^{i2\ell\pi/n}|b|^{1/n}e^{i\phi/n} = \\
&= \left\{ e^{i2(k+\ell)\pi/n}|ab|^{1/n}e^{i(\theta+\phi)/n} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} = \\
&= \left\{ e^{i2k\pi/n}|ab|^{1/n}e^{i(\theta+\phi)/n} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} = \\
&= [\![(ab)^{1/n}]\!],
\end{aligned}$$
keďže $\theta + \phi \in [\![\arg(ab)]\!]$. □

Cvičenia

1. Dokážte, že pre každý absolútne konvergentný rad komplexných čísel $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ je
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|d_n|.$$
Trojuholníková nerovnosť teda v tomto zmysle platí aj pre nekonečné súčty.

2. Dokážte alebo vyvráťte: pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ so stredom v bode 0 a s polomerom konvergencie 1, ktorý diverguje *v práve k rôznych bodoch* kružnice $|z| = 1$ (a vo zvyšných bodoch tejto kružnice konverguje).

3. Dokážte, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ je $(e^z)^k = e^{kz}$. Ako je to s $(e^z)^\alpha$ pre $\alpha \in \mathbb{C}$?

4. Dokážte, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platia vzťahy

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{a} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

5. Funkcia kosínus je na $\mathbb{R}$ párna a funkcia sínus je na $\mathbb{R}$ nepárna. Zostáva táto vlastnosť v platnosti aj na $\mathbb{C}$?

6. Dokážte, že pre všetky $z, w \in \mathbb{C}$ platia *súčtové vzorce*

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$
$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

7. Funkcie sínus a kosínus sú na $\mathbb{R}$ ohraničené. Zostáva táto ich vlastnosť v platnosti aj na $\mathbb{C}$?

8. Nájdite všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že:

   a) $e^z - 1 = 0$,
   b) $e^z + 1 = 0$.

9. Nájdite všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že:

   a) $\sin z = 0$,
   b) $\cos z = 0$.

Kapitola 4

Integrovanie funkcií komplexnej premennej

Budeme sa teraz nejaký čas venovať integrálom funkcií komplexnej premennej. Nepôjde pritom o samoúčelné snaženie – integrovanie v komplexnej rovine sa neskôr ukáže okrem iného ako užitočný nástroj na skúmanie rozličných vlastností analytických funkcií, o ktoré nám ide predovšetkým. Text tejto kapitoly čiastočne vychádza z kníh [8] a [4].

4.1 Komplexné funkcie reálnej premennej

V súvislosti s integrálmi budeme potrebovať narábať s komplexnými funkciami reálnej premennej – čiže s funkciami $f\colon S \to \mathbb{C}$, kde $S \subseteq \mathbb{R}$. V podstate tu nejde o žiaden nový objekt: každú takúto funkciu f totiž možno reprezentovať pomocou dvojice reálnych funkcií $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ definovaných pre všetky $t \in S$ predpismi $(\operatorname{Re} f)(t) := \operatorname{Re}(f(t))$ a $(\operatorname{Im} f)(t) := \operatorname{Im}(f(t))$; evidentne potom $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$. V stručnosti si teraz zhrnieme niekoľko základných faktov o takýchto funkciách.

Ako definície *limity* a *spojitosti* môžu pre takéto funkcie poslúžiť definície pre funkcie komplexnej premennej z druhej kapitoly. Platí teda nasledujúce.

Tvrdenie 4.1.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia.*

a) Nech $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny S. Vlastná limita $\lim_{t\to a} f(t)$ potom existuje práve vtedy, keď existujú obidve vlastné limity $\lim_{t\to a} \operatorname{Re} f(t)$ a $\lim_{t\to a} \operatorname{Im} f(t)$. V takom prípade

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} \operatorname{Re} f(t) + i \lim_{t\to a} \operatorname{Im} f(t).$$

b) Funkcia f je spojitá v bode $a \in S$ (resp. na množine $T \subseteq S$) práve vtedy, keď sú v bode a (resp. na množine T) spojité obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.

Dôkaz. Ide o špeciálny prípad tvrdenia 2.2.7. □

Ako definíciu derivácie môžeme takisto použiť tú z druhej kapitoly; derivácie však musíme uvažovať v hromadných bodoch množiny $S \subseteq \mathbb{C}$ – a nielen v bodoch otvorených podmnožín $\mathbb{C}$, ako tomu je pri holomorfných funkciách.

Definícia 4.1.2. Nech $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in S$ je hromadný bod množiny S. *Deriváciou* funkcie f v bode a nazveme, ak existuje, hodnotu vlastnej limity

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Ak má funkcia f v bode a deriváciu, nazveme ju *diferencovateľnou* v bode a. Funkcia f je diferencovateľná na množine $T \subseteq S$, ak T pozostáva výhradne z hromadných bodov množiny S a f je diferencovateľná v každom bode $a \in S$.

Tvrdenie 4.1.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Funkcia f je diferencovateľná v hromadnom bode $a \in S$ množiny S práve vtedy, keď sú v bode a diferencovateľné obidve funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. V takom prípade navyše*

$$\operatorname{Re}(f'(a)) = (\operatorname{Re} f)'(a),$$
$$\operatorname{Im}(f'(a)) = (\operatorname{Im} f)'(a)$$

a

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a).$$

Dôkaz. Jednoduché cvičenie. □

Po zvyšok tejto kapitoly budeme často pracovať s určitými integrálmi reálnych funkcií reálnej premennej. Môže pritom vždy ísť o Riemannov integrál alebo o ľubovoľný iný integrál taký, že všetky funkcie po častiach spojité na intervale $[\alpha, \beta]$ – čiže všetky funkcie, ktoré sú na tomto intervale nespojité v nanajvýš konečnom počte bodov – sú na intervale $[\alpha, \beta]$ integrovateľné, pričom hodnota tohto integrálu sa zhoduje s hodnotou Riemannovho integrálu. Môže ísť teda napríklad aj o Lebesgueov integrál; znalosť jeho teórie však u čitateľa nepredpokladáme.

Ako medzikrok k pojmu krivkového integrálu definujeme určitý integrál komplexnej funkcie *reálnej* premennej; základom pre definíciu takéhoto integrálu je jeho očakávaná linearita.

Definícia 4.1.4. Nech $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla a $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je funkcia. Funkcia f je *integrovateľná* na intervale $[\alpha, \beta]$, ak sú na tomto intervale integrovateľné funkcie $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. V takom prípade definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (\operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t))\,\mathrm{d}t := \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 4.1.5. Z uvedeného vyplýva, že všetky komplexné funkcie reálnej premennej, po častiach spojité na nejakom intervale, sú na tomto intervale integrovateľné.

Poznámka 4.1.6. V súlade s bežnou praxou budeme za integrovateľné považovať aj všetky funkcie $f\colon [\alpha, \beta] \setminus F \to \mathbb{C}$, kde F je *konečná* množina a ľubovoľná z funkcií $\hat{f}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ taká, že pre všetky $t \in [\alpha, \beta] \setminus F$ je $\hat{f}(t) = f(t)$, je integrovateľná na $[\alpha, \beta]$. Nech totiž funkciu f dodefinujeme na $\hat{f}$ akýmkoľvek spôsobom, integrál

$$\int_\alpha^\beta \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t =: \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$$

bude vždy ten istý.

4.2 Parametrické krivky

Určitý integrál funkcie jednej reálnej premennej sa obvykle definuje na intervale. V rámci prechodu od jednorozmernej reálnej osi k dvojrozmernej komplexnej rovine sa vhodným zovšeobecnením tohto konceptu javí byť integrovanie komplexných funkcií pozdĺž kriviek. Zavedieme preto niekoľko pojmov, ktoré s krivkami súvisia.

Krivku v komplexnej rovine možno vo všeobecnosti zadať (najmenej) dvoma principiálne odlišnými spôsobmi. Jednou možnosťou je chápať krivku ako „statický objekt“, čiže ako vhodnú množinu bodov komplexnej roviny, zadanú napríklad rovnicou. Tak napríklad zápis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ udáva kružnicu so stredom $a \in \mathbb{C}$ a polomerom $r > 0$, zápis $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z| \;\wedge\; |z| \leq \sqrt{2}\}$ je vyjadrením úsečky spájajúcej body $-1 - i$ a $1 + i$, a podobne.

Za účelom definície integrálu je však vhodnejší „dynamický“ pohľad, pri ktorom krivku chápeme ako dráhu opísanú pohybujúcim sa bodom v nejakom časovom intervale. Ak sa bod začal pohybovať v čase $t = \alpha$ a prestal sa pohybovať v čase $t = \beta$, je ním opísaná dráha jednoznačne určená funkciou, ktorá pre každý čas z intervalu $[\alpha, \beta]$ vráti „aktuálnu polohu“ pohybujúceho sa bodu v komplexnej rovine. Aby sme o opísanej dráhe mohli zmysluplne hovoriť ako o krivke, pohybujúci sa bod by nemal mať možnosť „skákať“ z jedného miesta na druhé – zobrazenie udávajúce krivku by teda malo byť spojité. Krivka je tu teda daná spojitou funkciou reálneho časového parametra t a nazývame ju preto *krivkou danou parametricky* alebo *parametrickou krivkou.* Zvyčajne však budeme prívlastok „parametrická“ vynechávať a hovoriť jednoducho o *krivke.*

Definícia 4.2.1. *Parametrická krivka* je spojité zobrazenie $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, kde $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla.

Príklad 4.2.2. *Úsečku* začínajúcu v bode $u \in \mathbb{C}$ a končiacu v bode $v \in \mathbb{C}$ možno zadať ako parametrickú krivku $[u, v]\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [0, 1]$ predpisom

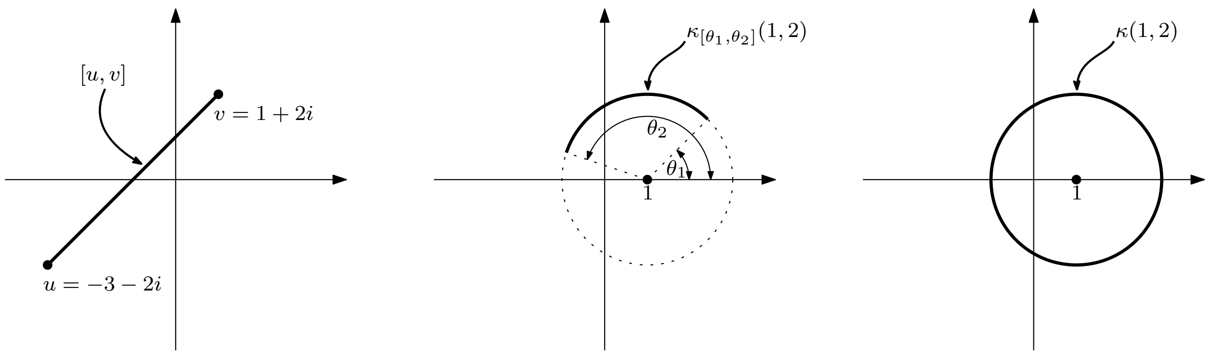
$$[u, v](t) = u + t(v - u).$$

Pre úsečky používame rovnakú notáciu ako pre uzavreté intervaly; význam notácie $[u, v]$ ale bude vždy zrejmý z kontextu.

Kruhový oblúk so stredom $a \in \mathbb{C}$ a polomerom $r > 0$, vymedzený uhlami $\theta_1 \leq \theta_2$, možno zadať ako parametrickú krivku $\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)\colon [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [\theta_1, \theta_2]$ predpisom

$$\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)(t) = a + re^{it}.$$

Pod *kružnicou* $\kappa(a, r)$ so stredom $a \in \mathbb{C}$ a polomerom $r > 0$ rozumieme kruhový oblúk $\kappa_{[0,2\pi]}(a, r)$. Tieto tri pravdepodobne najdôležitejšie druhy parametrických kriviek sú znázornené na obrázku 4.1.



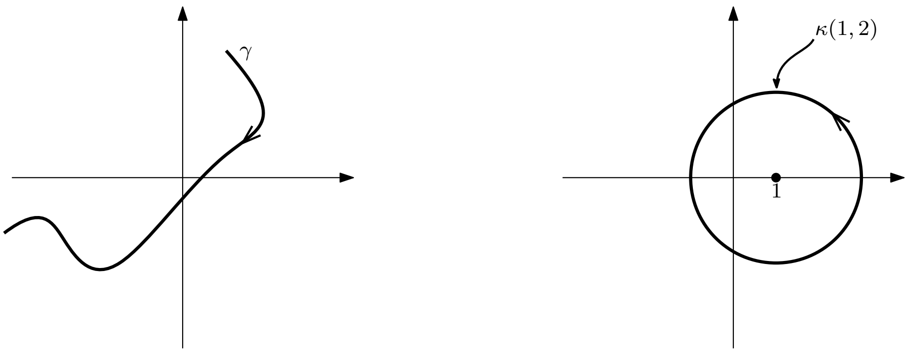
(a) Úsečka $[-3 - 2i, 1 + 2i]$. **(b)** Kruhový oblúk $\kappa_{[\theta_1,\theta_2](1,2)}$. **(c)** Kružnica $\kappa(1, 2)$.

Obr. 4.1: Úsečka, kruhový oblúk a kružnica.

Označenie 4.2.3. V nasledujúcom budeme často používať notáciu z predošlého príkladu – $[u, v]$ pre úsečku, $\kappa_{[\theta_1,\theta_2]}(a, r)$ pre kruhový oblúk a $\kappa(a, r)$ pre kružnicu.

Počiatočným bodom takto definovanej krivky γ nazveme bod $\gamma(\alpha)$ a jej *koncovým bodom* bod $\gamma(\beta)$. Symbolom γ^* označíme množinu všetkých bodov ležiacich na krivke γ, t. j. $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$; táto množina sa nazýva *obrazom* krivky γ. Krivku nazveme *uzavretou*, ak $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, a *jednoduchou*, ak pre všetky $t_1 \leq t_2$ z intervalu $[\alpha, \beta]$ môže rovnosť $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ nastať iba v prípade, že $t_1 = t_2$, alebo súčasne $t_1 = \alpha$ a $t_2 = \beta$; jednoduchá krivka sa teda nikde sama so sebou „nekríži“, pričom môže alebo nemusí byť uzavretá. Jednoduchú a súčasne uzavretú krivku nazývame *Jordanovou krivkou.*

Každá jednoduchá parametrická krivka udáva okrem svojho obrazu γ^* aj smer, v ktorom je táto množina bodov opísaná. Túto skutočnosť graficky vyjadrujeme šípkami, podobne ako na obrázku 4.2. O jednoduchej uzavretej krivke navyše hovoríme, že je *kladne orientovaná*, ak je opísaná „proti smeru hodinových ručičiek“. Takáto definícia orientácie je značne neexaktná – ozajstnú definíciu sformulujeme až neskôr s využitím krivkového integrálu.



(a) Smer opísania krivky γ znázornený šípkou. **(b)** Kružnica $\kappa(1,2)$ je orientovaná kladne.

Obr. 4.2: Orientované krivky.

Poznámka 4.2.4. Grafické znázornenie na obrázku 4.2 vyjadruje spôsob, akým jednoduché parametrické krivky obvykle chápeme – väčšinou ich *stotožňujeme* s ich obrazom spoločne s ich orientáciou. Pri práci s krivkovými integrálmi sa týmto stotožnením zvyčajne nedopustíme chyby. Treba však mať na pamäti, že táto skutočnosť nie je nijak samozrejmá: dve rovnako orientované krivky s rovnakými obrazmi môžu byť definované pomocou rozdielnych funkcií časového parametra, a teda nemusí ísť o jeden a ten istý objekt. Budeme preto neskôr musieť *dokazovať*, že v uvedenom zmysle „ekvivalentné“ krivky sa za určitých okolností naozaj „správajú rovnako“.

Na krivkách tiež môžeme definovať niekoľko jednoduchých operácií. Pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ označíme symbolom $-\gamma$ k nej *opačnú* krivku $-\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$, definovanú pre všetky $t\in[\alpha,\beta]$ predpisom

$$(-\gamma)(t)=\gamma(\alpha+\beta-t).$$

Táto krivka má rovnaký obraz ako krivka γ, je však opísaná „opačným smerom“. Pre ľubovoľnú dvojicu kriviek $\gamma_1\colon [\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{C}$ a $\gamma_2\colon [\alpha_2,\beta_2]\to\mathbb{C}$ takých, že $\gamma_1(\beta_1)=\gamma_2(\alpha_2)$ ďalej symbolom $\gamma_1+\gamma_2$ označíme ich *spojenie*[1], ktoré definujeme ako krivku $\gamma_1+\gamma_2\colon [\alpha_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]\to\mathbb{C}$ danú pre všetky $t\in[\alpha_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]$ ako

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & \text{ak } t\in[\alpha_1,\beta_1],\\ \gamma_2(\alpha_2-\beta_1+t) & \text{ak } t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2].\end{cases}$$

Nakoniec definujme *zúženie* $\gamma\restriction[\hat\alpha,\hat\beta]$ krivky $\gamma\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ na interval $[\hat\alpha,\hat\beta]$, kde $\alpha\le\hat\alpha\le\hat\beta\le\beta$, ako krivku $\left(\gamma\restriction[\hat\alpha,\hat\beta]\right)\colon[\hat\alpha,\hat\beta]\to\mathbb{C}$ spĺňajúcu $\left(\gamma\restriction[\hat\alpha,\hat\beta]\right)(t)=\gamma(t)$ pre všetky $t\in[\hat\alpha,\hat\beta]$.

Poznámka 4.2.5. Notácia $-\gamma$ pre opačnú krivku a $\gamma_1+\gamma_2$ pre spojenie dvoch kriviek je síce zaužívaná, ale nie je konzistentná s operáciami na funkciách, ktoré sú nositeľkami rovnakých označení. Je preto dôležité zakaždým rozlišovať, či krivku chápeme naozaj ako krivku, alebo nás zaujíma funkcia, pomocou ktorej je táto krivka definovaná. V nasledujúcom to bude vždy zrejmé z kontextu.

[1] Operácia spojenia kriviek je zrejme asociatívna, čo nám umožňuje používať aj notáciu $\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ pre spojenie n (vhodných) kriviek $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$.

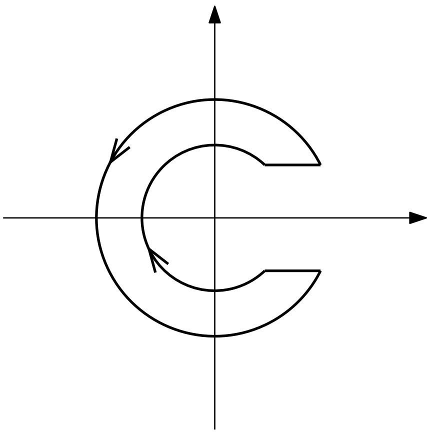
Zmysel nasledujúcej definície *hladkých* a *po častiach hladkých* kriviek sa ukáže v súvislosti s krivkovými integrálmi.

Definícia 4.2.6. Nech $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla. Krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ nazveme:

a) *Hladkou*[2], ak je funkcia γ na intervale $[\alpha, \beta]$ spojite diferencovateľná.

b) *Po častiach hladkou*, ak je spojením niekoľkých hladkých kriviek.

V komplexnej analýze sa typicky pracuje s krivkami, ktoré sú spojením konečného počtu kruhových oblúkov a úsečiek – príklad takejto krivky je na obrázku 4.3. Ľahko možno overiť, že všetky takéto krivky sú po častiach hladké. V nasledujúcom budeme pracovať výhradne s po častiach hladkými krivkami.



Obr. 4.3: Krivky vzniknuté spojením konečného počtu kruhových oblúkov a úsečiek sú v komplexnej analýze najčastejšie používaným druhom po častiach hladkých kriviek.

4.3 Krivkový integrál

Definujeme teraz krivkové integrály komplexných funkcií komplexnej premennej. Ako už bolo povedané, pôjde o zovšeobecnenie určitého integrálu funkcií reálnej premennej, pri ktorom budeme namiesto intervalov integrovať pozdĺž kriviek v komplexnej rovine. Ako je dobre známe, pre funkciu g reálnej premennej t integrovateľnú na intervale $[0, 1]$ je

$$\int_1^0 g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Očakávali by sme teda napríklad, že ak γ je úsečka dĺžky 1 zvierajúca so smerom reálnej osi uhol θ a f je funkcia komplexnej premennej z taká, že pre každé $t \in [0, 1]$ je $f(\gamma(t)) = g(t)$, bude integrál funkcie f pozdĺž γ spĺňať rovnosť

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = e^{i\theta} \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pre všeobecnú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ požadujeme podobnú vlastnosť: chceli by sme „sčítať nekonečne veľa hodnôt funkcie f nad krivkou γ“, pričom „každý infinitezimálny kúsok“ nad bodom $\gamma(t)$ by sme

[2]Pojem hladkej krivky nemožno zamieňať s pojmom hladkej funkcie, čo je reálna funkcia s deriváciami všetkých rádov. Pri hladkej krivke požadujeme iba existenciu jedinej spojitej derivácie.

chceli prenásobiť „smerovým vektorom" parametrickej krivky v danom bode, ktorý je daný jej deriváciou (ak, pravda, existuje). Prichádzame tak k vzťahu

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

ktorý môžeme odôvodniť aj symbolicky: ak $z = \gamma(t)$, tak $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. Derivácia $\gamma'(t)$ však na danom intervale nemusí všade existovať, prípadne nemusí byť spojitá; aby teda bol vyššie uvedený integrál dobre definovaný, obmedzíme sa na po častiach hladké krivky. Tak prichádzame k nasledujúcej definícii.

Definícia 4.3.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. *Integrál funkcie f pozdĺž krivky γ* potom definujeme predpisom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 4.3.2. Korektnosť uvedenej definície vyplýva z nasledujúceho: funkcie f aj γ sú spojité, teda je spojité aj ich zloženie. Krivka γ je navyše po častiach hladká, čo znamená, že funkcia γ' je na intervale $[\alpha, \beta]$ – až na konečne veľa jeho bodov[3] – dobre definovaná a po častiach spojitá. V dôsledku toho je – po prípadnom dodefinovaní v konečne veľa bodoch – po častiach spojitá aj funkcia $(f \circ \gamma)\gamma'$; táto funkcia je teda integrovateľná.

Poznámka 4.3.3. Krivkový integrál možno definovať aj pre všeobecnejšiu triedu kriviek, než sú po častiach hladké krivky – takýto prístup by si však vyžadoval vybudovať pomerne netriviálnu teóriu, hoci z hľadiska porozumenia fundamentálnym princípom komplexnej analýzy by sme tým veľa nezískali. Aj pre praktické účely sú po častiach hladké krivky viac ako plne postačujúce.

Príklad 4.3.4. Vypočítame integrál z funkcie $f(z) = z^2$ pozdĺž úsečky $\gamma = [-i, 2i]$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (-i+3it)^2 3i\,\mathrm{d}t = 3i\int_0^1 (-9t^2+6t-1)\,\mathrm{d}t = \\ &= 3i\left[-3t^3+3t^2-t\right]_{t=0}^1 = 3i\,(-1-0) = -3i.\end{aligned}$$

Význam nasledujúceho tvrdenia nemožno preceniť – hovorí o azda najdôležitejších konkrétnych integráloch v komplexnej analýze vôbec.

Tvrdenie 4.3.5. *Nech $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $k \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\int_{\kappa(a,r)} (z-a)^k\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{ak } k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}, \\ 2\pi i & \text{ak } k = -1. \end{cases}$$

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned}\int_{\kappa(a,r)} (z-a)^k\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^k ire^{it}\,\mathrm{d}t = ir^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t = \\ &= ir^{k+1}\int_0^{2\pi} \left(\cos(k+1)t + i\sin(k+1)t\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= ir^{k+1}\left(\int_0^{2\pi}\cos(k+1)t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi}\sin(k+1)t\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \begin{cases} ir^{k+1}\left(\left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1}\right]_{t=0}^{2\pi} - i\left[\frac{\cos(k+1)t}{k+1}\right]_{t=0}^{2\pi}\right) & \text{ak } k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}, \\ i\,[t]_{t=0}^{2\pi} & \text{ak } k = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Na zavŕšenie dôkazu už len stačí využiť skutočnosť, že pre všetky $\ell \in \mathbb{Z}$ je $\sin 2\ell\pi = \sin 0 = 0$ a $\cos 2\ell\pi = \cos 0 = 1$. □

[3] V týchto bodoch ju však možno ľubovoľne dodefinovať, a teda túto skutočnosť v súlade s dobrým zvykom a poznámkou 4.1.6 ignorujeme.

4.4 Elementárne vlastnosti krivkového integrálu

Dokážeme najprv, že integrály pozdĺž opačných kriviek a pozdĺž spojení kriviek majú očakávateľné hodnoty.

Tvrdenie 4.4.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom:*

(*i*) *Platí*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(*ii*) *Ak $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ pre nejaké dve po častiach hladké krivky $\gamma_1\colon [\alpha_1,\beta_1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma_2\colon [\alpha_2,\beta_2] \to \mathbb{C}$, tak*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz.

(*i*) Z definície opačnej krivky dostávame

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\alpha+\beta-t))\gamma'(\alpha+\beta-t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\beta}^{\alpha} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(*ii*) Z definície spojenia kriviek dostávame $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2$ a

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha_1}^{\beta_1+\beta_2-\alpha_2} f((\gamma_1+\gamma_2)(t))(\gamma_1+\gamma_2)'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta_1}^{\beta_1+\beta_2-\alpha_2} f(\gamma_2(\alpha_2-\beta_1+t))\gamma_2'(\alpha_2-\beta_1+t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad \square$$

Dôsledok 4.4.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Ak $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ pre nejakú n-ticu po častiach hladkých kriviek*

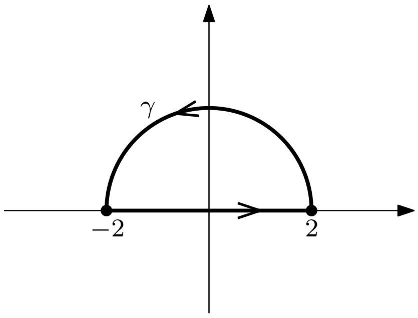
$$\gamma_1\colon [\alpha_1,\beta_1] \to \mathbb{C}, \ldots, \gamma_n\colon [\alpha_n,\beta_n] \to \mathbb{C},$$

tak

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Príklad 4.4.3. Vypočítame integrál funkcie $f(z) = z^2$ pozdĺž uzavretej krivky $\gamma = [-2,2] + \kappa_{[0,\pi]}(0,2)$ na obrázku 4.4. Táto integračná krivka je očividne po častiach hladká. Z tvrdenia 4.4.1 a definície krivkového integrálu:

$$\int_{\gamma} z^2\,\mathrm{d}z = \int_{[-2,2]} z^2\,\mathrm{d}z + \int_{\kappa_{[0,\pi]}(0,2)} z^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (-2+4t)^2 4\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (2e^{it})^2 2ie^{it}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 4\int_0^1 (16t^2 - 16t + 4)\,\mathrm{d}t + 8i\int_0^{\pi} \cos 3t\,\mathrm{d}t - 8\int_0^{\pi} \sin 3t\,\mathrm{d}t =$$
$$= 4\left[\frac{16t^3}{3} - 8t^2 + 4t\right]_{t=0}^{1} + 8i\left[\frac{\sin 3t}{3}\right]_{t=0}^{\pi} + 8\left[\frac{\cos 3t}{3}\right]_{t=0}^{\pi} = \frac{16}{3} + 0 - \frac{16}{3} = 0.$$



Obr. 4.4: Uzavretá integračná krivka γ.

V nasledujúcom dokážeme, že integrály pozdĺž po častiach hladkých kriviek „s rovnakým obrazom a smerom“, líšiacich sa iba parametrizáciou, majú za istých podmienok rovnaké hodnoty. Každú po častiach hladkú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ teda môžeme za určitých podmienok reparametrizovať – t. j. napríklad zadať ako funkciu nejakého iného intervalu $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ – bez toho, aby sa zmenili hodnoty integrálov pozdĺž nej. Podmienky, ktoré musí táto reparametrizácia spĺňať, bývajú v praxi v podstate vždy splnené; to nás do určitej miery oprávňuje hovoriť o integráloch pozdĺž kriviek bez toho, aby sme tieto krivky explicitne parametrizovali.[4]

Definícia 4.4.4. Nech $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka. Krivku $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ nazveme *reparametrizáciou* krivky γ, ak existuje rastúca spojite diferencovateľná bijekcia $\varphi\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ taká, že $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Podmienka rastúcosti a bijektívnosti reparametrizácie vyjadruje vlastnosť opísania obidvoch kriviek rovnakým smerom. Podmienka jej spojitej diferencovateľnosti je technická a využíva sa pri dôkaze nasledujúceho tvrdenia.

Je zrejmé, že ak je γ po častiach hladká krivka a $\hat{\gamma}$ jej reparametrizácia, je $\hat{\gamma}^* = \gamma^*$ a aj orientácia obidvoch kriviek je rovnaká. Nasledujúce tvrdenie hovorí, že sú rovnaké aj všetky integrály spojitých funkcií pozdĺž týchto dvoch kriviek.

Tvrdenie 4.4.5 (O reparametrizácii)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$ a $\hat{\gamma}$ je reparametrizácia krivky γ. Potom $\hat{\gamma}$ je po častiach hladká a*

$$\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Vďaka dôsledku 4.4.2 stačí uvažovať prípad, keď je krivka γ hladká. Nech $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ a $\varphi\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ je rastúca spojite diferencovateľná bijekcia taká, že $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Keďže sú obidve funkcie γ, φ diferencovateľné, je podľa vety 2.5.5 na intervale $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ diferencovateľná aj funkcia $\hat{\gamma}$. Platí pritom

$$\hat{\gamma}' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

a zo spojitosti funkcií γ', φ a φ' tak vďaka tvrdeniam 2.2.9(*iii*) a 2.2.10(*iii*) dostávame *spojitú* diferencovateľnosť funkcie $\hat{\gamma}$, ktorá preto musí byť – ak ju chápeme ako krivku – hladká.

[4]Presnejšie povedané: krivky používané v komplexnej analýze sú často zložené z úsečiek, kruhových oblúkov a podobných „elementárnych“ kriviek, pre ktoré je známa nejaká ich „obvyklá“ parametrizácia (pre úsečky a kruhové oblúky je to parametrizácia z príkladu 4.2.2). Podľa nasledujúceho tvrdenia o reparametrizácii môžeme intervaly parametrov bezo zmeny hodnoty integrálu prinajmenšom škálovať a posúvať, prípadne vykonávať ďalšie transformácie v súlade s technickými podmienkami tvrdenia. Ak teda niekedy budeme hovoriť o integrále pozdĺž krivky bez explicitne danej parametrizácie, budeme mať na mysli niektorú z jej „obvyklých“ parametrizácií, ktorá prípadne môže byť „povoleným spôsobom“ transformovaná.

Zisťujeme teda, že

$$\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} f(\hat{\gamma}(t))\hat{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

čo bolo treba dokázať. □

Poznámka 4.4.6. V dôkazoch predošlých tvrdení sme po tichu použili metódu substitúcie pre určité integrály reálnych funkcií komplexnej premennej; dôkaz, že táto metóda skutočne funguje, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

Viacero vlastností krivkových integrálov vyplýva priamo z vlastností určitých integrálov reálnych funkcií reálnej premennej (napríklad Riemannovho integrálu). Tieto vlastnosti budeme zvyčajne používať voľne – na ukážku uvedieme len dôkaz tvrdenia o linearite krivkových integrálov.

Tvrdenie 4.4.7 (Linearita krivkových integrálov)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú spojité funkcie, $a, b \in \mathbb{C}$ a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))\,\mathrm{d}z = a\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Funkcia $af(z)+bg(z)$ musí byť podľa tvrdenia 2.2.9 spojitá, takže znenie dokazovaného tvrdenia dáva zmysel. Z definície krivkového integrálu ďalej

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} (af + bg)(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} (af + bg)(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(af(\gamma(t))\gamma'(t) + bg(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= a\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + b\int_{\alpha}^{\beta} g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= a\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z,$$

čo bolo treba dokázať. □

4.5 Veta o odhade

Nasledujúca veta je užitočná napríklad v prípadoch, keď je integrál ťažké vypočítať presne alebo jednoducho v prípadoch, keď nás zaujíma najmä absolútna hodnota integrálu.

Veta 4.5.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

Ak navyše existuje $M \geq 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $|f(z)| \leq M$, tak

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot L(\gamma),$$

kde $L(\gamma)$ označuje dĺžku krivky *γ definovanú ako*

$$L(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Z definície krivkového integrálu

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Dokážeme, že

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_\alpha^\beta \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Skutočne: nech $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = re^{i\theta}$ pre nejaké $r \ge 0$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Potom

$$\begin{aligned} r &= \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)\,\mathrm{d}t \le \int_\alpha^\beta \left|e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Keďže ale tiež

$$r = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right|,$$

je nerovnosť (4.1) a tým aj prvá časť tvrdenia dokázaná. Ak ďalej $M \ge 0$ je také, že $|f(z)| \le M$ pre všetky $z \in \gamma^*$, je

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))| \cdot \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \int_\alpha^\beta M\left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t = M \cdot L(\gamma), \end{aligned}$$

čo dokazuje aj druhú časť tvrdenia. □

Poznámka 4.5.2. Pojem *dĺžky po častiach hladkej krivky* zo znenia predchádzajúcej vety súhlasí s jeho bežnou definíciou v reálnej analýze – ak totiž pre $t \in [\alpha, \beta]$ označíme $x(t) := \operatorname{Re}\gamma(t)$ a $y(t) := \operatorname{Im}\gamma(t)$, tak

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left|(\operatorname{Re}\gamma)'(t) + i(\operatorname{Im}\gamma)'(t)\right|\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \left|x'(t) + iy'(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ak navyše $x(t) = t$ a $y(t) = f(t)$, dostávame známy vzorec

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z uvedených skutočností vyplýva, že dĺžka „bežných“ kriviek – akými sú napríklad úsečky alebo kruhové oblúky – má skutočne vždy hodnotu, akú by sme očakávali.

4.6 Krivkové integrály a primitívne funkcie

Primitívne funkcie možno pre funkcie komplexnej premennej definovať obdobne ako v reálnej analýze.

Definícia 4.6.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Hovoríme, že funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ je *primitívnou funkciou* k funkcii f na oblasti S, ak je funkcia F na množine S holomorfná, pričom pre všetky $z \in S$ je $F'(z) = f(z)$.

Dokážeme teraz tvrdenie o vzťahu krivkových integrálov a primitívnych funkcií, ktoré je obdobou základnej vety diferenciálneho a integrálneho počtu pre funkcie komplexnej premennej. Preto sa tiež niekedy nazýva *základnou vetou o krivkových integráloch* – toto pomenovanie je však relatívne zavádzajúce, keďže nasledujúca veta nedosahuje význam Cauchyho integrálnej vety, ktorú dokážeme v nasledujúcej kapitole a ktorá je skutočným základným kameňom komplexnej analýzy.

Veta 4.6.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia, ku ktorej na S existuje primitívna funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

Pre uzavretú *po častiach hladkú krivku γ teda špeciálne*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Nech sú predpoklady vety splnené. Predpokladajme najprv, že je krivka γ hladká. Keďže je funkcia F holomorfná na oblasti $S \supseteq \gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$ a funkcia γ je na intervale $[\alpha, \beta]$ diferencovateľná, je – podľa vety 2.5.5 o derivácii zloženej funkcie – funkcia $F \circ \gamma$ diferencovateľná na $[\alpha, \beta]$ a pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t);$$

táto derivácia je navyše na $[\alpha, \beta]$ spojitá, pretože sú spojité funkcie γ, γ' a $F' = f$. Zisťujeme teda, že

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}(F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t + i \int_\alpha^\beta \operatorname{Im}(F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= [\operatorname{Re}(F \circ \gamma)(t)]_{t=\alpha}^\beta + i\,[\operatorname{Im}(F \circ \gamma)(t)]_{t=\alpha}^\beta = \\
&= (\operatorname{Re} F(\gamma(\beta)) - \operatorname{Re} F(\gamma(\alpha))) + i\,(\operatorname{Im} F(\gamma(\beta)) - \operatorname{Im} F(\gamma(\alpha))) = \\
&= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).
\end{aligned}$$

Pre po častiach hladkú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ existuje kladné prirodzené číslo n a hladké krivky $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}, \ldots, \gamma_n\colon [\alpha_n, \beta_n] \to \mathbb{C}$ také, že

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n.$$

Špeciálne teda $\gamma(\alpha) = \gamma_1(\alpha_1)$, $\gamma(\beta) = \gamma_n(\beta_n)$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ platí $\gamma_k(\beta_k) = \gamma_{k+1}(\alpha_{k+1})$. Z dôsledku 4.4.2 a z vyššie dokázaného tvrdenia pre hladké krivky potom dostávame

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n (F(\gamma_k(\beta_k)) - F(\gamma_k(\alpha_k))) = \\
&= F(\gamma_n(\beta_n)) - F(\gamma_1(\alpha_1)) + \sum_{k=1}^{n-1} (F(\gamma_k(\beta_k)) - F(\gamma_{k+1}(\alpha_{k+1}))) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)),
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Z dokázanej základnej vety o krivkových integráloch vyplýva, že pokiaľ k spojitej funkcii f existuje na oblasti S primitívna funkcia, závisia krivkové integrály tejto funkcie iba na počiatočnom a koncovom bode integračnej krivky. Táto nezávislosť integrálu od integračnej krivky je dokonca existencii primitívnej funkcie ekvivalentná, ako ukazuje nasledujúca veta.

Veta 4.6.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *K funkcii f existuje na oblasti S primitívna funkcia.*

(*ii*) *Pre všetky dvojice po častiach hladkých kriviek $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ takých, že $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ a $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_2)$ je*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(*iii*) *Pre všetky uzavreté po častiach hladké krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ také, že $\gamma^* \subseteq S$ je*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

V prípade platnosti týchto ekvivalentných tvrdení navyše môže byť primitívna funkcia k f na S daná pre všetky $z \in S$ ako

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s pevným počiatočným bodom $z_0 \in S$ nezávislým od z a s koncovým bodom z taká, že $\gamma^* \subseteq S$.

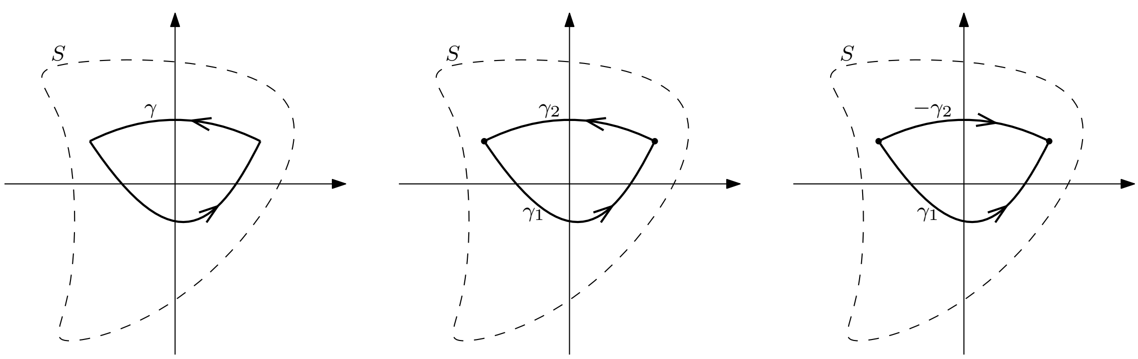
Dôkaz. Implikácia „$(i) \Rightarrow (ii)$“ je dôsledkom vety 4.6.2. Dokážeme implikáciu „$(ii) \Rightarrow (iii)$“. Nech platí tvrdenie (ii) a $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavretá po častiach hladká krivka. Zvoľme bod $\mu \in [\alpha, \beta]$ ľubovoľne a označme $\gamma_1 := \gamma \restriction [\alpha, \mu]$ a $\gamma_2 := \gamma \restriction [\mu, \beta]$ (obrázok 4.5). Potom γ_1 a $-\gamma_2$ sú krivky spĺňajúce podmienky tvrdenia (ii), a teda

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Keďže $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, z tvrdenia 4.4.1 vyplýva

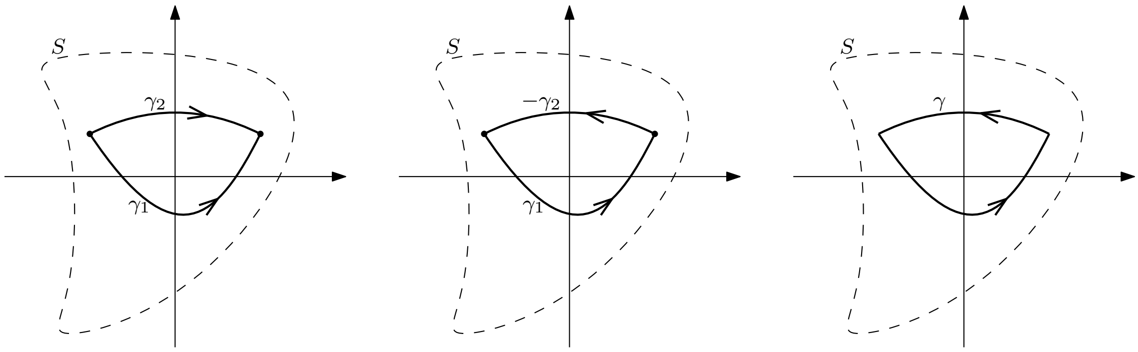
$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

čím je implikácia dokázaná.



(a) Uzavretá krivka γ. **(b)** Rozdelenie krivky γ na dve. **(c)** Výsledná dvojica kriviek.

Obr. 4.5: Situácia z dôkazu implikácie „$(ii) \Rightarrow (iii)$“.



(a) Krivky γ_1 a γ_2. **(b)** Zmena orientácie krivky γ_2. **(c)** Výsledná uzavretá krivka.

Obr. 4.6: Situácia z dôkazu implikácie „$(iii) \Rightarrow (ii)$“.

Opačnú implikáciu „$(iii) \Rightarrow (ii)$“ dokážeme podobným spôsobom. Nech platí tvrdenie (iii) a nech $\gamma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ sú po častiach hladké krivky také, že $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ a $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_2)$. Položme $\gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$ (obrázok 4.6). Z platnosti tvrdenia (iii) a z tvrdenia 4.4.1 potom

$$0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

z čoho už priamo dostávame

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Zostáva dokázať implikáciu „$(ii) \Rightarrow (i)$“. Predpokladajme, že platí tvrdenie (ii), zvoľme pevné $z_0 \in S$ a definujme funkciu $F\colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ predpisom

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s počiatočným bodom z_0 a koncovým bodom z spĺňajúca $\gamma^* \subseteq S$. Dokážeme, že funkcia F je na S holomorfná, pričom pre všetky $z \in S$ je $F'(z) = f(z)$. Zvoľme pevne $z \in S$. Z predpokladu platnosti tvrdenia (ii) a z tvrdenia 4.4.1 vyplýva, že pre všetky $h \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $D(z,h) \subseteq S$ je

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma(h)} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde $\gamma(h)$ je nejaká krivka s počiatočným bodom z a koncovým bodom $z+h$ spĺňajúca $\gamma(h)^* \subseteq S$. Pre túto krivku tiež vďaka tvrdeniu (ii) platí

$$\int_{\gamma(h)} \mathrm{d}w = \int_{[z,z+h]} \mathrm{d}w = \int_0^1 h\,\mathrm{d}t = h.$$

Preto

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma(h)} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{\gamma(h)} \mathrm{d}w\right) = \frac{1}{h}\int_{\gamma(h)} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w. \tag{4.2}$$

Zo spojitosti funkcie f v bode z vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ kedykoľvek $|w - z| < \delta$. Z tvrdenia (ii) a z vety 4.5.1 potom pre h spĺňajúce $D(z,h) \subseteq S$ a $|h| < \delta$ vyplýva

$$\left|\int_{\gamma(h)} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w\right| < \varepsilon|h|,$$

z čoho dosadením do (4.2) pre takéto h dostávame

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\frac{\varepsilon|h|}{|h|}=\varepsilon,$$

v dôsledku čoho

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z).$$

Funkcia F je teda skutočne v bode z diferencovateľná a $F'(z)=f(z)$, čo bolo treba dokázať. $\square$

Poznámka 4.6.4. V situáciách, keď sú pre funkciu f na oblasti S splnené ekvivalentné podmienky z predchádzajúcej vety, sa niekedy používa notácia

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s $\gamma^*\subseteq S$, počiatočným bodom a a koncovým bodom b. My túto notáciu – najmä kvôli hroziacej zámene s integrálom funkcie reálnej premennej – používať nebudeme.

Poznámka 4.6.5. V nasledujúcej kapitole dokážeme jednu z najdôležitejších viet komplexnej analýzy – tzv. *Cauchyho integrálnu vetu*. Tú možno interpretovať ako vetu hovoriacu o relatívne ľahko overiteľnej *postačujúcej* podmienke platnosti ekvivalentných tvrdení z vety 4.6.3; pôjde tak vlastne o akúsi „praktickú verziu“ tejto vety.

Cvičenia

1. Dokážte, že obraz γ^* krivky $\gamma\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ je vždy kompaktná množina.

2. Vypočítajte

   $$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$$

   pre:

   a) $\gamma=\kappa(0,1)$,
   b) $\gamma=\kappa_{[-\pi/2,\pi/2]}(0,1)$,
   c) $\gamma=[-i,1]+[1,0]$,
   d) $\gamma=[0,-i]$.

3. Nech $\gamma=[-1,1]+[1,i]+[i,-1]$. Vypočítajte:

   a) $\int_\gamma e^z\,\mathrm{d}z$,
   b) $\int_\gamma \cos z\,\mathrm{d}z$.

4. Použite základnú vetu o krivkových integráloch na dôkaz, že neexistuje funkcia prirodzeného logaritmu, ktorá by bola holomorfná na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

5. Zhora odhadnite absolútnu hodnotu integrálov:

   a) $\int_{[1,2+2i]}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$,
   b) $\int_{\kappa(3i,1)}\frac{e^z}{(z+i)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$.

Kapitola 5

Cauchyho integrálna veta I

Minulú kapitolu sme zakončili dôkazom základnej vety o krivkových integráloch, podľa ktorej je pre spojitú funkciu f rovnosť

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{5.1}$$

splnená pre všetky uzavreté po častiach hladké krivky γ v oblasti S práve vtedy, keď k funkcii f existuje na S primitívna funkcia. Tieto podmienky sú navyše ekvivalentné, pre ľubovoľné dva pevne dané body v S, nezávislosti krivkových integrálov funkcie f od voľby integračnej krivky γ s obrazom v S spájajúcej tieto dva body.

Dokázať existenciu primitívnej funkcie nemusí byť vždy úplne jednoduché. V nasledujúcom preto dokážeme *Cauchyho integrálnu vetu* (pre jednoducho súvislú oblasť), ktorá nám poskytne postačujúcu podmienku platnosti uvedených troch ekvivalentných tvrdení – vďaka nej budeme môcť usúdiť na platnosť rovnosti (5.1) pre všetky uzavreté krivky v oblasti S iba na základe holomorfnosti funkcie f na S a „veľmi jednoduchej" topologickej vlastnosti oblasti S. Na overenie rovnosti (5.1) teda zvyčajne stačí dokázať holomorfnosť funkcie f, čo je typicky omnoho jednoduchšie, než priamy dôkaz existencie primitívnej funkcie.

K „ozajstnej" Cauchyho integrálnej vete – čiže k jej verzii pre jednoducho súvislú oblasť – sa ale budeme dopracúvať postupne. Dokážeme najprv dve slabšie verzie Cauchyho integrálnej vety, ktoré majú charakter viac-menej pomocných výsledkov: Cauchyho integrálnu vetu pre trojuholník a Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť. Následne s pomocou topologického pojmu homotópie prejdeme od konvexných oblastí k ľubovoľným jednoducho súvislým oblastiam (intuitívne oblastiam „bez dier"). V kapitole 10 neskôr dokážeme ešte jeden všeobecnejší variant Cauchyho integrálnej vety; verzia pre jednoducho súvislú oblasť však bude pre praktické účely plne postačujúca.

5.1 Cauchyho integrálna veta pre trojuholník

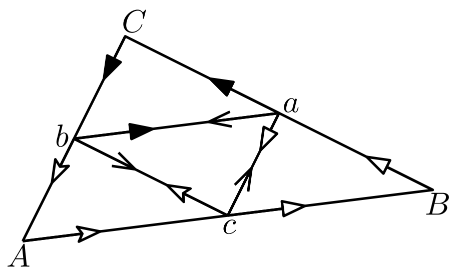
Pod *trojuholníkom* budeme chápať, v súlade so zdravým rozumom, ľubovoľnú uzavretú krivku γ v tvare (hoci aj degenerovaného) trojuholníka – teda krivku $\gamma = \triangle ABC := [A, B] + [B, C] + [C, A]$, kde $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Tvrdenie 5.1.1 (Cauchyho integrálna veta pre trojuholník)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť obsahujúca trojuholník γ a celé jeho vnútro. Nech $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Trojuholník γ nahradíme menším trojuholníkom γ_N takým, že hodnota integrálu funkcie f pozdĺž γ_N je oproti hodnote pôvodného integrálu „nezanedbateľná“ a súčasne je na tomto trojuholníku funkcia f aproximovateľná vhodnou lineárnou funkciou. Pre lineárne funkcie existuje primitívna funkcia na celom $\mathbb{C}$; integrál aproximujúcej lineárnej funkcie pozdĺž γ_N tak bude nulový vďaka základnej vete o krivkových integráloch. Integrál pôvodnej funkcie f pozdĺž γ_N tak bude mať hodnotu blízku nule, pričom miera tejto blízkosti bude úmerná kvalite aproximácie. Keďže je však hodnota tohto integrálu oproti pôvodnému integrálu „nezanedbateľná“, budeme môcť aj hodnotu pôvodného integrálu zhora odhadnúť stále menším a menším číslom, úmerne kvalite aproximácie. Tým dokážeme jeho nulovosť.

Presnejšie: pre degenerovaný trojuholník γ je dokazované tvrdenie zrejmé. Predpokladajme teda, že je trojuholník γ nedegenerovaný a položme $\gamma_0 := \gamma$. Predpokladajme ďalej, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ máme daný trojuholník $\gamma_n = \triangle ABC$, kde $A, B, C \in \mathbb{C}$ sú tri nekolineárne body. Označme stredy úsečiek $[A, B]$, $[B, C]$ a $[C, A]$ ako c, a, resp. b. Uvažujme trojuholníky $\gamma_{n+1}[0] := \triangle abc$, $\gamma_{n+1}[1] := \triangle Acb$, $\gamma_{n+1}[2] := \triangle Bac$ a $\gamma_{n+1}[3] := \triangle Cba$. Táto situácia je znázornená na obrázku 5.1.



Obr. 5.1: Rozdelenie trojuholníka $\triangle ABC$ na štyri menšie trojuholníky.

Keďže na pravej strane nasledujúcej rovnosti integrujeme pozdĺž každej zo strán „vnútorného“ trojuholníka $\gamma_{n+1}[0]$ obidvoma smermi práve raz, je

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{3} \int_{\gamma_{n+1}[k]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nutne preto musí existovať $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ také, že

$$\left| \int_{\gamma_{n+1}[k]} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right|;$$

trojuholník $\gamma_{n+1}[k]$ označme ako γ_{n+1}.

Takto dostávame postupnosť trojuholníkov $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Platí $\gamma_0 = \gamma$.

2. Označme pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako Δ_n kompaktnú množinu s hranicou γ_n – čiže uzáver vnútra trojuholníka γ_n. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$.

3. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $L(\gamma_n) = 2^{-n} L(\gamma)$.

4. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je
$$\left| \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq 4^{-n} \left| \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \right|. \tag{5.2}$$

Zvoľme teraz ľubovoľný bod[1] $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. Funkcia f je v bode z_0 diferencovateľná – pre všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(z_0, \delta)$ je

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

z čoho

$$\left| f(z) - (f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)) \right| < \varepsilon \, |z - z_0| \,. \tag{5.3}$$

Ak teraz zvolíme $N \in \mathbb{N}$ také, že $\Delta_N \subseteq D(z_0, \delta)$, pre všetky $z \in \Delta_N$ zrejme

$$|z - z_0| \le L(\gamma_N) = 2^{-N} L(\gamma)$$

a z (5.3) tak dostávame

$$\left| f(z) - \big(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \big) \right| < \varepsilon 2^{-N} L(\gamma).$$

Zo základnej vety o krivkových integráloch navyše

$$\int_{\gamma_N} \big(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \big) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Ak teda na integrál funkcie f pozdĺž γ_N použijeme vetu o odhade, zisťujeme, že

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N} f(z) \, \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\gamma_N} \big(f(z) - \big(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \big) \big) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_N} \big(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \big) \, \mathrm{d}z \right| = \\ &= \left| \int_{\gamma_N} \big(f(z) - \big(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \big) \big) \, \mathrm{d}z \right| \le \varepsilon 2^{-N} L(\gamma) L(\gamma_N) = \varepsilon 4^{-N} L(\gamma)^2. \end{aligned}$$

Podľa (5.2) teda

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \le 4^N \left| \int_{\gamma_N} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \le \varepsilon L(\gamma)^2;$$

keďže je $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, nutne

$$\int_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

a Cauchyho integrálna veta pre trojuholník je dokázaná. □

5.2 Cauchyho integrálna veta pre konvexnú oblasť

Rozšírime teraz Cauchyho integrálnu vetu na prípad ľubovoľnej uzavretej po častiach hladkej krivky obsiahnutej v nejakej *konvexnej* oblasti S. Konvexné oblasti sú pritom definované bežným spôsobom.

Definícia 5.2.1. Oblasť $S \subseteq \mathbb{C}$ je *konvexná*, ak pre všetky $u, v \in S$ je $[u, v]^* \subseteq S$.

Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť dokážeme tak, že nahliadneme existenciu primitívnej funkcie pre všetky holomorfné funkcie na takejto oblasti. Využijeme pritom Cauchyho integrálnu vetu pre trojuholník a podobné techniky ako v dôkaze vety 4.6.3.

[1] Pre každé $n \in \mathbb{N}$ zvoľme $w_n \in \Delta_n$. Postupnosť $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená a podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety z nej tak možno vybrať konvergentnú podpostupnosť. Keďže je množina Δ_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$ uzavretá a $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$, musí byť limita tejto podpostupnosti prvkom všetkých množín Δ_n – môžeme ju teda vziať za naše z_0.

Lema 5.2.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia taká, že pre ľubovoľný trojuholník γ s $\gamma^* \subseteq S$ je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

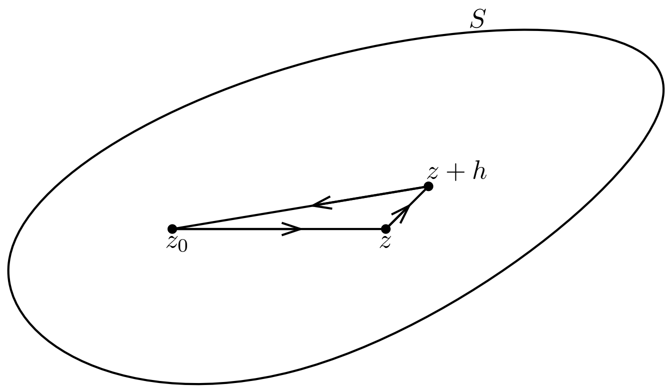
Pre ľubovoľné pevné $z_0 \in S$ je potom funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$, daná pre všetky $z \in S$ ako

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

holomorfná na S, pričom $F' = f$.

Dôkaz. Zvoľme $z \in S$. Ukážeme, že funkcia F je v bode z diferencovateľná a $F'(z) = f(z)$.

Pre všetky $h \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $z + h \in S$ musí do konvexnej oblasti S patriť celý trojuholník $\gamma = \triangle z_0 z(z+h)$; táto situácia je znázornená na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Trojuholník $\gamma = \triangle z_0 z(z+h)$.

Z predpokladu lemy vyplýva

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0,$$

z čoho

$$\int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w,$$

a teda

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Preto

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left(\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{[z,z+h]} \mathrm{d}w\right) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w.$$

Zo spojitosti funkcie f v bode z ale vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\delta)$ je $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Pre h s $|h| < \delta$ teda z vety o odhade dostávame

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w\right| < \frac{\varepsilon|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Preto

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

a funkcia F má v bode z skutočne deriváciu $f(z)$. □

Dôsledok 5.2.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom existuje funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná na S taká, že $F' = f$.*

Dôkaz. Z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník vyplýva, že pre každú funkciu f holomorfnú na S sú splnené predpoklady lemy 5.2.2. □

Môžeme teraz sformulovať samotnú Cauchyho integrálnu vetu pre konvexnú oblasť – stále však pôjde o výsledok viac-menej predbežný.

Tvrdenie 5.2.4 (Cauchyho integrálna veta pre konvexnú oblasť)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je konvexná oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre každú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq S$ je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z dôsledku 5.2.3 a zo základnej vety o krivkových integráloch. □

5.3 Homotópie

Možnosti použitia Cauchyho integrálnej vety pre konvexné oblasti sú trochu obmedzené – často totiž vzniká potreba integrovať funkciu pozdĺž krivky v oblasti, ktorá konvexná nie je. Rozšíriť Cauchyho integrálnu vetu na prípad iných ako konvexných oblastí ale budeme môcť až po tom, čo preskúmame deformácie kriviek a pôvodne topologický koncept *homotópie* pre špeciálny prípad parametrických kriviek v komplexnej rovine.

Homotópie kriviek najprv definujeme všeobecne pre *ľubovoľnú* dvojicu parametrických kriviek – pôjde pritom o zobrazenia udávajúce *spojitú transformáciu* jednej krivky na druhú. Neskôr nás ale homotópie budú zaujímať predovšetkým v prípadoch, keď uvažované krivky navyše spĺňajú nejakú ďalšiu vlastnosť: najčastejšie budeme pracovať s homotópiami po častiach hladkých kriviek, ktoré sú buď uzavreté, alebo majú rovnaké počiatočné a koncové body. Pre každú z týchto vlastností neskôr upravíme definíciu homotópií tak, aby príslušnú vlastnosť mali aj krivky získané ako medzivýsledky spojitej transformácie, ktorá je homotópiou určená.

Definícia 5.3.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sú krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že krivky γ a $\hat{\gamma}$ sú *homotopické* v S, ak existuje zobrazenie $H\colon [0,1] \times [\alpha,\beta] \to S$ spĺňajúce nasledujúce podmienky:

(i) Zobrazenie H je spojité: pre všetky $(\tau_0, t_0) \in [0,1] \times [\alpha,\beta]$ a všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $(\tau, t) \in [0,1] \times [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau - \tau_0| < \delta$ a $|t - t_0| < \delta$ je $|H(\tau,t) - H(\tau_0,t_0)| < \varepsilon$.

(ii) Pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ je $H(0,t) = \gamma(t)$ a $H(1,t) = \hat{\gamma}(t)$.

Takéto zobrazenie H nazývame *homotópiou* z γ na $\hat{\gamma}$.

Nasledujúce dve tvrdenia sú bezprostrednými dôsledkami faktu, že homotópie sú spojitými zobrazeniami na kompaktnej podmnožine $[0,1] \times [\alpha,\beta]$ metrického priestoru $\mathbb{R}^2$. Uvádzame ich však aj s elementárnymi dôkazmi, ktoré znalosť teórie metrických priestorov nepredpokladajú.

Tvrdenie 5.3.2. *Každá homotópia $H\colon [0,1] \times [\alpha,\beta] \to S$, kde $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, je* rovnomerne spojitá. *Pre všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ a $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ a $|t_1 - t_2| < \delta$ je $|H(\tau_2,t_2) - H(\tau_1,t_1)| < \varepsilon$.*

Dôkaz. Za účelom sporu predpokladajme, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $\delta > 0$ možno nájsť $\tau_{1,\delta}, \tau_{2,\delta} \in [0,1]$ a $t_{1,\delta}, t_{2,\delta} \in [\alpha,\beta]$ s $|\tau_{1,\delta} - \tau_{2,\delta}| < \delta$, $|t_{1,\delta} - t_{2,\delta}| < \delta$ a $|H(\tau_{2,\delta}, t_{2,\delta}) - H(\tau_{1,\delta}, t_{1,\delta})| \geq \varepsilon$. Z Bolzanovej-Weierstrassovej vety potom vyplýva existencia rastúcej postupnosti $(n_k)_{k=0}^\infty$ kladných prirodzených čísel takej, že všetky štyri postupnosti $(\tau_{1,1/n_k})_{k=0}^\infty$, $(\tau_{2,1/n_k})_{k=0}^\infty$, $(t_{1,1/n_k})_{k=0}^\infty$ a $(t_{2,1/n_k})_{k=0}^\infty$

konvergujú k vlastnej limite. Keďže sú obidva intervaly $[0,1]$ a $[\alpha,\beta]$ uzavreté a pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $|\tau_{1,1/n_k} - \tau_{2,1/n_k}| < 1/n_k$ a $|t_{1,1/n_k} - t_{2,1/n_k}| < 1/n_k$, zisťujeme, že existujú $\tau_0 \in [0,1]$ a $t_0 \in [\alpha,\beta]$ také, že

$$\tau_0 = \lim_{k\to\infty} \tau_{1,1/n_k} = \lim_{k\to\infty} \tau_{2,1/n_k} \tag{5.4}$$

a

$$t_0 = \lim_{k\to\infty} t_{1/n_k} = \lim_{k\to\infty} t_{2,1/n_k}. \tag{5.5}$$

Zo spojitosti homotópie H vyplýva existencia čísla $\delta > 0$ takého, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau - \tau_0| < \delta$ a $|t - t_0| < \delta$ je $|H(\tau,t) - H(\tau_0,t_0)| < \varepsilon/2$. Z toho vyplýva, že aj pre všetky $\tau_1,\tau_2 \in [0,1]$ a $t_1,t_2 \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau_1 - \tau_0| < \delta$, $|\tau_2 - \tau_0| < \delta$, $|t_1 - t_0| < \delta$ a $|t_2 - t_0| < \delta$ musí byť

$$\begin{aligned}|H(\tau_2,t_2) - H(\tau_1,t_1)| &= |H(\tau_2,t_2) - H(\tau_0,t_0) + H(\tau_0,t_0) - H(\tau_1,t_1)| \leq \\ &\leq |H(\tau_2,t_2) - H(\tau_0,t_0)| + |H(\tau_0,t_0) - H(\tau_1,t_1)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Pre dostatočne veľké $k \in \mathbb{N}$ ale vďaka (5.4) a (5.5) iste $|\tau_{1,1/n_k} - \tau_0| < \delta$, $|\tau_{2,1/n_k} - \tau_0| < \delta$, $|t_{1,1/n_k} - t_0| < \delta$ a $|t_{2,1/n_k} - t_0| < \delta$, pričom

$$|H(\tau_{2,1/n_k}, t_{2,1/n_k}) - H(\tau_{1,1/n_k}, t_{1,1/n_k})| \geq \varepsilon;$$

to odporuje pozorovaniu učinenému vyššie. □

Tvrdenie 5.3.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $H\colon [0,1] \times [\alpha,\beta] \to S$ homotópia. Obraz $H([0,1] \times [\alpha,\beta])$ homotópie H je potom* kompaktná *podmnožina množiny S.*

Dôkaz. Nech $a \in \mathbb{C}$ je hromadný bod množiny $H([0,1] \times [\alpha,\beta])$. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ potom existuje nejaké $z_n \in H([0,1] \times [\alpha,\beta]) \cap D'(a,1/n)$. Existujú pritom $\tau_n \in [0,1]$ a $t_n \in [\alpha,\beta]$ také, že $z_n = H(\tau_n,t_n)$. Z Bolzanovej-Weierstrassovej vety vyplýva existencia rastúcej postupnosti $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ kladných prirodzených čísel takej, že postupnosti $(\tau_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ a $(t_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ konvergujú k vlastným limitám τ_0 resp. t_0. Vďaka uzavretosti intervalov $[0,1]$ a $[\alpha,\beta]$ iste $\tau_0 \in [0,1]$ a $t_0 \in [\alpha,\beta]$. Dokážeme, že $H(\tau_0,t_0) = a$ – keďže je a ľubovoľný hromadný bod množiny $H([0,1] \times [\alpha,\beta])$, bude tým dokázaná *uzavretosť* tejto množiny.

Za účelom sporu predpokladajme, že $H(\tau_0,t_0) = b \neq a$. Keďže je zobrazenie H spojité, existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau - \tau_0| < \delta$ a $|t - t_0| < \delta$ je

$$|H(\tau,t) - H(\tau_0,t_0)| = |H(\tau,t) - b| < \frac{|b-a|}{2}.$$

Pre dostatočne veľké $k \in \mathbb{N}$ je ale súčasne $|\tau_{n_k} - \tau_0| < \delta$, $|t_{n_k} - t_0| < \delta$ a $1/n_k < |b-a|/2$. Nutne teda

$$|H(\tau_{n_k}, t_{n_k}) - a| = |z_{n_k} - a| < \frac{|b-a|}{2},$$

pričom súčasne

$$|H(\tau_{n_k}, t_{n_k}) - b| < \frac{|b-a|}{2}.$$

Z trojuholníkovej nerovnosti ale potom dostávame

$$|b-a| \leq |H(\tau_{n_k}, t_{n_k}) - a| + |H(\tau_{n_k}, t_{n_k}) - b| < |b-a|,$$

čo je evidentný spor. Množina $H([0,1] \times [\alpha,\beta])$ je teda *uzavretá.*

Zostáva dokázať *ohraničenosť* množiny $H([0,1] \times [\alpha,\beta])$. Za účelom sporu predpokladajme, že je táto množina neohraničená a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ tak vieme nájsť $z_n \in H([0,1] \times [\alpha,\beta])$ také, že $|z_n| \geq n$. Nech $\tau_n \in [0,1]$ a $t_n \in [\alpha,\beta]$ sú také, že $z_n = H(\tau_n,t_n)$. Z Bolzanovej-Weierstrassovej vety opäť dostávame existenciu rastúcej postupnosti $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ kladných prirodzených čísel takej, že postupnosti

$(\tau_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ a $(t_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ konvergujú k vlastným limitám τ_0 resp. t_0, pričom vďaka uzavretosti intervalov $[0,1]$ a $[\alpha,\beta]$ je $\tau_0 \in [0,1]$ a $t_0 \in [\alpha,\beta]$. Označme $b = H(\tau_0, t_0)$. Zo spojitosti funkcie H potom vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|\tau - \tau_0| < \delta$ a $|t - t_0| < \delta$ je

$$|H(\tau,t) - H(\tau_0,t_0)| = |H(\tau,t) - b| < \varepsilon.$$

Pre dostatočne veľké $k \in \mathbb{N}$ ale zrejme $|\tau_{n_k} - \tau_0| < \delta$ a $|t_{n_k} - t_0| < \delta$, kým

$$|H(\tau_{n_k}, t_{n_k}) - b| = |z_{n_k} - b| \geq \varepsilon,$$

čím prichádzame k hľadanému sporu. □

Homotópie udávajú spojitú transformáciu jednej krivky na druhú – v nasledujúcom ukážeme, že aj všetky medzivýsledky tejto transformácie, získané zafixovaním prvého parametra homotópie, sú tiež krivkami, t. j. *spojitými* zobrazeniami z intervalu $[\alpha,\beta]$ do $\mathbb{C}$. Pre všetky homotópie $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta] \to S$ a $\tau \in [0,1]$ budeme ako H_τ označovať zobrazenie $H_\tau\colon [\alpha,\beta] \to S$ dané pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ ako $H_\tau(t) = H(\tau,t)$.

Tvrdenie 5.3.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, nech $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sú krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$ a nech $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta] \to S$ je homotópia z γ na $\hat{\gamma}$. Pre všetky $\tau \in [0,1]$ je potom aj $H_\tau\colon [\alpha,\beta] \to S$ krivka v oblasti S.*

Dôkaz. Zo spojitosti homotópie špeciálne vyplýva, že všetky $t_0 \in [\alpha,\beta]$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ spĺňajúce $|t - t_0| < \delta$ je

$$|H_\tau(t) - H_\tau(t_0)| = |H(\tau,t) - H(\tau,t_0)| < \varepsilon.$$

Zobrazenie $H_\tau\colon [\alpha,\beta] \to S$ je preto spojité – ide teda o krivku v S. □

Jednoduchý dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Tvrdenie 5.3.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Relácia „byť homotopický v S“ je reláciou ekvivalencie na množine všetkých kriviek s obrazmi pod S.*

Pre po častiach hladké krivky budeme od homotópií navyše vyžadovať, aby aj všetky medzivýsledky príslušnej spojitej transformácie boli po častiach hladké krivky.

Definícia 5.3.6. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sú po častiach hladké krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že γ a $\hat{\gamma}$ sú *homotopické* v S ako po častiach hladké krivky, ak existuje homotópia $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta] \to S$ taká, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ je $H_\tau\colon [\alpha,\beta] \to S$ po častiach hladká krivka. Takúto homotópiu H nazývame *homotópiou po častiach hladkých kriviek* z γ na $\hat{\gamma}$.

Ak sú ďalej krivky $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ uzavreté, budeme aj od homotópií vyžadovať, aby boli všetky medzivýsledky uzavretými krivkami; pre po častiach hladké uzavreté krivky prirodzene pridávame aj požiadavku, aby boli medzivýsledky po častiach hladké.

Definícia 5.3.7. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sú uzavreté (po častiach hladké) krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že γ a $\hat{\gamma}$ sú *homotopické* v S ako uzavreté (po častiach hladké) krivky, ak existuje homotópia $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta] \to S$ taká, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ je $H_\tau\colon [\alpha,\beta] \to S$ uzavretá (po častiach hladká) krivka. Takúto homotópiu H nazývame *homotópiou uzavretých* (*po častiach hladkých*) *kriviek* z γ na $\hat{\gamma}$.

Pre krivky $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi napokon tiež uvažujeme homotópie, pre ktoré majú túto vlastnosť aj všetky medzivýsledky spojitej transformácie.

Definícia 5.3.8. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú (po častiach hladké) krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha)$ a $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$. Hovoríme, že γ a $\hat{\gamma}$ sú *homotopické* v S ako (po častiach hladké) krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi, ak existuje homotópia $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to S$ taká, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ je $H_\tau\colon [\alpha, \beta] \to S$ (po častiach hladká) krivka spĺňajúca $H_\tau(\alpha) = \gamma(\alpha)$ a $H_\tau(\beta) = \gamma(\beta)$. Takúto homotópiu H nazývame *homotópiou (po častiach hladkých) kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi* z γ na $\hat{\gamma}$.

Čitateľ určite ľahko dokáže, že aj práve definované silnejšie varianty homotopickosti určujú relácie ekvivalencie na príslušných množinách kriviek s obrazmi pod S.

Podmienka z predchádzajúcich definícií, podľa ktorej musí byť interval parametrov $[\alpha, \beta]$ pre obidve homotopické krivky rovnaký, je čisto technická a v skutočnosti sa často hovorí aj o homotopických dvojiciach kriviek, pre ktoré sú tieto intervaly rôzne. Každú dvojicu kriviek totiž môžeme reparametrizovať tak, aby boli výsledné intervaly parametrov pre obidve krivky rovnaké. Nasledujúce tvrdenie, ktorého dôkaz prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie, túto bežnú prax do veľkej miery ospravedlňuje.

Tvrdenie 5.3.9. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\gamma_1, \gamma_2\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú (po častiach hladké) krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi], homotopické v S ako (po častiach hladké) krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi]. Nech $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ sú reálne čísla a $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ sú krivky také, že pre všetky $t \in [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ je*

$$\hat{\gamma}_1(t) = \gamma_1\left(\alpha + \frac{t - \hat{\alpha}}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}(\beta - \alpha)\right) \qquad a \qquad \hat{\gamma}_2(t) = \gamma_2\left(\alpha + \frac{t - \hat{\alpha}}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}(\beta - \alpha)\right).$$

Potom sú krivky $\hat{\gamma}_1$ a $\hat{\gamma}_2$ homotopické v S ako (po častiach hladké) krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi].

Hoci sú uvedené definície homotópií ako spojitých transformácií v topológii bežné, pre naše neskoršie účely bude vhodnejší iný pohľad na homotopické krivky, založený na nasledujúcom pojme *elementárnej deformácie*.

Definícia 5.3.10. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}$ sú krivky také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Hovoríme, že krivka $\hat{\gamma}$ vznikne z krivky γ *elementárnou deformáciou* v S, ak existuje $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ a krivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

(*i*) $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 + \ldots + \hat{\gamma}_n$.

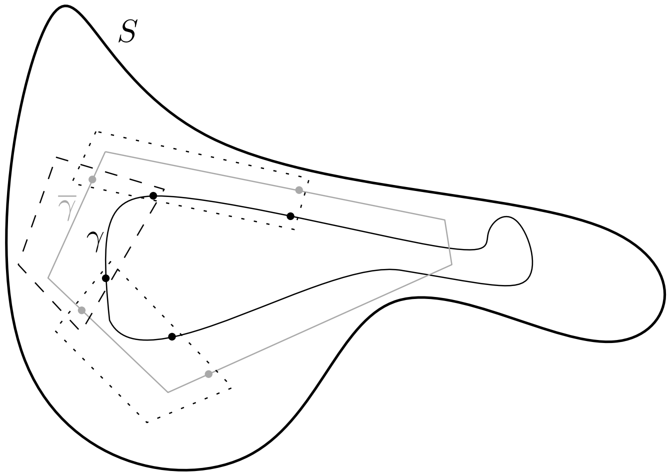
(*ii*) Pre $k = 1, \ldots, n$ existuje *konvexná* oblasť $S_k \subseteq S$ taká, že $\gamma_k^*, \hat{\gamma}_k^* \subseteq S_k$.

Ak sú obidve krivky $\gamma, \hat{\gamma}$ po častiach hladké (resp. uzavreté, prípadne s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi), hovoríme o elementárnej deformácii po častiach hladkých kriviek (resp. uzavretých kriviek, prípadne kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi).

Krivka $\hat{\gamma}$ teda vznikne z krivky γ elementárnou deformáciou v S, ak vieme nájsť „reťaz" konvexných podoblastí S takých, že obidve krivky γ a $\hat{\gamma}$ postupne prechádzajú cez tieto konvexné podoblasti a sú nimi úplne pokryté. To je znázornené na obrázku 5.3.

Poznámka 5.3.11. V praxi nám zvyčajne nezáleží na počiatočno-koncovom bode $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ uzavretej krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a podmienku (*ii*) predchádzajúcej definície tak pre uzavreté krivky v konečnom dôsledku nahrádzame podmienkou $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1} \in \mathrm{Rot}(\gamma)$ a $\overline{\gamma}_0 + \ldots + \overline{\gamma}_{n-1} \in \mathrm{Rot}(\overline{\gamma})$, kde pre každú uzavretú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je $\mathrm{Rot}(\gamma) = \{(\gamma \restriction [\mu, \beta]) + (\gamma \restriction [\alpha, \mu]) \mid \mu \in [\alpha, \beta]\}$. Integrály pozdĺž kriviek v $\mathrm{Rot}(\gamma)$ ale majú očividne rovnakú hodnotu ako integrál pozdĺž γ; nedopúšťame sa teda žiadnej zásadnej chyby.

Nasledujúca veta charakterizuje homotopické krivky pomocou elementárnych deformácií – tohto pohľadu na homotopické krivky sa neskôr budeme držať pri dôkaze Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť.



Obr. 5.3: Elementárna deformácia uzavretej krivky γ na uzavretú krivku $\hat{\gamma}$ (znázornené sú len tri konvexné podoblasti).

Veta 5.3.12. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú (po častiach hladké) krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Potom γ a $\hat{\gamma}$ sú homotopické v S ako (po častiach hladké) krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] práve vtedy, keď $\hat{\gamma}$ vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] v oblasti S.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $\hat{\gamma}$ vznikne z γ jedinou elementárnou deformáciou. Potom existuje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a (po častiach hladké) krivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ a $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$ také, že platí $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = \gamma$ a $\hat{\gamma}_1 + \ldots + \hat{\gamma}_n = \hat{\gamma}$ a pre $k = 1, \ldots, n$ existuje konvexná oblasť $S_k \subseteq S$, pre ktorú $\gamma_k^*, \hat{\gamma}_k^* \subseteq S_k$. Bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladajme, že existujú reálne čísla $\alpha = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ a $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n = \beta$ také, že pre $k = 1, \ldots, n$ sú γ_k a $\hat{\gamma}_k$ zobrazeniami $\gamma_k, \hat{\gamma}_k\colon [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ je $\beta_k = \alpha_{k+1}$. Pre $k = 1, \ldots, n$ teraz definujme zobrazenie $H_k\colon [0,1] \times [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ predpisom

$$H_k(\tau, t) = \gamma_k(t) + \tau(\hat{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t));$$

od bodu $\gamma_k(t)$ teda k bodu $\hat{\gamma}_k(t)$ prechádzame postupne po úsečke; konvexnosť oblasti S_k pritom zaručuje, že pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ je $H_k(\tau, t) \in S_k$. Homotópiu $H\colon [0,1] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ z γ na $\hat{\gamma}$ teraz môžeme pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha, \beta]$ definovať predpisom $H(\tau, t) = H_k(\tau, t)$, kde $k \in \{1, \ldots, n\}$ je také, že $t \in [\alpha_k, \beta_k]$.

Je zrejmé, že H je skutočne homotópiou z γ na $\hat{\gamma}$. Keďže ďalej obraz každého zo zobrazení H_k leží pod S_k, musí obraz H ležať pod S – to dokazuje, že H je homotópia v S. Ľahko tiež vidieť, že ak sú pre $k = 1, \ldots, n$ krivky γ_k a $\hat{\gamma}_k$ po častiach hladké, musí byť pre všetky $\tau \in [0,1]$ po častiach hladká aj krivka $H_{k,\tau}\colon [\alpha_k, \beta_k] \to S$ daná pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ ako $H_{k,\tau}(t) = \gamma_k(t) + \tau(\hat{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t))$; v dôsledku toho je po častiach hladká aj krivka $H_\tau\colon [\alpha, \beta] \to S$ a H je homotópiou po častiach hladkých kriviek. Podobne v prípade uzavretosti kriviek γ a $\hat{\gamma}$ je $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ a $\hat{\gamma}(\alpha) = \hat{\gamma}(\beta)$, z čoho pre všetky $\tau \in [0,1]$ dostávame

$$H_\tau(\alpha) = \gamma(\alpha) + \tau(\hat{\gamma}(\alpha) - \gamma(\alpha)) = \gamma(\beta) + \tau(\hat{\gamma}(\beta) - \gamma(\beta)) = H_\tau(\beta),$$

takže H je homotópiou uzavretých kriviek. Ak napokon $\gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha)$ a $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$, pre všetky $\tau \in [0,1]$ je tiež

$$H_\tau(\alpha) = \gamma(\alpha) + \tau(\hat{\gamma}(\alpha) - \gamma(\alpha)) = \gamma(\alpha)$$

a

$$H_\tau(\beta) = \gamma(\beta) + \tau(\hat{\gamma}(\beta) - \gamma(\beta)) = \gamma(\beta),$$

takže H je homotópiou kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Ak ďalej $\hat{\gamma}\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ vznikne z $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ postupnosťou m elementárnych deformácií (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi], z predchádzajúceho vyplýva, že existujú homotópie $H^{[1]},\dots,H^{[m]}\colon [0,1]\times[\alpha,\beta]\to S$ (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] také, že pre všetky $t\in[\alpha,\beta]$ je $H^{[1]}(0,t)=\gamma(t)$, $H^{[m]}(1,t)=\hat{\gamma}(t)$ a $H^{[\ell]}(1,t)=H^{[\ell+1]}(0,t)$ pre $\ell=1,\dots,m-1$. Potom ale ľahko vidieť, že zobrazenie $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta]\to S$, dané pre všetky $\tau\in[0,1]$ a $t\in[\alpha,\beta]$ ako $H(\tau,t)=H^{[\ell]}(\tau',t)$, kde $\ell\in\{1,\dots,m\}$ je také, že $\tau\in[(\ell-1)/m,\ell/m]$ a $\tau=(\ell-1)/m+\tau'/m$, je homotópiou (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] γ a $\hat{\gamma}$ v oblasti S.

Predpokladajme nakoniec, že $H\colon [0,1]\times[\alpha,\beta]\to S$ je homotópiou (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] v oblasti S z $\gamma\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ na $\hat{\gamma}\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$. Podľa tvrdenia 5.3.3 je obraz homotópie H – čiže množina $H([0,1]\times[\alpha,\beta])$ – kompaktnou podmnožinou T množiny S. Keby navyše ohraničená množina T obsahovala body ľubovoľne blízko množiny $\mathbb{C}\setminus S$, s použitím Bolzanovej-Weierstrassovej vety by sme ľahko našli hromadný bod množiny T, ktorý by bol súčasne prvkom $\mathbb{C}\setminus S$. To by spoločne s uzavretosťou množiny T bolo v spore s inklúziou $T\subseteq S$. Existuje teda $\varepsilon>0$ také, že pre všetky $a\in T$ je $D(a,\varepsilon)\subseteq S$. Podľa tvrdenia 5.3.3 je ďalej homotópia H na $[0,1]\times[\alpha,\beta]$ rovnomerne spojitá. V dôsledku toho existuje $\delta>0$ také, že pre všetky dvojice bodov $(\tau_1,t_1),(\tau_2,t_2)\in[0,1]\times[\alpha,\beta]$ je $|H(\tau_1,t_1)-H(\tau_2,t_2)|<\varepsilon/2$ kedykoľvek súčasne $|\tau_2-\tau_1|<\delta$ a $|t_2-t_1|<\delta$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\delta=1/m$ pre nejaké kladné prirodzené číslo m. „Dostatočne hustým“ konečným pokrytím krivky $H_{k/m}$ okoliami s polomerom ε tak pre $k=0,\dots,m-1$ získavame konvexné oblasti zaručujúce existenciu elementárnej deformácie tejto krivky na krivku $H_{(k+1)/m}$.[2] Krivka $\hat{\gamma}$ teda skutočne vznikne z γ postupnosťou elementárnych deformácií (po častiach hladkých) kriviek [resp. uzavretých kriviek / kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] v oblasti S. $\square$

Dokážeme teraz, že ak krivka $\hat{\gamma}$ vznikne v oblasti S elementárnou deformáciou z krivky $\tilde{\gamma}$ a krivka $\tilde{\gamma}$ vznikne elementárnou deformáciou z γ, bude rovnaká vlastnosť platiť aj v prípade, že „prostrednú“ krivku $\tilde{\gamma}$ nahradíme vhodnou lomenou čiarou s obrazom pod S. Pod *lomenou čiarou* tu máme na mysli krivku π takú, že $\pi=[a_0,a_1]+[a_1,a_2]+\ldots+[a_{n-1},a_n]$ pre nejaké $n\in\mathbb{N}$ a $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{C}$.

Lema 5.3.13. *Nech $S\subseteq\mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma,\tilde{\gamma},\hat{\gamma}\colon[\alpha,\beta]\to S$ sú krivky také, že $\gamma^*,\tilde{\gamma}^*,\hat{\gamma}^*\subseteq S$, pričom $\tilde{\gamma}$ vznikne elementárnou deformáciou krivky γ v S a $\hat{\gamma}$ vznikne elementárnou deformáciou krivky $\tilde{\gamma}$ v S. Potom existuje lomená čiara π taká, že $\pi^*\subseteq S$, π vznikne elementárnou deformáciou krivky γ v S a $\hat{\gamma}$ vznikne elementárnou deformáciou lomenej čiary π v S. Ak sú navyše krivky γ, $\tilde{\gamma}$ a $\hat{\gamma}$ uzavreté, možno aj lomenú čiaru π zvoliť ako uzavretú; ak γ, $\tilde{\gamma}$ a $\hat{\gamma}$ sú také, že $\gamma(\alpha)=\tilde{\gamma}(\alpha)=\hat{\gamma}(\alpha)$ a $\gamma(\beta)=\tilde{\gamma}(\beta)=\hat{\gamma}(\beta)$, možno aj lomenú čiaru $\pi\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ zvoliť tak, aby $\pi(\alpha)=\gamma(\alpha)=\hat{\gamma}(\alpha)$ a $\pi(\beta)=\gamma(\beta)=\hat{\gamma}(\beta)$.*

Dôkaz. Nech $S_1,\dots,S_n\subseteq S$ sú konvexné oblasti z definície 5.3.10 pre elementárnu deformáciu γ na $\tilde{\gamma}$ a $T_1,\dots,T_m\subseteq S$ sú takéto konvexné oblasti pre elmentárnu deformáciu $\tilde{\gamma}$ na $\hat{\gamma}$. Evidentne potom existujú $\alpha_1,\dots,\alpha_s\in\mathbb{R}$ také, že $\alpha=\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\le\alpha_s=\beta$ a pre $k=1,\dots,s-1$ sú obidva body $\tilde{\gamma}(\alpha_k)$ a $\tilde{\gamma}(\alpha_{k+1})$ prvkami nejakého S_p pre $p\in\{1,\dots,n\}$, ako aj nejakého T_q pre $q\in\{1,\dots,m\}$. Z konvexnosti oblastí S_p a T_q potom dostávame $[\tilde{\gamma}(\alpha_k),\tilde{\gamma}(\alpha_{k+1})]^*\subseteq S_p\cap T_q$. Vhodná reparametrizácia lomenej čiary $\pi=[\tilde{\gamma}(\alpha_1),\tilde{\gamma}(\alpha_2)]+[\tilde{\gamma}(\alpha_2),\tilde{\gamma}(\alpha_3)]+\ldots+[\tilde{\gamma}(\alpha_{s-1}),\tilde{\gamma}(\alpha_s)]$ tak má požadované vlastnosti. $\square$

Práve učinené pozorovanie teraz využijeme na dôkaz, že dve po častiach hladké krivky homotopické v zmysle definície pre všeobecné krivky sú nutne homotopické aj ako po častiach hladké krivky. Ďalej už teda medzi homotópiami pre všeobecné a po častiach hladké krivky nebudeme musieť rozlišovať. Aj naďalej však budeme musieť rozlišovať medzi homotópiami uzavretých kriviek, homotópiami kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi a homotópiami kriviek bez niektorej z týchto dvoch vlastností – tieto druhy homotópií sú *fundamentálne* odlišné.

[2] Môžeme vziať napríklad okolia $D(H(k/m,\alpha+j\delta),\varepsilon)$ pre $j=0,\dots,\lfloor(\beta-\alpha)/\delta\rfloor$.

Veta 5.3.14. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sú po častiach hladké krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] také, že $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Krivky $\gamma, \hat{\gamma}$ sú potom homotopické v S ako krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi] práve vtedy, keď sú homotopické v S ako po častiach hladké krivky [resp. uzavreté krivky / krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi].*

Dôkaz. Keďže je každá homotópia po častiach hladkých kriviek zároveň aj homotópiou kriviek, je implikácia sprava doľava triviálna. Opačná implikácia vyplýva zo skutočnosti, že ak sú γ a $\hat{\gamma}$ homotopické ako (všeobecné) krivky, musí podľa vety 5.3.12 po častiach hladká krivka $\hat{\gamma}$ vzniknúť z po častiach hladkej krivky γ postupnosťou elementárnych deformácií v S. Vďaka leme 5.3.13 môžeme predpokladať, že všetky ďalšie krivky vystupujúce v tejto postupnosti elementárnych deformácií sú lomenými čiarami. Keďže je ale každá lomená čiara zároveň aj po častiach hladkou krivkou, vznikne $\hat{\gamma}$ z γ postupnosťou elementárnych deformácií po častiach hladkých kriviek. Krivky γ a $\hat{\gamma}$ teda sú – opäť podľa vety 5.3.12 – homotopické ako po častiach hladké krivky. □

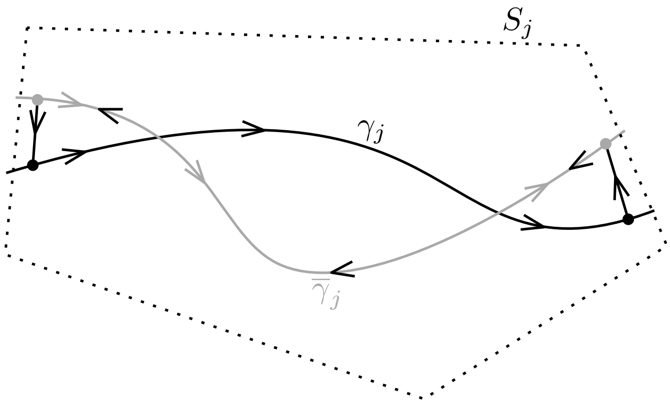
5.4 Veta o deformácii

Význam homotópií pre komplexnú analýzu je daný predovšetkým nasledujúcou vetou, podľa ktorej majú integrály pozdĺž homotopických uzavretých po častiach hladkých kriviek rovnaké hodnoty.

Veta 5.4.1 (O deformácii)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $\gamma, \hat{\gamma}$ sú uzavreté po častiach hladké krivky spĺňajúce $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$ a navzájom homotopické v S. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Tvrdenie stačí dokázať pre prípad, keď $\hat{\gamma}$ vznikne z γ elementárnou deformáciou. Nech teda $S_0, \ldots, S_{n-1} \subseteq S$ sú konvexné oblasti a $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \hat{\gamma}_0, \ldots, \hat{\gamma}_{n-1}$ sú po častiach hladké krivky také, že pre $k = 0, \ldots, n-1$ je $\gamma_k^*, \hat{\gamma}_k^* \subseteq S_k$, pričom $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{n-1} = \gamma$ a $\hat{\gamma}_0 + \ldots + \hat{\gamma}_{n-1} = \hat{\gamma}$.



Obr. 5.4: Krivka $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j + [\gamma_j(\beta), \hat{\gamma}_j(\hat{\beta})] + (-\hat{\gamma}_j) + [\hat{\gamma}_j(\hat{\alpha}), \gamma_j(\alpha)]$ (pozdĺž čiernych šípok).

Zvoľme teraz pevné $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ a predpokladajme, že γ_j je zobrazenie $\gamma_j\colon [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{C}$ a $\hat{\gamma}_j$ je zobrazenie $\hat{\gamma}_j\colon [\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j] \to \mathbb{C}$. Uvažujme krivku $\tilde{\gamma}_j := \gamma_j + [\gamma_j(\beta_j), \hat{\gamma}_j(\hat{\beta}_j)] + (-\hat{\gamma}_j) + [\hat{\gamma}_j(\hat{\alpha}_j), \gamma_j(\alpha_j)]$, znázornenú na obrázku 5.4. Z Cauchyho integrálnej vety pre konvexnú oblasť potom

$$\int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Súčasne ale pre $k = 0, \dots, n-1$ je $[\gamma_k(\beta_k), \hat{\gamma}_k(\hat{\beta}_k)] = -[\hat{\gamma}_{k+1}(\hat{\alpha}_{k+1}), \gamma_{k+1}(\alpha_{k+1})]$ (kde $k+1$ je modulo n), z čoho

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\hat{\gamma}_k} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Preto

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

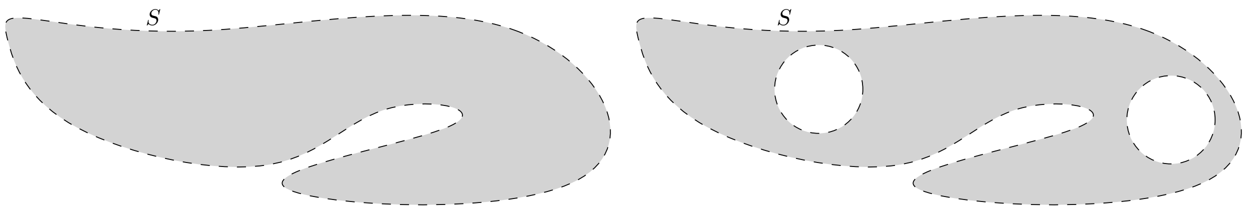
čo bolo treba dokázať. □

5.5 Jednoducho súvislé oblasti

Zavedieme teraz kľúčový pojem *jednoducho súvislej oblasti*. Intuitívne by malo byť zrejmé, že jednoduchá uzavretá krivka γ v oblasti S je homotopická s nejakým bodom a – ktorý chápeme ako krivku $\gamma_a\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ takú, že $\gamma_a(t) = a$ pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ – práve vtedy, keď „vnútro krivky γ celé leží v S" – zatiaľ pritom nechajme bokom fakt, že už samotný pojem „vnútra krivky" je viac ako problematický. Homotopickosť každej (nie nutne jednoduchej) uzavretej krivky v oblasti S s nejakým bodom v S teda vyjadruje intuitívnu skutočnosť, že oblasť S „nemá diery". Práve takéto oblasti nazveme *jednoducho súvislými*.

Definícia 5.5.1. Oblasť $S \subseteq \mathbb{C}$ je *jednoducho súvislá*, ak je každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$ (chápaným ako uzavretá krivka).

Na obrázku 5.5 sú znázornené dva príklady oblastí – prvá z nich je a druhá nie je jednoducho súvislá.



(a) Jednoducho súvislá oblasť. **(b)** Oblasť, ktorá nie je jednoducho súvislá.

Obr. 5.5: Ilustrácia pojmu jednoduchej súvislosti.

Príklad 5.5.2. Každá konvexná oblasť je očividne jednoducho súvislá. Na druhej strane napríklad žiadne medzikružie nie je jednoducho súvislé – to ale vyplynie až z Cauchyho vety pre jednoducho súvislú oblasť, ktorú onedlho dokážeme (napríklad integrál funkcie $1/(z-a)$ pozdĺž ľubovoľnej kladne orientovanej kružnice v danom medzikruží, kde a je stred tohto medzikružia, má hodnotu $2\pi i$; funkcia $1/(z-a)$ je ale na medzikruží holomorfná).

Množstvo rozličných pohľadov na homotopické krivky má celkom samozrejme za následok, že aj jednoducho súvislé oblasti možno charakterizovať rozličnými spôsobmi. Niektoré z týchto charakterizácií teraz dokážeme; intuitívne by však mali byť všetky nasledujúce tvrdenia zrejmé.

Tvrdenie 5.5.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(ii) *Každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

(iii) *Každá uzavretá po častiach hladká krivka γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

(iv) *Každá uzavretá lomená čiara γ s $\gamma^* \subseteq S$ je homotopická v S s nejakým bodom $a \in S$.*

Dôkaz. Tvrdenie (ii) je našou definíciou jednoducho súvislých oblastí. Je ďalej zrejmé, že (ii) implikuje (iii) a (iii) implikuje (iv). Zostáva dokázať, že (iv) implikuje (ii). Ak však pokryjeme uzavretú krivku γ konečným počtom okolí[3] typu $D(z, \varepsilon)$, kde $z \in \gamma^*$ a pre $\varepsilon > 0$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq S$, môžeme v každom z týchto okolí nahradiť daný úsek krivky γ úsečkou, pričom pôjde o elementárnu deformáciu. *Každá uzavretá krivka v každej oblasti S je teda homotopická s nejakou uzavretou lomenou čiarou*, a tvrdenie (iv) teda skutočne implikuje (ii). □

Tvrdenie 5.5.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(ii) *Každé dve uzavreté krivky $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

(iii) *Každé dve uzavreté po častiach hladké krivky $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

(iv) *Každé dve uzavreté lomené čiary $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú homotopické v S.*

Dôkaz. Tvrdenia (ii) až (iv) sú navzájom ekvivalentné podľa rovnakej argumentácie, ako v predchádzajúcom tvrdení. Zostáva dokázať, že napríklad tvrdenie (ii) je ekvivalentné jednoduchej súvislosti oblasti S. Ak sú však všetky dvojice uzavretých kriviek homotopické v S, je nutne každá uzavretá krivka homotopická aj s nejakým bodom (t. j. degenerovanou uzavretou krivkou). Ak je naopak každá uzavretá krivka homotopická v S s nejakým bodom v S, je homotopická s *každým* bodom v S, pretože v súvislej oblasti môžeme každú dvojicu bodov spojiť lomenou čiarou a túto čiaru pokryť okoliami slúžiacimi ako konvexné oblasti pre postupnosť niekoľkých elementárnych deformácií. Tvrdenie (ii) tak dostávame s využitím tranzitívnosti relácie „byť homotopický v S“. □

Na dôkaz poslednej z charakterizácií potrebujeme jednu pomocnú lemu, ktorá je však zaujímavým tvrdením sama o sebe.

Lema 5.5.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ a $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$ a $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = a$ je uzavretá krivka. Potom je krivka γ homotopická v S s bodom a ako uzavretá krivka práve vtedy, keď sú γ s a homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.*

Dôkaz. Implikácia „sprava doľava“ je triviálna. Stačí teda dokázať, že homotopickosť γ s a, chápaných ako uzavreté krivky, v oblasti S, má za následok, že sú γ s a homotopické v S aj ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že aj bod a je daný uzavretou krivkou parametrizovanou intervalom $[\alpha, \beta]$. Nech $H \colon [0, 1] \times [\alpha, \beta] \to S$ je homotópia uzavretých kriviek z γ na a.

Uvažujme krivku $\hat{\gamma} \colon [\alpha - 1, \beta + 1] \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $t \in [\alpha - 1, \beta + 1]$ takto:

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} a & \text{ak } t \in [\alpha - 1, \alpha], \\ \gamma(t) & \text{ak } t \in [\alpha, \beta], \\ a & \text{ak } t \in [\beta, \beta + 1]. \end{cases}$$

Je zrejmé, že $\hat{\gamma}$ a γ sú – po reparametrizácii jednej z týchto kriviek v zmysle tvrdenia 5.3.9 – homotopické krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi (v oblasti S). Stačí preto dokázať, že $\hat{\gamma}$ a a sú homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi. Tu môžeme využiť homotópiu H a definovať zobrazenie

$$\hat{H} \colon [0, 1] \times [\alpha - 1, \beta + 1] \to S$$

[3] To, že takéto konečné pokrytie vždy existuje, vyplýva napríklad z cvičenia 4 kapitoly 1 a zo skutočnosti, že množina γ^* je – ako spojitý obraz kompaktnej podmnožiny $\mathbb{R}$ – nutne kompaktná. Detaily prenechávame čitateľovi ako cvičenie.

pre všetky $\tau \in [0,1]$ a $t \in [\alpha-1, \beta+1]$ takto:

$$\hat{H}(\tau,t) = \begin{cases} H(t-\alpha+1,\alpha) & \text{ak } t \in [\alpha-1, \alpha-1+\tau], \\ H(\tau,\alpha) & \text{ak } t \in [\alpha-1+\tau, \alpha], \\ H(\tau,t) & \text{ak } t \in [\alpha,\beta], \\ H(\tau,\beta) & \text{ak } t \in [\beta, \beta+1-\tau], \\ H(\beta+1-t,\beta) & \text{ak } t \in [\beta+1-\tau, \beta+1]. \end{cases}$$

Zrejme ide o homotópiu kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi – pre všetky $\tau \in [0,1]$ totiž $\hat{H}(\tau,\alpha-1) = a$ a $\hat{H}(\tau,\beta+1) = a$. Navyše $\hat{H}_0 = \hat{\gamma}$ a – keďže trajektória bodu $\gamma(\alpha) = a$ je pri homotópii H rovnaká ako trajektória (toho istého) bodu $\gamma(\beta) = a$, existuje uzavretá krivka γ_a s počiatočným a zároveň koncovým bodom a taká, že $\hat{H}_1 = \gamma_a + (-\gamma_a)$. Krivky $\hat{\gamma}$ a $\gamma_a + (-\gamma_a)$ sú teda homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Krivka $\gamma_a + (-\gamma_a)$ je evidentne homotopická v S s bodom a (pričom ide o homotópiu kriviek s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi). V dôsledku toho sú teda v S homotopické, ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi, aj $\hat{\gamma}$ s a a γ s a. Tým je dôkaz lemy dokončený. □

Tvrdenie 5.5.6. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *Oblasť S je jednoducho súvislá.*

(ii) *Každé dve krivky $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

(iii) *Každé dve po častiach hladké krivky $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

(iv) *Každé dve lomené čiary $\gamma_1, \gamma_2 \colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické v S.*

Dôkaz. Rovnaká argumentácia ako v tvrdení 5.5.3 opäť dokazuje ekvivalenciu tvrdení (ii) až (iv). Zostáva dokázať ekvivalenciu týchto tvrdení s tvrdením (i).

Ak sú však každé dve krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi homotopické v S, je špeciálne aj každá uzavretá krivka v S homotopická s nejakým bodom na tejto krivke. Tieto krivky homotopické ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi sú homotopické aj ako uzavreté krivky a oblasť S je jednoducho súvislá.

Nech je naopak oblasť S jednoducho súvislá – dokážeme, že platí (ii). Uvažujme krivky γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$, so spoločným počiatočným bodom $a \in S$ a spoločným koncovým bodom $b \in S$. Krivka $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ je uzavretá, a teda homotopická s bodom a ako uzavretá krivka. Podľa lemy 5.5.5 sú krivky $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ a a homotopické aj ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi.

Krivka γ_1 je – po vhodnej reparametrizácii – očividne homotopická s krivkou $\gamma_1 + b$; bod b je navyše homotopický s krivkou $(-\gamma_2) + \gamma_2$. V dôsledku toho je krivka γ_1 homotopická s krivkou $\gamma_1 + (-\gamma_2) + \gamma_2$ a z vyššie dokázaného vyplýva, že táto krivka je homotopická s krivkou $a + \gamma_2$, ktorá je triviálne homotopická s γ_2. Krivky γ_1 a γ_2 sú teda homotopické, čo bolo treba dokázať. □

5.6 Cauchyho integrálna veta pre jednoducho súvislú oblasť

Rozšírenie Cauchyho integrálnej vety na ľubovoľnú jednoducho súvislú oblasť je už v tomto momente triviálnou záležitosťou. Namiesto o Cauchyho integrálnej vete pre jednoducho súvislú oblasť budeme väčšinou hovoriť len o *Cauchyho integrálnej vete* – pôjde totiž o najvšeobecnejší variant tejto vety, ktorý nateraz dokážeme.

Veta 5.6.1 (Cauchyho integrálna veta)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre každú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq S$ je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Keďže je oblasť S jednoducho súvislá, je krivka γ homotopická s nejakou degenerovanou krivkou $\hat{\gamma}$ takou, že $\hat{\gamma}^* = \{a\}$ pre nejaký bod $a \in \mathbb{C}$; ľahko vidieť, že takáto krivka $\hat{\gamma}$ má všade nulovú deriváciu, v dôsledku čoho je integrál ľubovoľnej spojitej funkcie pozdĺž nej nulový. Z vety o deformácii potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

čo bolo treba dokázať. □

Podľa vety 4.6.3 je nulovosť integrálov funkcie f pozdĺž všetkých uzavretých po častiach hladkých kriviek v danej oblasti ekvivalentná ďalším dvom podmienkam. Táto skutočnosť je natoľko dôležitá, že ju zdôrazníme explicitne.

Dôsledok 5.6.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom:*

a) Existuje funkcia $F\colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná na S taká, že $F' = f$. Táto funkcia navyše môže byť pre ľubovoľné pevné $z_0 \in S$ daná pre všetky $z \in S$ ako

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde γ je ľubovoľná po častiach hladká krivka s počiatočným bodom z_0 a koncovým bodom z taká, že $\gamma^* \subseteq S$.

b) Pre každú dvojicu po častiach hladkých kriviek γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ a zhodnými počiatočnými a koncovými bodmi platí

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z vety 5.6.1 a vety 4.6.3. □

5.7 Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta

Uvedieme teraz dve významné topologické vety vyznačujúce sa intuitívnou zrejmosťou ich tvrdení, no na druhej strane značnou netriviálnosťou ich dôkazov – *Jordanovu vetu* (o kružnici) a *Jordanovu-Schoenfliesovu vetu*. Tieto vety nebudeme dokazovať, ale občas ich budeme využívať. Vždy, keď sa tak stane, explicitne na to upozorníme.

Jordanova veta hovorí o tom, že každá jednoduchá uzavretá krivka – čiže každá Jordanova krivka – γ rozdeľuje komplexnú rovinu na dve podoblasti (t. j. súvislé otvorené podmnožiny). Jedna z nich je pritom ohraničená a nazveme ju *vnútrom* krivky γ; ďalšia je neohraničená a nazveme ju *vonkajškom krivky* γ. Hoci je toto tvrdenie intuitívne očividné, jeho dôkaz nie je zďaleka triviálny.

Veta 5.7.1 (Jordanova veta)**.** *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Množinu $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ potom možno vyjadriť ako disjunktné zjednotenie oblastí $\mathbf{I}(\gamma)$ a $\mathbf{O}(\gamma)$, kde $\mathbf{I}(\gamma)$ je ohraničená a $\mathbf{O}(\gamma)$ je neohraničená. Oblasť $\mathbf{I}(\gamma)$ nazývame* vnútrom *krivky γ a oblasť $\mathbf{O}(\gamma)$ nazývame jej* vonkajškom.

Pre naše účely bude podstatný ešte jeden súvisiaci fakt: vnútro každej Jordanovej krivky je nielen súvislé, ale dokonca jednoducho súvislé. To je opäť intuitívne zrejmé, pretože vo vnútre *jednoduchej* uzavretej krivky „nemajú ako vzniknúť diery“. Dôkaz tohto tvrdenia je ešte náročnejší ako v prípade Jordanovej vety – jeho základným kameňom je totiž nasledujúca netriviálna *Jordanova-Schoenfliesova veta*; pod *homeomorfizmom* chápeme spojitú bijekciu $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ktorá má aj spojitú inverznú funkciu.

Veta 5.7.2 (Jordanova-Schoenfliesova veta). *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Potom existuje homeomorfizmus $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taký, že $\varphi(\mathbf{I}(\gamma)) = D(0,1)$, $\varphi(\gamma^*) = \kappa(0,1)^*$ a $\varphi(\mathbf{O}(\gamma)) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$.*

Jednoduchá súvislosť množiny $\mathbf{I}(\gamma)$ je dôsledkom Jordanovej-Schoenfliesovej vety, pretože jednoduchá súvislosť je *topologický invariant*: množina $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá práve vtedy, keď je jednoducho súvislá množina $\varphi(S)$ pre ľubovoľný homeomorfizmus φ. Homotópie a homeomorfizmy totiž spolu možno skladať, pričom výsledkom je opäť homotópia; homeomorfným obrazom Jordanovej krivky je pritom opäť Jordanova krivka a homeomorfným obrazom bodu je opäť bod. Druhá časť nasledujúceho dôsledku vyplýva z toho, že sa hranica množiny $\mathbf{I}(\gamma)$ – čiže množina γ^* – pri homeomorfizme zobrazí na $\kappa(0,1)^*$.

Dôsledok 5.7.3. *Nech γ je jednoduchá uzavretá krivka. Potom je množina $\mathbf{I}(\gamma)$ jednoducho súvislá. Pre všetky oblasti $S \supseteq \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ navyše existuje jednoducho súvislá oblasť $G \subseteq S$ taká, že $G \supseteq \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$.*

Prijatie takto netriviálnych viet za „axiómy“ môže u čitateľa vzbudiť oprávnenú nevôľu. V nasledujúcom ich ale budeme využívať relatívne minimalisticky:

- Jordanovu vetu a dôsledok 5.7.3 budeme okrem nasledujúceho oddielu potrebovať v kapitole 6 pri formulácii a dôkaze niektorých všeobecnejších variantov Cauchyho integrálneho vzorca. Vždy, keď bude v znení alebo dôkaze niektorého tvrdenia Jordanova alebo Jordanova-Schoenfliesova veta ukrytá, explicitne na to upozorníme.

- Slabšie varianty Cauchyho integrálneho vzorca dokážeme bez použitia spomínaných nedokázaných tvrdení. Pre ďalšie krivky v praxi používané v súvislosti s Cauchyho integrálnym vzorcom – napríklad pre uzavreté krivky zložené z konečného počtu úsečiek a kruhových oblúkov – je navyše ľahké dokázať Jordanovu vetu aj dôsledok 5.7.3 *ad hoc*; nedôverčivý čitateľ teda môže závislosť tvrdení od Jordanovej vety a dôsledku 5.7.3 interpretovať aj ako dodatočný predpoklad, ktorý je pri ich použití potrebné overiť.

- Neskôr dokážeme iný – a dokonca ešte o niečo všeobecnejší – variant Cauchyho integrálneho vzorca, pri formulácii a dôkaze ktorého nebude potrebná ani Jordanova veta, ani dôsledok 5.7.3. Cesta k tomuto variantu Cauchyho integrálneho vzorca je ale o niečo menej intuitívna, než je tomu pre varianty Jordanovu vetu využívajúce (čo je aj dôvodom, prečo sa týmito variantmi vôbec budeme zaoberať).

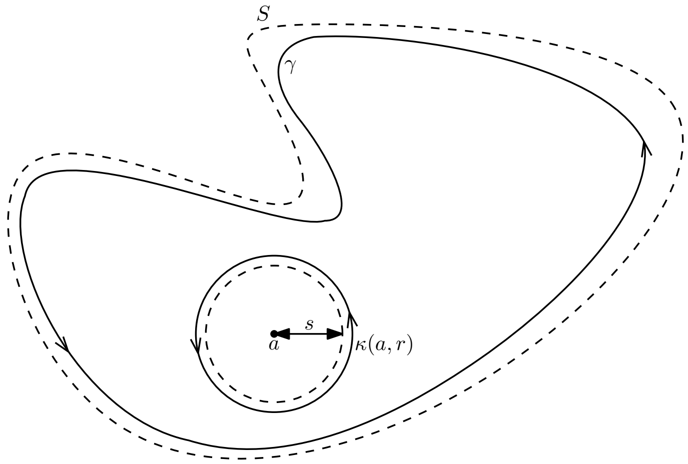
5.8 Ďalšie tvrdenie o deformácii

Nasledujúce tvrdenie, pri formulácii a dôkaze ktorého budeme používať ako Jordanovu vetu, tak aj dôsledok 5.7.3, využijeme v nasledujúcej kapitole pri dôkaze niektorých variantov Cauchyho integrálneho vzorca.

Tvrdenie 5.8.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka, $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ bod, $s > 0$ číslo také, že $\overline{D}(a,s) \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ a $f\colon S \setminus \overline{D}(a,s) \to \mathbb{C}$ funkcia holomorfná na $S \setminus \overline{D}(a,s)$. Nech ďalej $r > s$ je číslo také, že $\kappa(a,r)^* \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Nech γ je zobrazenie typu $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Veďme z bodu $\kappa(a,r)(\pi/2)$ polpriamku v smere rastúcej imaginárnej zložky; z ohraničenosti $\mathbf{I}(\gamma)$ vyplýva, že sa táto polpriamka v niektorom bode $\gamma(\mu)$ po prvý raz pretne s krivkou γ. Podobne môžeme viesť polpriamku z bodu $\kappa(a,r)(3\pi/2)$ v smere klesajúcej imaginárnej zložky a táto sa s krivkou γ po prvý raz pretne v nejakom inom bode $\gamma(\nu)$.

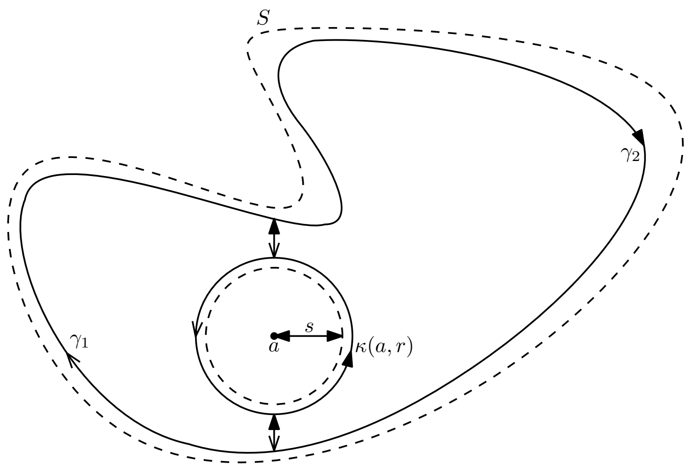


Obr. 5.6: Krivky zo znenia tvrdenia 5.8.1.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mu = \alpha$, a teda $\gamma(\mu) = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$; v opačnom prípade stačí krivku γ reparametrizovať. Označme teraz

$$\begin{aligned}\gamma_1 &:= (\kappa(a,r) \restriction [\pi/2, 3\pi/2]) + [\kappa(a,r)(3\pi/2), \gamma(\nu)] + (-(\gamma \restriction [\alpha,\nu])) + [\gamma(\alpha), \kappa(a,r)(\pi/2)],\\ \gamma_2 &:= (\kappa(a,r) \restriction [3\pi/2, 2\pi]) + (\kappa(a,r) \restriction [0, \pi/2]) + [\kappa(a,r)(\pi/2), \gamma(\alpha)] + (-(\gamma \restriction [\nu,\beta])) +\\ &\qquad + [\gamma(\nu), \kappa(a,r)(3\pi/2)].\end{aligned}$$

Tieto krivky sú znázornené na obrázku 5.7.



Obr. 5.7: Konštrukcia kriviek γ_1 a γ_2 v dôkaze tvrdenia 5.8.1.

Krivky γ_1 a γ_2 sú jednoduché a uzavreté – z dôsledku 5.7.3 teda vyplýva, že $\gamma_1^* \cup \mathbf{I}(\gamma_1)$ a $\gamma_2^* \cup \mathbf{I}(\gamma_2)$ sú podmnožinami nejakých jednoducho súvislých oblastí G_1 resp. G_2, ktoré navyše možno zvoliť tak, aby boli obsiahnuté v $S \setminus \overline{D}(a,s)$. Funkcia f je teda holomorfná na G_1 aj na G_2 a z Cauchyho integrálnej vety dostávame

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

z čoho už priamo vyplýva

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tvrdenie je dokázané. □

Tvrdenie 5.8.1 môžeme použiť napríklad na zosilnenie tvrdenia 4.3.5 hovoriaceho o hodnotách pravdepodobne najvýznamnejších konkrétnych integrálov v komplexnej analýze – v ňom už teraz nemusíme uvažovať integrály pozdĺž kružníc okolo bodu $a \in \mathbb{C}$; rovnaké hodnoty dostaneme aj integrovaním pozdĺž ľubovoľnej jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky takej, že bod a leží v jej vnútri.

Dôsledok 5.8.2. *Nech $a \in \mathbb{C}$, γ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \notin \gamma^*$ a $k \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\int_\gamma (z-a)^k \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{ak } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 2\pi i & \text{ak } k = -1 \text{ a } a \in \mathbf{I}(\gamma), \\ 0 & \text{ak } k = -1 \text{ a } a \in \mathbf{O}(\gamma). \end{cases}$$

Dôkaz. Pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ stačí použiť tvrdenie 4.3.5 a tvrdenie 5.8.1. Tvrdenie pre $a \in \mathbf{O}(\gamma)$ vyplýva napríklad z Cauchyho integrálnej vety a dôsledku 5.7.3. □

Cvičenia

1. Dokážte tvrdenie 5.3.5.

2. Dokážte tvrdenie 5.3.9.

3. Dokážte, že každá uzavretá krivka γ s $\gamma^* \subseteq D'(0,1)$ je homotopická v $D'(0,1)$ s krivkou $\hat{\gamma}$ takou, že $\hat{\gamma}^* \subseteq \kappa(0,1/2)^*$.

4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f \colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $\gamma, \hat{\gamma}$ sú homotopické po častiach hladké krivky s rovnakým počiatočným a koncovým bodom spĺňajúce $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$. Dokážte, že potom
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

5. Doplňte vynechané detaily v dôkaze tvrdenia 5.5.3.

6. Zistite, ktoré z nasledujúcich oblastí sú jednoducho súvislé:

   a) $S_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$;
   b) $S_2 = \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$;
   c) $S_3 = D(0,1) \setminus (-1, 0]$;
   d) $S_4 = D(0,1) \setminus [-1/2, 0]$.

   Svoje tvrdenia dokážte.

Kapitola 6

Cauchyho integrálny vzorec I

Cauchyho integrálny vzorec umožňuje vyjadriť hodnotu holomorfnej funkcie f v bode a prostredníctvom integrálu istej jemne pozmenenej funkcie pozdĺž krivky obkolesujúcej bod a. Ide pritom o jeden z najdôležitejších stavebných kameňov komplexnej analýzy s množstvom zaujímavých dôsledkov nielen pre vlastnosti holomorfných funkcií.

V rámci tejto kapitoly najprv sformulujeme a dokážeme samotný Cauchyho integrálny vzorec, a to hneď v troch variantoch líšiacich sa triedou uvažovaných integračných kriviek. Následne tento vzorec aplikujeme na dôkaz Liouvillovej vety, ktorej dôsledkom bude základná veta algebry: každý polynóm stupňa n s komplexnými koeficientmi má práve n komplexných koreňov. Ďalej dokážeme, že každá holomorfná funkcia má derivácie ľubovoľného rádu a odvodíme Cauchyho integrálne vzorce pre jednotlivé derivácie. V závere kapitoly napokon dokážeme Morerovu vetu, ktorá je užitočným nástrojom na dokazovanie holomorfnosti niektorých komplikovanejších funkcií.

6.1 Cauchyho integrálny vzorec

Cauchyho integrálny vzorec sformulujeme a dokážeme v troch jemne odlišných podobách. Najprv dokážeme „základnú verziu“ tohto vzorca, kde krivka obkolesujúca bod a je kladne orientovaná kružnica so stredom v a – to bude naša veta 6.1.1. Využitím známych tvrdení o deformáciách kriviek ľahko získame analogické tvrdenia aj pre iné typy uzavretých integračných kriviek. S nástrojmi nezávislými od Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety pritom dospejeme k vete 6.1.2; s nástrojmi spoliehajúcimi sa na tieto nedokázané tvrdenia zas dospejeme k vete 6.1.3.

Je dôležité si uvedomiť, že nasledujúca veta požaduje holomorfnosť funkcie nielen na kružnici $\kappa(a, r)$, ale aj v jej vnútri.

Veta 6.1.1 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia I)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $r > 0$ je polomer taký, že $\overline{D}(a, r) \subseteq S$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w - a}\, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Ak v dokazovanom vzorci nahradíme premennú $f(w)$ konštantou $f(a)$, je podľa tvrdenia 4.3.5

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(a)}{w - a}\, \mathrm{d}w = \frac{f(a)}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{1}{w - a}\, \mathrm{d}w = f(a).$$

Funkcia f je v bode a holomorfná – pre všetky $\varepsilon > 0$ preto existuje $\delta > 0$ také, že pre $w \in D(a, \delta) \cap S$ je

$$\left| \frac{f(w) - f(a)}{w - a} \right| \le \left| f'(a) \right| + \varepsilon.$$

Pre $r < \delta$ tak z vety o odhade dostávame

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)-f(a)}{w-a}\,\mathrm{d}w\right| \le \\ &\le \frac{2\pi r}{2\pi}\left(\left|f'(a)\right| + \varepsilon\right) = r\left(\left|f'(a)\right| + \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Teda

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a). \tag{6.1}$$

Pre ľubovoľné $R > r > 0$ také, že $\overline{D}(a,R) \subseteq S$ sú ale kružnice $\kappa(a,R)$ a $\kappa(a,r)$ zjavne homotopické v $S \setminus \{a\}$, pričom funkcia $f(w)/(w-a)$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Z vety o deformácii preto vyplýva

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,R)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w$$

a vzťah (6.1) môže byť splnený len ak pre všetky $r > 0$ s $\overline{D}(a,r) \subseteq S$ je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a).$$

Tým je dôkaz vety dokončený. □

Z vety o deformácii vyplýva, že namiesto kružnice $\kappa(a,r)$ môžeme v Cauchyho integrálnom vzorci použiť ľubovoľnú uzavretú po častiach hladkú krivku γ homotopickú v oblasti $S \setminus \{a\}$ s nejakou takouto kružnicou – samozrejme, pravda, za predpokladu, že funkcia f je holomorfná na S, pričom S obsahuje nielen obrazy oboch homotopických kriviek γ a $\kappa(a,r)$, ale aj celé vnútro kružnice $\kappa(a,r)$.

Veta 6.1.2 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S \setminus \{a\}$ je uzavretá po častiach hladká krivka homotopická v $S \setminus \{a\}$ s nejakou kružnicou $\kappa(a,r)$, kde $r > 0$ a $\overline{D}(a,r) \subseteq S$. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Z vety 6.1.1 za uvedených predpokladov dostávame

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Krivka γ je na $S \setminus \{a\}$ homotopická s $\kappa(a,r)$ a funkcia $f(w)/(w-a)$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$ – z vety o deformácii preto dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = f(a),$$

čo bolo treba dokázať. □

Vďaka tvrdeniu 5.8.1 môžeme všeobecnejšiu verziu Cauchyho integrálneho vzorca sformulovať o niečo intuitívnejším spôsobom – jednoducho vezmeme ľubovoľnú kladne orientovanú jednoduchú uzavretú po častiach hladkú krivku obkolesujúcu bod a a budeme predpokladať, že f je holomorfná na oblasti obsahujúcej túto krivku a celé jej vnútro. Už samotné znenie nasledujúcej vety však skryto využíva Jordanovu vetu – len vďaka nej totiž máme definovanú množinu $\mathbf{I}(\gamma)$. Tvrdenie 5.8.1, ktoré využívame v jej dôkaze, navyše predpokladá platnosť Jordanovej-Schoenfliesovej vety. Ide tak rozhodne o najmenej triviálnu verziu Cauchyho integrálneho vzorca, a to napriek tomu, že formulácia nasledujúcej vety je oproti predchádzajúcej o poznanie intuitívnejšia.

Veta 6.1.3 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia III)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f \colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-a} \, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Stačí vziať $r > 0$ také, že $\kappa(a,r)^* \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ a odvolať sa na vetu 6.1.1 spolu s tvrdením 5.8.1. □

6.2 Liouvillova veta a základná veta algebry

Zaoberajme sa teraz na chvíľu funkciami, ktoré sú holomorfné na celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ – takéto funkcie nazývame *celými.*

Definícia 6.2.1. Funkcia $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je *celá*, ak je holomorfná na $\mathbb{C}$.

Typickými príkladmi celých funkcií sú napríklad polynomické funkcie, exponenciálna funkcia e^z a goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$. Pri funkciách $\sin z$ a $\cos z$ sme si v rámci jedného z cvičení mali možnosť všimnúť, že na rozdiel od ich reálnych náprotivkov tieto funkcie nie sú ohraničené. Dokážeme teraz *Liouvillovu vetu*, podľa ktorej je táto vlastnosť spoločná všetkým nekonštantným celým funkciám.

Veta 6.2.2 (Liouvillova veta)**.** *Nech $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je ohraničená celá funkcia. Potom je funkcia f na $\mathbb{C}$ konštantná.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $|f(z)| \le M$ pre nejaké pevné $M \ge 0$ a všetky $z \in \mathbb{C}$. Nech $a, b \in \mathbb{C}$ sú ľubovoľné; ukážeme, že $f(a) = f(b)$.

Zvoľme $R > 0$ dostatočne veľké v porovnaní s $|a|$ aj s $|b|$ – tak, aby bolo $R \ge 2\max\{|a|,|b|\}$. Pre všetky $w \in \kappa(0,R)^*$ potom $|w-a| \ge \frac{R}{2}$ aj $|w-b| \ge \frac{R}{2}$. Z Cauchyho integrálneho vzorca teda

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(0,R)} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{f(w)}{w-b} \right) \mathrm{d}w = \frac{a-b}{2\pi i} \int_{\kappa(0,R)} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)} \, \mathrm{d}w.$$

Z vety o odhade preto

$$|f(a) - f(b)| \le \frac{|a-b|}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{\frac{R^2}{4}} = 4|a-b| \frac{M}{R}.$$

Keďže ale $R \ge 2\max\{|a|,|b|\}$ môže byť ľubovoľne veľké, nutne $|f(a) - f(b)| = 0$, z čoho $f(a) = f(b)$; veta je dokázaná. □

Ako jednoduchý dôsledok Liouvillovej vety dostávame *základnú vetu algebry.* Tú sformulujeme ako tvrdenie hovoriace, že pre každú nekonštantnú polynomickú funkciu $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existuje $a \in \mathbb{C}$ také, že $p(a) = 0$. Ak je totiž $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomická funkcia a $\hat{p} \in \mathbb{C}[z]$ je k nej prislúchajúci polynóm, je $p(a) = 0$ práve vtedy, keď $\hat{p} = (z-a)\hat{r}$ pre nejaký iný polynóm $\hat{r} \in \mathbb{C}[z]$.[1] Indukciou na stupeň polynómu $\hat{p}$ teda ľahko dokážeme, že polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ s komplexnými koeficientmi má práve n (nie nutne rôznych) komplexných koreňov, čo je ekvivalentná formulácia základnej vety algebry.

[1] Implikácia sprava doľava je zrejmá. Opačná implikácia vyplýva z vety o delení polynómov so zvyškom, podľa ktorej existujú polynómy $\hat{r}, \hat{s} \in \mathbb{C}[z]$ také, že $\hat{p} = (z-a)\hat{r} + \hat{s}$ a stupeň polynómu $\hat{s}$ je ostro menší ako stupeň polynómu $z - a$. Polynóm $\hat{s}$ je teda konštantný a z rovnosti $p(a) = 0$ vyplýva, že musí byť nulový.

Veta 6.2.3 (Základná veta algebry). *Nech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je nekonštantná polynomická funkcia. Potom existuje $a \in \mathbb{C}$ také, že $p(a) = 0$.*

Dôkaz. Predpokladajme za účelom sporu, že p je nekonštantná polynomická funkcia, ktorá je na $\mathbb{C}$ nenulová. Funkcia $1/p$ je potom celá. Táto funkcia je navyše aj ohraničená: keďže pre $z \to \infty$ máme $|p(z)| \to \infty$, musí existovať $R \geq 0$ také, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > R$ je $|1/p(z)| \leq 1$. Množina $\overline{D}(0, R)$ je ale kompaktná a funkcia $1/p$ je na nej spojitá – z vety o spojitosti na kompakte preto dostávame existenciu $M \geq 0$ takého, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $|z| \leq R$ je $|1/p(z)| \leq M$. V dôsledku toho

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \max\{1, M\}$$

pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Funkcia $1/p$ je teda celá a súčasne ohraničená, čo znamená, že podľa Liouvillovej vety musí byť konštantná, a preto musí byť konštantná aj funkcia p: spor. $\square$

6.3 Cauchyho vzorce pre derivácie

Dokážeme teraz, že každá holomorfná funkcia má v skutočnosti derivácie všetkých rádov. Navyše ukážeme, že z Cauchyho integrálneho vzorca

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w,$$

kde γ je vhodná krivka obkolesujúca bod z, získame derivovaním integrandu podľa z vzorce pre jednotlivé derivácie – pre každé $n \in \mathbb{N}$ teda

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}w. \tag{6.2}$$

Na dôkaz existencie derivácií ľubovoľného rádu nie je nutný integrálny vzorec pre všetky rády: stačí odvodiť integrálny vzorec pre prvú deriváciu a ukázať, že ním definovaná funkcia je holomorfná – existencia derivácií vyšších rádov už potom vyplynie z jednoduchého induktívneho argumentu. Hoci je takýto prístup o niečo jednoduchší, v nasledujúcom sa neuspokojíme len s existenciou derivácií vyšších rádov, ale dokážeme aj samotný Cauchyho vzorec (6.2) pre derivácie vyšších rádov, ktorý je často neoceniteľným nástrojom.

Veta 6.3.1 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia I). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $r > 0$ je polomer taký, že $\overline{D}(a, r) \subseteq S$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a, pričom*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Pre $n = 0$ ide o Cauchyho integrálny vzorec, ktorý už máme dokázaný. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre $n = k$; funkcia f je potom v bode a diferencovateľná k-krát a k-ta derivácia je daná integrálnym vzorcom zo znenia vety. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$. Budeme pritom dokazovať, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(a + h) - f^{(k)}(a)}{h} = \frac{(k + 1)!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+2}} \,\mathrm{d}w,$$

pričom na dôkaz použijeme základnú vetu o krivkových integráloch.

Nech $w \in \kappa(a,r)^*$. Funkcia

$$F_w(\zeta) = \frac{1}{(w-\zeta)^{k+1}}$$

je na $D(a,r)$ očividne primitívnou funkciou k funkcii $(k+1)/(w-\zeta)^{k+2}$ (premennej ζ). Zo základnej vety o krivkových integráloch teda pre všetky $u \in D(a,r)$ dostávame

$$F_w(u) = (k+1)\int_{[u_0,u]} \frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

kde $u_0 \in D(a,r)$ je ľubovoľný pevne zvolený bod. Podobne funkcia

$$G_w(\eta) = \frac{1}{(w-\eta)^{k+2}}$$

je na $D(a,r)$ primitívnou k funkcii $(k+2)/(w-\eta)^{k+3}$; pre $u \in D(a,r)$ teda

$$G_w(u) = (k+2)\int_{[u_0,u]} \frac{1}{(w-\eta)^{k+3}}\,\mathrm{d}\eta,$$

kde $u_0 \in D(a,r)$ je ľubovoľný pevne zvolený bod.

Nech teraz $h \in D(0,r)$. Z indukčného predpokladu, vety o deformácii a evidentnej homotopickosti $\kappa(a,r)$ s ľubovoľnou kružnicou $\kappa(a+h,s)$ pre $0<s<r-|h|$ v oblasti $S \setminus \{a+h\}$ dostávame

$$\begin{aligned}\frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} &= \frac{k!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\frac{1}{(w-a-h)^{k+1}}-\frac{1}{(w-a)^{k+1}}\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{k!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(F_w(a+h)-F_w(a)\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{6.3}$$

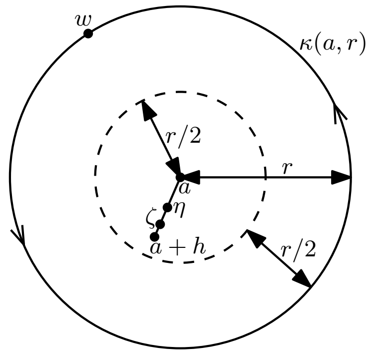
Označme

$$\Delta(h) := \frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+2}}\,\mathrm{d}w.$$

Stačí ukázať $\Delta(h) \to 0$ pre $h \to 0$. Avšak pre $|h|<r$ z (6.3) máme

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= \frac{f^{(k)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+2}}\,\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{h}{(w-a)^{k+2}}\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(\frac{1}{(w-\zeta)^{k+2}}-\frac{1}{(w-a)^{k+2}}\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+1)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(G_w(\zeta)-G_w(a)\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w = \\ &= \frac{(k+2)!}{h2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} f(w)\left(\int_{[a,a+h]}\left(\int_{[a,\zeta]}\frac{1}{(w-\eta)^{k+3}}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Keďže je množina $\kappa(a,r)^*$ kompaktná a funkcia f je na nej spojitá, existuje $M \geq 0$ také, že pre všetky $w \in \kappa(a,r)^*$ je $|f(w)| \leq M$. Pre takéto w tiež $|w-a| = r$; ak teda vezmeme $|h| \leq r/2$, tak pre všetky $\zeta \in [a,a+h]$ je $|\zeta - a| \leq r/2$ a v dôsledku toho pre všetky $\eta \in [a,\zeta]$ a všetky $w \in \kappa(a,r)^*$ platí $|w-\eta| \geq r/2$ – táto situácia je znázornená na obrázku 6.1.



Obr. 6.1: Poloha bodov a, $a+h$, w, ζ a η v rámci $\overline{D}(a,r)$.

Z vety o odhade teda dostávame

$$|\Delta(h)| = \left| \frac{(k+2)!}{h2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} f(w) \left(\int_{[a,a+h]} \left(\int_{[a,\zeta]} \frac{1}{(w-\eta)^{k+3}} \,\mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\zeta \right) \mathrm{d}w \right| \leq$$
$$\leq \frac{(k+2)!}{2|h|\pi} \cdot 2\pi r \cdot M \cdot |h| \cdot |h| \cdot \frac{1}{(r/2)^{k+3}} = \frac{2^{k+3} \cdot M \cdot |h| \cdot (k+2)!}{r^{k+2}}$$

a pre $h \to 0$ skutočne $\Delta(h) \to 0$. Tým je dôkaz dokončený. □

Podobne ako pre „základný“ Cauchyho integrálny vzorec teraz môžeme využiť deformácie kriviek na sformulovanie analogických viet pre o niečo všeobecnejšiu triedu kriviek obkolesujúcich a. Keďže sú ich dôkazy navlas rovnaké ako vyššie, obmedzíme sa na vyslovenie týchto viet. Opäť však platí, že kým prvá z nasledujúcich viet je nezávislá na Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vete, tá druhá ich platnosť predpokladá.

Veta 6.3.2 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka homotopická v $S \setminus \{a\}$ s nejakou kružnicou $\kappa(a,r)$, kde $r > 0$ a $\overline{D}(a,r) \subseteq S$. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a, pričom*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Veta 6.3.3 (Cauchyho vzorec pre vyššie derivácie, formulácia III)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tá derivácia funkcie f v bode a, pričom*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Ešte raz explicitne sformulujme už spomínaný dôsledok viet dokázaných vyššie: každá holomorfná funkcia má derivácie všetkých rádov.

Dôsledok 6.3.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Potom je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ na S dobre definovaná n-tá derivácia funkcie f, ktorá je takisto holomorfná na S.*

Dôkaz. Pre každé $z \in S$ stačí aplikovať (napríklad) vetu 6.3.1 pre $r > 0$ také, že $\overline{D}(z,r) \subseteq S$. □

6.4 Morerova veta

Ďalšiu spomedzi klasických viet komplexnej analýzy, *Morerovu vetu*, možno chápať ako (takmer) opačné tvrdenie ku Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník – umožňuje totiž usúdiť na holomorfnosť funkcie f na oblasti S za predpokladu nulovosti integrálov tejto funkcie pozdĺž všetkých trojuholníkov v S; podmienkou je však spojitosť funkcie f na S.

Veta 6.4.1 (Morerova veta)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia taká, že pre ľubovoľný trojuholník γ s $\gamma^* \subseteq S$ je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Potom je funkcia f holomorfná na S.

Dôkaz. Stačí pre každé $a \in S$ ukázať holomorfnosť funkcie f v bode a. Nech $r > 0$ je také, že $D(a,r) \subseteq S$; oblasť $D(a,r)$ je konvexná a z lemy 5.2.2 tak za predpokladov tejto vety vyplýva existencia primitívnej funkcie $F\colon D(a,r) \to \mathbb{C}$ k funkcii f. Táto funkcia je na $D(a,r)$ holomorfná a platí pre ňu $F' = f$. Podľa dôsledku 6.3.4 má však každá holomorfná funkcia derivácie ľubovoľného rádu – špeciálne teda musí na $D(a,r)$ existovať aj druhá derivácia funkcie F, ktorá je nutne deriváciou funkcie f na $D(a,r)$: funkcia f je holomorfná na $D(a,r)$, a teda aj v bode a. □

Cvičenia

1. Vypočítajte

$$\int_{\kappa(a,r)} \frac{e^z+1}{z}\,\mathrm{d}z$$

pre

a) $a = 3$ a $r = 2$,

b) $a = 2$ a $r = 3$.

2. Vypočítajte

$$\int_{\kappa(i,1)} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

3. Vypočítajte

$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{e^z}{z^4}\,\mathrm{d}z.$$

4. Nech f je funkcia holomorfná na $D(0,R)$ pre nejaké $R > 0$ a nech r je také, že $0 < r < R$. Nech $|f(z)|$ je pre $z \in \kappa(0,r)^*$ zhora ohraničená konštantou $M \geq 0$. Dokážte odhad

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right| \leq r^{-n}M.$$

Kapitola 7

Taylorove rady

V tejto kapitole dokážeme, že holomorfné funkcie sú lokálne reprezentovateľné Taylorovými radmi – funkcia holomorfná v nejakom bode $a \in \mathbb{C}$ je teda v tomto bode aj analytická a holomorfnosť a analytickosť funkcie sú v skutočnosti totožné koncepty.

7.1 Rovnomerná a lokálne rovnomerná konvergencia

Dôkaz predoslaného tvrdenia vyžaduje integrovať nekonečné rady funkcií člen po člene, čo nie je vždy prípustné. Techniky umožňujúce takúto „zámenu integrálu s nekonečnou sumáciou" v istých prípadoch odôvodniť sú založené na teórii rovnomernej konvergencie, ktorej základy teraz preskúmame. Spoločne s rovnomernou konvergenciou definujeme aj jej o niečo slabší variant – takzvanú *lokálne rovnomernú konvergenciu* – a niektoré z tvrdení tohto oddielu dokážeme už pre tento všeobecnejší koncept. Hoci v súvislosti s Taylorovými radmi nám postačí pracovať iba s rovnomernou konvergenciou, znalosť vlastností lokálne rovnomerne konvergentných postupností funkcií sa nám zíde neskôr v súvislosti s funkciou gama.

Definícia 7.1.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že:

(i) Postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje *bodovo* k funkcii $f \colon S \to \mathbb{C}$, ak pre všetky $z \in S$ a všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. V takom prípade píšeme $f_n \to f$ pre $n \to \infty$.

(ii) Postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje *rovnomerne* k funkcii $f \colon S \to \mathbb{C}$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $z \in S$ je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. V takom prípade píšeme $f_n \rightrightarrows f$ pre $n \to \infty$.

Nech ďalej $T \subseteq S$ je množina, $\hat{f}_n \colon T \to \mathbb{C}$ je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ zúžením funkcie f_n na T a $\hat{f} \colon T \to \mathbb{C}$ je zúžením f na T. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje k f *bodovo* resp. *rovnomerne na* T, ak $(\hat{f}_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje bodovo resp. rovnomerne k $\hat{f}$.

Rozdiel teda spočíva v tom, že pri bodovej konvergencii n_0 závisí od z, kým pri rovnomernej konvergencii možno pre všetky z zvoliť jedno spoločné n_0.

Definícia 7.1.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje *lokálne rovnomerne* k funkcii $f \colon S \to \mathbb{C}$, ak pre všetky $z \in S$ existuje $r > 0$ také, že na $D(z, r) \cap S$ je $f_n \rightrightarrows f$ pre $n \to \infty$. V takom prípade píšeme $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ pre $n \to \infty$.

Lokálne rovnomernú konvergenciu na $T \subseteq S$ definujeme prostredníctvom zúžení príslušných funkcií, rovnako ako pri bodovej a rovnomernej konvergencii.

Ak postupnosť funkcií konverguje k nejakej funkcii f rovnomerne, evidentne k nej konverguje aj lokálne rovnomerne; z lokálne rovnomernej konvergencie tiež zrejme vyplýva bodová konvergencia. Nasledujúce dva príklady ukazujú, že opačným smerom žiadna z týchto dvoch implikácií neplatí.

Príklad 7.1.3. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkciu $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako

$$f_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } |z| \geq 1/(n+1), \\ (n+1)|z| & \text{inak.} \end{cases}$$

Ľahko potom vidieť, že pre $n \to \infty$ je $f_n \to f$, kde $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } z \neq 0, \\ 0 & \text{ak } z = 0. \end{cases}$$

Postupnosť funkcií $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ale k funkcii f nekonverguje lokálne rovnomerne, pretože konvergencia nie je rovnomerná na žiadnom okolí $D(0,r)$ pre $r > 0$. Keby totiž na nejakom $D(0,r)$ bolo $f_n \rightrightarrows f$, muselo by napríklad aj pre $\varepsilon = 1/2$ existovať $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $z \in D(0,r)$ je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Bez ujmy na všeobecnosti ale predpokladajme $r \leq 1$ a pre dané n_0 uvažujme $z = r/3(n_0+1)$. Pre $n = n_0$ potom

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{r(n_0+1)}{3(n_0+1)} - 1 \right| = \frac{3-r}{3} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

a dostávame spor. Postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ teda k f *konverguje bodovo, ale nie lokálne rovnomerne.*

Príklad 7.1.4. Uvažujme ďalej funkcie $g_n\colon D'(0,1) \to \mathbb{C}$ dané pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $z \in D'(0,1)$ ako $g_n(z) = z^n$. Pre $n \to \infty$ je evidentne $g_n \to 0$; dokážeme, že aj $g_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} 0$. K danému $z \in D'(0,1)$ zvoľme $r = \min\{|z|/2, (1-|z|)/2\}$; existujú teda reálne čísla r_1, r_2 také, že $0 < r_1 < r_2 < 1$ a pre všetky $w \in D(z,r)$ je

$$r_1 \leq |w| \leq r_2.$$

Pre všetky $\varepsilon > 0$ a $w \in D(z,r)$ je potom

$$|g_n(w) - 0| = |w^n| = |w|^n < \varepsilon$$

práve vtedy, keď $n \ln|w| < \ln \varepsilon$, čo je pre $\varepsilon < 1$ splnené[1] kedykoľvek

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln r_2}.$$

Ak teda vezmeme $n_0 = \lceil (\ln \varepsilon)/(\ln r_2) \rceil$, pre všetky $n \geq n_0$ a $w \in D(z,r)$ je $|g_n(w) - 0| < \varepsilon$. Pre $n \to \infty$ tak skutočne $g_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} 0$. Postupnosť funkcií $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ ale ku konštantne nulovej funkcii nekonverguje rovnomerne, pretože v takom prípade by pre každé $\varepsilon > 0$ muselo existovať $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a $z \in D'(0,1)$ je

$$|g_n(z) - 0| = |z^n| = |z|^n < \varepsilon.$$

Podobne ako vyššie ale zisťujeme, že napríklad pre $\varepsilon = e^{-1}$ je táto nerovnosť splnená práve vtedy, keď

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|z|} = -\frac{1}{\ln|z|};$$

špeciálne teda musí byť aj

$$n_0 > -\frac{1}{\ln|z|}.$$

Napríklad pre $z = e^{-1/(n_0+1)} \in D'(0,1)$ potom ale

$$n_0 > n_0 + 1,$$

čím prichádzame k sporu. Postupnosť funkcií $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ teda ku konštantne nulovej funkcii *konverguje lokálne rovnomerne, ale nie rovnomerne.*

[1] V nepodstatnom prípade $\varepsilon \geq 1$ je nerovnosť splnená vždy.

Ak postupnosť $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ funkcií spojitých na oblasti S konverguje k funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$ *bodovo*, funkcia f nemusí byť spojitá – takáto situácia očividne nastáva aj v príklade 7.1.3 vyššie. Dokážeme teraz, že limita *rovnomerne* alebo *lokálne rovnomerne* konvergentnej postupnosti spojitých funkcií je naopak vždy spojitá.

Tvrdenie 7.1.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je funkcia $f_n\colon S \to \mathbb{C}$ spojitá na S. Ak pre nejakú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$ je $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ pre $n \to \infty$, je funkcia f na S taktiež spojitá.*

Dôkaz. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a $z \in S$; potrebujeme nájsť $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\delta) \cap S$ je $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Keďže $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$, existuje $r > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $w \in D(z,r) \cap S$ je $|f_m(w) - f(w)| < \varepsilon/3$. Funkcia f_m je spojitá v bode z, a teda existuje $\eta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(z,\eta) \cap S$ je $|f_m(z) - f_m(w)| < \varepsilon/3$. Pre $\delta = \min\{\eta, r\}$ a všetky $w \in D(z,\delta) \cap S$ potom

$$\begin{aligned}|f(z) - f(w)| &= |f(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(w) + f_m(w) - f(w)| \leq \\ &\leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(w)| + |f_m(w) - f(w)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

čím je hľadané δ nájdené a tvrdenie dokázané. □

Bodovú, rovnomernú a lokálne rovnomernú konvergenciu prirodzeným spôsobom definujeme aj pre *rady funkcií* – pôjde vždy o rovnakú vlastnosť príslušnej postupnosti čiastočných súčtov.

Definícia 7.1.6. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií $f_n\colon S \to \mathbb{C}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Nech je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ funkcia $F_n\colon S \to \mathbb{C}$ daná ako $F_n := f_0 + \ldots + f_n$. Potom hovoríme, že:

(*i*) Rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje *bodovo* k funkcii $F\colon S \to \mathbb{C}$, ak k funkcii F konverguje bodovo postupnosť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$.

(*ii*) Rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje *rovnomerne* k funkcii $F\colon S \to \mathbb{C}$, ak k funkcii F konverguje rovnomerne postupnosť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$.

(*iii*) Rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje *lokálne rovnomerne* k funkcii $F\colon S \to \mathbb{C}$, ak k funkcii F konverguje lokálne rovnomerne postupnosť $(F_n)_{n=0}^{\infty}$.

Veta 7.1.7 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií $f_n\colon S \to \mathbb{C}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje $M_n \geq 0$ také, že pre všetky $z \in S$ je $|f_n(z)| \leq M_n$ a rad $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konverguje, tak rad funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na S konverguje rovnomerne.*

Dôkaz. Ak sú predpoklady vety splnené, pre každé pevné $z \in S$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|f_n(z)| \leq M_n$ a číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konverguje podľa porovnávacieho kritéria. V dôsledku toho rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje na S bodovo k nejakej funkcii $F\colon S \to \mathbb{C}$. Zostáva dokázať, že tento rad konverguje k F aj rovnomerne. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme $F_n := f_0 + \ldots + f_n$. Pre každé $z \in S$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ potom

$$|F(z) - F_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Keďže rad $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konverguje, pre všetky $\varepsilon > 0$ musí existovať $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Pre $n \geq n_0$ potom aj $|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon$, pre všetky $z \in S$: rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne. □

Nasledujúca veta dáva rovnomernú konvergenciu do súvisu so zámenou limity a integrálu, ako aj s integrovaním radov funkcií člen po člene. Pôjde o základný nástroj, ktorý využijeme pri dôkaze reprezentovateľnosti holomorfných funkcií Taylorovými radmi. Rovnomernú konvergenciu by aj v nasledujúcej vete bolo v skutočnosti možné nahradiť lokálne rovnomernou konvergenciou – akurát dôkaz by v takom prípade bol nepatrne technickejší. Túto úlohu prenechávame čitateľovi ako jedno z cvičení na konci kapitoly.

Veta 7.1.8. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ pre $n \in \mathbb{N}$ a γ je po častiach hladká krivka taká, že $\gamma^* \subseteq S$. Potom:*

(*i*) *Ak $f_n \rightrightarrows f$ pre nejakú funkciu $f \colon S \to \mathbb{C}$ a $n \to \infty$, tak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(*ii*) *Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na S, tak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Stačí dokázať tvrdenie (*i*); tvrdenie (*ii*) je jeho bezprostredným dôsledkom. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Keďže $f_n \rightrightarrows f$, je funkcia f tiež spojitá a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $z \in S$ je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Pre $n \geq n_0$ teda z vety o odhade dostávame

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma \left(f_n(z) - f(z)\right)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\varepsilon,$$

a teda skutočne

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tým je dôkaz vety dokončený. □

Dokážme ešte, že podobne ako v prípade spojitých funkcií je aj rovnomerná alebo lokálne rovnomerná limita postupnosti *holomorfných* funkcií tiež vždy holomorfná.

Veta 7.1.9. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je funkcia $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná na S. Ak pre nejakú funkciu $f \colon S \to \mathbb{C}$ je $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ pre $n \to \infty$, je funkcia f na S taktiež holomorfná.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $z \in S$; dokážeme holomorfnosť funkcie f v bode z. Nech $r > 0$ je také, že $D(z,r) \subseteq S$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $D(z,r)$ pre $n \to \infty$. Nech γ je ľubovoľný trojuholník s $\gamma^* \subseteq D(z,r)$. Vďaka vete 7.1.8 a Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník potom

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(w)\,\mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Keďže je teda funkcia f spojitá podľa tvrdenia 7.1.5, z Morerovej vety vyplýva jej holomorfnosť na $D(z,r)$, a teda aj v bode z. □

7.2 Taylorove rady

Máme teraz k dispozícii všetky ingrediencie potrebné na dôkaz vety o lokálnej reprezentácii holomorfných funkcií Taylorovými radmi.

Veta 7.2.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ je bod a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(a,R)$ pre nejaké $R > 0$. Potom existujú* jednoznačne dané *konštanty c_n pre $n = 0,1,2,\ldots$ také, že pre všetky $z \in D(a,R)$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{7.1}$$

(kde rad konverguje na $D(a,R)$). Koeficienty c_n sú navyše pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dané vzťahom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

kde $0 < r < R$.[2] *Mocninový rad na pravej strane (7.1) potom nazývame* Taylorovým radom *funkcie f v bode a; v prípade $a = 0$ hovoríme o* Maclaurinovom rade.

Dôkaz. Nech $z \in D(a,R)$ je dané. Zvoľme r tak, aby $|z-a| < r < R$; z Cauchyho vzorca pre derivácie vyplýva, že vetu stačí dokázať pre toto pevné r. Podľa Cauchyho integrálneho vzorca navyše

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \tag{7.2}$$

Nech teraz r' je reálne číslo také, že $|z-a| < r' < r$ a $T = \{w \in D(a,R) \mid r' < |w-a| < R\}$. Potom $\kappa(a,r)^* \subseteq T$ a pre všetky $w \in T$ je

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}},$$

kde $|(z-a)/(w-a)| < 1$; teda

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}. \tag{7.3}$$

Pre každé reálne číslo s také, že $|(z-a)/(w-a)| < s < 1$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ máme

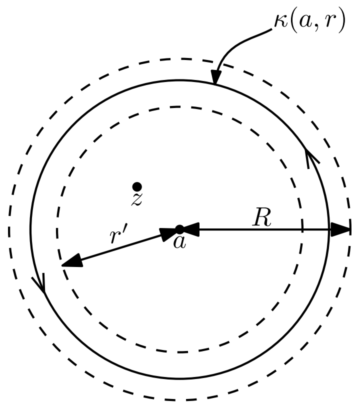
$$\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \leq \frac{1}{w-a} s^n \leq \frac{1}{r'} s^n$$

a z Weierstrassovho kritéria rovnomernej konvergencie vyplýva, že rad (7.3), chápaný ako rad funkcií premennej w, konverguje rovnomerne na T. Dosadením (7.3) do (7.2) a aplikovaním vety 7.1.8 teda zisťujeme, že

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

Zostáva dokázať jednoznačnosť postupnosti koeficientov $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Tá ale vyplýva z vety 3.4.2 o deriváciách analytických funkcií: podľa nej totiž musí byť $n!c_n = f^{(n)}(a)$, pričom n-té derivácie funkcie f sú dané jednoznačne. $\square$

[2] Prípadne možno kružnicu $\kappa(a,r)$ nahradiť všeobecnejšou krivkou rovnako ako vo variantoch II a III Cauchyho vzorca pre derivácie.



Obr. 7.1: Situácia z dôkazu vety 7.2.1. Medzikružie ohraničené čiarkovanými kružnicami je oblasť T.

7.3 Ekvivalencia holomorfnosti s analytickosťou

Dôkazom vety o reprezentácii holomorfných funkcií Taylorovými radmi sme zároveň zavŕšili aj dôkaz rovnosti tried holomorfných a analytických funkcií. Tento dôležitý výsledok teraz ešte sformulujeme explicitne.

Dôsledok 7.3.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina. Funkcia $f : S \to \mathbb{C}$ je potom holomorfná v bode $a \in S$ práve vtedy, keď je analytická v bode a.*

Dôkaz. Ak je funkcia f v bode a holomorfná, vyplýva jej analytickosť v tomto bode z vety 7.2.1. Naopak každá analytická funkcia je holomorfná podľa dôsledku 3.4.3. □

Cvičenia

1. Dokážte, že na *kompaktnej* množine postupnosť funkcií konverguje rovnomerne práve vtedy, keď konverguje lokálne rovnomerne.

2. Dokážte, že vo vete 7.1.8 v skutočnosti možno predpoklad rovnomernej konvergencie nahradiť slabším predpokladom lokálne rovnomernej konvergencie.

3. Každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ s polomerom konvergencie ϱ môžeme stotožniť s radom funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, kde f_n je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ daná ako $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ (pre z také, že $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje). Dokážte, že pri takejto interpretácii rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje rovnomerne na $D(a, r)$ pre všetky r také, že $0 < r < \varrho$.

4. Ukážte, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ s polomerom konvergencie $\varrho > 0$ *nemusí* konvergovať rovnomerne na $D(a, \varrho)$, ale musí tam konvergovať lokálne rovnomerne.

5. Nech pre nejaké $r > 0$ na $D(0, r)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Dokážte, že potom sú na $D(0, r)$ analytické aj funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ a nájdite mocninové rady reprezentujúce tieto funkcie.

6. Odôvodnite, prečo sú mocninové rady definujúce funkcie e^z, $\sin z$ a $\cos z$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ v skutočnosti aj Maclaurinovými radmi týchto funkcií.

7. Nájdite Maclaurinov rozvoj funkcie $f(z) = \frac{1}{2} z^3 \cos 3z$ a jeho polomer konvergencie.

8. Uvažujme holomorfné vetvy $\ln_k\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathbb{C}$ prirodzeného logaritmu z oddielu 3.6 pre $k \in \mathbb{Z}$. *Hlavnou holomorfnou vetvou* logaritmu ďalej nazvime vetvu $\operatorname{Ln} z := \ln_0 z$. Dokážte, že na $D(0,1)$ je funkcia $\operatorname{Ln}(1+z)$ daná *Mercatorovým radom*

$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Nájdite Maclaurinove rady na $D(0,1)$ aj pre všetky funkcie $\ln_k(1+z)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Nájdite Taylorove rady so stredom v bode 1 pre funkcie $\ln_k z$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

9. Uvažujme *hlavnú vetvu* mocninovej funkcie $[\![z^\alpha]\!]$ definovanú pre $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ako $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$; ide teda o holomorfnú vetvu multifunkcie $[\![z^\alpha]\!]$ na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, pre ktorú je $1^\alpha = 1$. Označme ďalej $f(z) = (1+z)^\alpha$, kde umocňujeme s použitím tejto hlavnej vetvy.

   a) Dokážte, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{C}$ a $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$.

   b) Funkcia f je očividne holomorfná na $D(0,1)$. Z predchádzajúceho vzťahu odvoďte, že pre všetky $z \in D(0,1)$ je $(1+z)f'(z) = \alpha f(z)$.

   c) Ukážte, že pre $z \in D(0,1)$ je funkcia $f(z)$ daná *binomickým rozvojom*

$$f(z) = (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

   kde pre $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}.$$

   d) Nájdite obdobné Maclaurinove rozvoje aj pre ďalšie holomorfné vetvy mocninovej funkcie $[\![(1+z)^\alpha]\!]$ na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

10. Nech f je celá funkcia. Dokážte, že ak $|f(z)| \le C|z|^k$ pre nejaké $C \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$ a všetky $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R)$ pre nejaké $R > 0$, tak je funkcia f polynomická stupňa najviac k.

Kapitola 8

Veta o jednoznačnosti

V nasledujúcom dokážeme *vetu o jednoznačnosti*, podľa ktorej je každá holomorfná funkcia f na oblasti S jednoznačne daná svojimi hodnotami na ľubovoľnej podmnožine $T \subseteq S$ takej, že T má v S aspoň jeden hromadný bod. Celá informácia o holomorfnej funkcii f na množine S je teda „zakódovaná" v jej hodnotách na – hoci aj oveľa „menšej" – množine T. Okrem toho tiež dokážeme *princíp maxima modulu*, podľa ktorého absolútna hodnota funkcie holomorfnej na oblasti nemôže nadobúdať žiadne ostré lokálne maximá.

8.1 Korene holomorfných funkcií

Pod *koreňmi* funkcie komplexnej premennej v súlade s bežnou terminológiou chápeme body, v ktorých funkcia nadobúda nulové hodnoty.

Definícia 8.1.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ a $f \colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Hovoríme, že bod $a \in S$ je *koreňom* funkcie f, ak $f(a) = 0$.

Často sa zíde aj jemnejšia klasifikácia koreňov *holomorfných* funkcií podľa ich *rádu* – ide pritom o minimálny rád derivácie funkcie f, ktorá je v danom bode nenulová.

Definícia 8.1.2. Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$. Pre $m \in \mathbb{N}$ hovoríme, že bod a je *koreňom* funkcie f *rádu* m, ak $f^{(k)}(a) = 0$ pre $k = 0, \ldots, m-1$ a $f^{(m)}(a) \neq 0$. Ak žiadne takéto $m \in \mathbb{N}$ neexistuje, hovoríme, že a je *koreňom* funkcie f *rádu* ∞.

Bod a je teda koreňom funkcie f práve vtedy, keď a je jej koreňom *nenulového rádu*; korene nulového rádu podľa tejto terminológie koreňmi funkcie f (bez ďalšieho prívlastku) vôbec nie sú.

Korene konečného rádu možno charakterizovať aj viacerými ďalšími spôsobmi zhrnutými v nasledujúcom tvrdení. Ako cvičenie prenechávame čitateľovi charakterizáciu koreňov nekonečného rádu.

Tvrdenie 8.1.3. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, pričom $r > 0$ je také, že pre všetky $z \in D(a, r)$ je funkcia f daná Taylorovým radom $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Nech $m \in \mathbb{N}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *Bod a je koreňom rádu m funkcie f.*

(ii) *Platí $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ a $c_m \neq 0$.*

(iii) *Existuje funkcia g holomorfná na $D(a, r)$ taká, že $g(a) \neq 0$ a pre všetky $z \in D(a, r)$ je funkcia f daná ako $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

(iv) *Limita $\lim_{z \to a} f(z)/(z-a)^m$ existuje a je rovná nejakému nenulovému komplexnému číslu.*

Dôkaz. Tvrdenia (i) a (ii) sú ekvivalentné vďaka vete o Taylorových radoch: pre všetky $n \in \mathbb{N}$ totiž nutne $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Ak ďalej $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ a $c_m \neq 0$, môžeme položiť

$$g(z) := \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m},$$

pričom tento rad musí konvergovať pre všetky $z \in D(a,r)$. Zjavne v takom prípade $g(a) = c_m \neq 0$ a $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pre všetky $z \in D(a,r)$. Ak naopak $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pre nejakú funkciu $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ holomorfnú na $D(a,r)$ s $g(a) \neq 0$, tak

$$f(z) = (z-a)^m g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m} (z-a)^n$$

a z $b_0 = g(a) \neq 0$ je zrejmé, že *práve* prvých m koeficientov Taylorovho rozvoja tejto funkcie v bode a je nulových. To dokazuje ekvivalenciu tvrdení (ii) a (iii). Z platnosti (iii) a spojitosti holomorfnej funkcie g v bode a tiež vyplýva

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^m g(z)}{(z-a)^m} = g(a),$$

kde $g(a) \neq 0$; teda (iii) implikuje (iv). Nech nakoniec pre nejaké $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = C.$$

Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že f je holomorfná na $D(a,\delta)$ a pre všetky $w \in D'(a,\delta)$ je

$$\left| \frac{f(w)}{(w-a)^m} - C \right| < \varepsilon,$$

a teda aj

$$|f(w)| < (|C| + \varepsilon)\delta^m.$$

Z Cauchyho vzorca pre derivácie a vety o odhade potom pre $n = 0, \ldots, m-1$ dostávame

$$\left| f^{(n)}(a) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa(a,\delta/2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right| < \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2^{n+1}(|C|+\varepsilon)\delta^m}{\delta^{n+1}} = n! 2^n (|C|+\varepsilon)\delta^{m-n}$$

a keďže $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ môžu byť ľubovoľne malé, nutne $f^{(n)}(a) = 0$. Ak teda $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, je $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$. Keďže ale na druhej strane

$$C = \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z \to a} \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} = c_m,$$

dostávame $c_m = C \neq 0$. Tvrdenie (iv) teda implikuje (ii), čím je dôkaz dokončený. $\square$

Označenie 8.1.4. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ a $f \colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia na S. Ako $Z(f)$ označíme množinu všetkých koreňov funkcie f v S, t. j.

$$Z(f) := \{a \in S \mid f(a) = 0\}.$$

8.2 Veta o jednoznačnosti

Vetu o jednoznačnosti dokážeme pomocou dvoch lem hovoriacich o nulovosti holomorfnej funkcie na oblasti za predpokladu, že je táto funkcia nulová na podmnožine danej oblasti spĺňajúcej isté podmienky.

Lema 8.2.1. *Nech $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkcia f je holomorfná na $D(a,r)$. Ak $f(a) = 0$ a bod a je hromadným bodom množiny $Z(f)$, tak $f(z) = 0$ pre všetky $z \in D(a,r)$.*

Dôkaz. Nech sú predpoklady lemy splnené. Z holomorfnosti funkcie f na $D(a,r)$ vyplýva, že funkciu f možno pre všetky $z \in D(a,r)$ reprezentovať jej Taylorovým radom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Ak $c_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak pre každé $z \in D(a,r)$ nutne $f(z) = 0$, čo je v súlade so znením lemy. Ukážeme, že opačná možnosť vedie k sporu. Z tvrdenia 8.1.3 v takom prípade vyplýva, že je a koreňom funkcie f rádu $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rovnaké tvrdenie potom zaručuje aj existenciu funkcie g holomorfnej na $D(a,r)$ takej, že $g(a) \neq 0$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ je $f(z) = (z-a)^m g(z)$. Holomorfná funkcia g musí byť v bode a spojitá – existuje preto $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,\delta)$ je $g(z) \neq 0$; pre $z \in D'(a,\delta)$ potom aj $f(z) = (z-a)^m g(z) \neq 0$. Z toho vyplýva, že a je izolovaným bodom množiny $Z(f)$, čo je v spore s predpokladom, že ide o hromadný bod tejto množiny. □

Lema 8.2.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Ak má množina $Z(f)$ v S aspoň jeden hromadný bod, je funkcia f na S konštantne nulová.*

Dôkaz. Nech $a \in S$ je hromadný bod množiny $Z(f)$. Pre každé $\delta > 0$ potom existuje $z \in D'(a,\delta) \cap S$ také, že $f(z) = 0$. Zo spojitosti funkcie f v bode a teda vyplýva aj $f(a) = 0$. Ak teraz $b \in S$ je ľubovoľné, súvislosť oblasti S implikuje existenciu lomenej čiary γ z bodu a do bodu b. Keďže je γ^* kompaktná, existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $D(z,\varepsilon) \subseteq S$. Pokrytím lomenej čiary γ „reťazou“ prekrývajúcich sa okolí o polomere ε, kde stred každého ďalšieho okolia patrí aj do predchádzajúceho okolia, tak s použitím lemy 8.2.1 zisťujeme, že aj $f(b) = 0$. Keďže je $b \in S$ ľubovoľné, je lema dokázaná. □

Jednoduchým dôsledkom práve dokázanej lemy je už samotná veta o jednoznačnosti: každá funkcia f holomorfná na oblasti S je jednoznačne daná jej hodnotami na ľubovoľnej podmnožine T oblasti S, ktorá má v S aspoň jeden hromadný bod. V hodnotách funkcie f na množine T je teda „obsiahnutá kompletná informácia“ o hodnotách f na celej oblasti S.

Veta 8.2.3 (O jednoznačnosti)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ sú funkcie holomorfné na S. Nech existuje množina $T \subseteq S$ taká, že pre všetky $z \in T$ je $f(z) = g(z)$ a T má v S aspoň jeden hromadný bod. Potom $f = g$.*

Dôkaz. Stačí aplikovať lemu 8.2.2 na holomorfnú funkciu $f - g$. □

Príklad 8.2.4. Predpokladajme, že $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná funkcia taká, že pre všetky $z \in (0,1)$ je $f(z) = \sin z$. Z vety o jednoznačnosti potom $f(z) = \sin z$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Na vyvodenie tohto záveru by rovnako dobre postačovala aj rovnosť $f(z) = \sin z$ pre všetky $z \in \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, keďže táto množina má v $\mathbb{C}$ hromadný bod 0. Rovnosť $f(z) = \sin z$ pre $z \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ už ale napríklad postačujúca nie je, keďže v tomto prípade môže byť funkcia f napríklad aj konštantne nulová; to však neodporuje vete o jednoznačnosti, keďže množina $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ nemá v $\mathbb{C}$ žiaden hromadný bod.

Príklad 8.2.5. Ak pre nejakú dvojicu celých funkcií $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ platí $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, veta o jednoznačnosti zaručuje platnosť rovnosti $f(z) = g(z)$ aj pre všetky $z \in \mathbb{C}$. Takto možno do komplexného oboru rozšíriť identity ako napríklad $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ alebo $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

8.3 Princíp maxima modulu

Dokážeme teraz takzvaný *princíp maxima modulu* – t. j. absolútnej hodnoty funkcie. Pôjde o vetu hovoriacu, že absolútna hodnota funkcie holomorfnej na oblasti nenadobúda na tejto oblasti žiadne ostré lokálne maximá.

Veta 8.3.1 (Princíp maxima modulu). *Nech f je funkcia holomorfná na $D(a,r)$ pre nejaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Ak $|f(z)| \leq |f(a)|$ pre všetky $z \in D(a,r)$, tak je funkcia f na $D(a,r)$ konštantná.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné reálne s také, že $0 < s < r$. Z Cauchyho integrálneho vzorca potom

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,s)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+se^{it})}{se^{it}} sie^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+se^{it})\,\mathrm{d}t,$$

z čoho

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(a+se^{it})\right|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a)|\,\mathrm{d}t = |f(a)|.$$

Preto

$$\int_0^{2\pi} \left|f(a+se^{it})\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |f(a)|\,\mathrm{d}t,$$

a teda

$$\int_0^{2\pi} \left(|f(a)| - \left|f(a+se^{it})\right|\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Integrand je tu pritom spojitý a nezáporný na $[0, 2\pi]$; nutne teda $\left|f(a+se^{it})\right| = |f(a)|$ pre všetky $t \in [0, 2\pi]$. Z toho $|f(z)| = |f(a)|$ pre všetky $z \in \kappa(a,s)^*$ – a keďže je s ľubovoľné reálne číslo spĺňajúce $0 < s < r$, je $|f(z)| = |f(a)|$ aj pre všetky $z \in D(a,r)$.

Dokázali sme teda, že absolútna hodnota funkcie f je na $D(a,r)$ konštantná. Zostáva dokázať, že v takom prípade musí byť na $D(a,r)$ konštantná aj samotná funkcia f.

Nech u, v sú funkcie dvoch reálnych premenných také, že pre $z \in D(a,r)$ je $u(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = \operatorname{Re} f(z)$ a $v(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = \operatorname{Im} f(z)$. Konštantnosť funkcie $|f|$ na $D(a,r)$ znamená, že pre nejaké $c \geq 0$ a všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $x + iy \in D(a,r)$ je

$$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = c^2. \tag{8.1}$$

Ak pritom $c = 0$, musia byť funkcie $u(x,y)$ aj $v(x,y)$ konštantne nulové a na $D(a,r)$ je teda konštantne nulová aj funkcia f. Môžeme preto predpokladať, že $c > 0$.

Zderivovaním oboch strán rovnosti (8.1) podľa x resp. podľa y potom dostávame

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$$

a

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$

čo možno s využitím Cauchyho-Riemannových podmienok po predelení dvomi prepísať ako

$$u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \tag{8.2}$$

a

$$u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0. \tag{8.3}$$

Z toho napokon prenásobením funkciou $u(x,y)$ resp. $v(x,y)$ dostávame

$$u(x,y)^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - u(x,y)v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

a

$$v(x,y)^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + u(x,y)v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0,$$

pričom sčítaním oboch rovností prichádzame k vzťahu

$$\left(u(x,y)^2 + v(x,y)^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Keďže $c > 0$, je parciálna derivácia funkcie u podľa x konštantne nulová a vďaka Cauchyho-Riemannovým podmienkam dostávame rovnakú vlastnosť aj pre parciálnu deriváciu funkcie v podľa y.

Podobne po prenásobení (8.2) a (8.3) funkciou $-v(x,y)$ resp. $u(x,y)$ máme

$$v(x,y)^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - u(x,y)v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

a

$$u(x,y)^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + u(x,y)v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0,$$

z čoho po sčítaní oboch rovností dostávame

$$\left(u(x,y)^2 + v(x,y)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = c^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Konštantne nulová je teda aj parciálna derivácia funkcie u podľa y a vďaka Cauchyho-Riemannovým podmienkam aj parciálna derivácia funkcie v podľa x.

Funkcie u aj v sú teda konštantné, v dôsledku čoho je na $D(a,r)$ konštantná aj funkcia f. □

Nasledujúce dva dôsledky práve dokázanej vety sa niekedy tiež nazývajú *princípom maxima modulu*. Prvý z nich pritom explicitne hovorí o už predoslanej interpretácii predchádzajúcej vety.

Dôsledok 8.3.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, f je funkcia holomorfná na S a pre nejaké $a \in S$ existuje $r > 0$ také, že $D(a,r) \subseteq S$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ je $|f(z)| \leq |f(a)|$. Potom je f konštantná na S.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva konštantnosť funkcie f na okolí $D(a,r)$, ktoré má hromadný bod v S. Z vety o jednoznačnosti teda dostávame konštantnosť funkcie f aj na celej oblasti S. □

Dôsledok 8.3.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je ohraničená oblasť a f je funkcia holomorfná na S a spojitá na $\overline{S}$. Potom $|f|$ nadobúda maximum na hranici $\partial S = \overline{S} \setminus S$ množiny S.*

Dôkaz. Množina $\overline{S}$ je kompaktná a spojitá funkcia $|f|$ tak musí na $\overline{S}$ nadobúdať maximum. Pokiaľ ale funkcia f nie je konštantná na S, podľa predchádzajúceho dôsledku nemôže funkcia $|f|$ toto maximum nadobúdať na S, a teda ho musí nadobúdať na ∂S. Ak naopak funkcia f na oblasti S konštantná je, musí byť vďaka svojej spojitosti konštantná aj na $\overline{S}$. Keďže evidentne $\partial S \neq \emptyset$, nadobúda $|f|$ aj v tomto prípade maximum na ∂S. □

Cvičenia

1. Nech je $a \in \mathbb{C}$ koreňom rádu $p \in \mathbb{N}$ holomorfnej funkcie f a zároveň koreňom rádu $q \in \mathbb{N}$ holomorfnej funkcie g. Charakterizujte rád koreňa a funkcie $f \cdot g$ prostredníctvom čísel p a q.

2. Dokážte alebo vyvráťte: ak $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $D(0,1)$, pričom ± 1 a $\pm i$ sú hromadnými bodmi $Z(f)$, je funkcia f na $D(0,1)$ nutne konštantne nulová.

3. Nech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkcia. Dokážte, že ak $f(z) \in \mathbb{R}$ pre všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že $|z| = 1$, je funkcia f nutne konštantná.

Kapitola 9

Laurentove rady

V tejto kapitole si ukážeme, že za istých okolností možno funkciu komplexnej premennej rozvinúť do patrične zovšeobecneného mocninového radu aj v bodoch, v ktorých táto funkcia nie je holomorfná. Zameriame sa pritom na pomerne špeciálny prípad *izolovaných singularít* jednohodnotovej holomorfnej funkcie, v ktorých možno funkciu rozvinúť do takzvaného *Laurentovho radu*; na rozdiel od Taylorových radov môžu Laurentove rady obsahovať aj záporné mocniny. Následne bližšie preskúmame samotné izolované singularity jednohodnotových holomorfných funkcií.

9.1 Laurentove rady

Ak funkcia f nie je holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, nemôže existovať ani Taylorov rozvoj funkcie f v bode a, ktorým by bola funkcia f reprezentovaná na $D(a,r)$ pre nejaké $r > 0$; pokiaľ pritom z funkcie f nedostaneme funkciu holomorfnú v bode a jednoduchou zmenou funkčnej hodnoty $f(a)$, nie je táto funkcia reprezentovaná Taylorovým rozvojom ani na žiadnom prstencovom okolí $D'(a,r)$. Teraz však ukážeme, že v bodoch $a \in \mathbb{C}$ takých, že funkcia f je holomorfná na $D'(a,r)$, možno funkciu f rozvinúť do radu nápadne pripomínajúceho Taylorov rad, avšak obsahujúceho vo všeobecnosti aj záporné mocniny – takýto rad nazveme *Laurentovým radom*. Hoci je spomenutý prípad z hľadiska aplikácií najdôležitejší, v skutočnosti dokonca dokážeme o niečo silnejšie tvrdenie: rovnaká vlastnosť platí aj pre funkcie holomorfné na medzikruží so stredom v bode a.

Pred vyslovením samotnej vety o Laurentových radoch si musíme ujasniť spôsob, akým chápeme obojstranne nekonečné rady: hovoríme, že *rad komplexných čísel*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

konverguje k súčtu s, ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k súčtu s_1, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ konverguje k súčtu s_2 a $s_1 + s_2 = s$. Obdobným spôsobom chápeme aj obojstranne nekonečné mocninové rady.

Veta 9.1.1. *Nech f je funkcia holomorfná na medzikruží $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$ pre nejaké $0 \leq r_1 < r_2$. Potom existuje* jednoznačne daná *postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ taká, že pre všetky $z \in A$ je funkcia f daná* Laurentovým radom

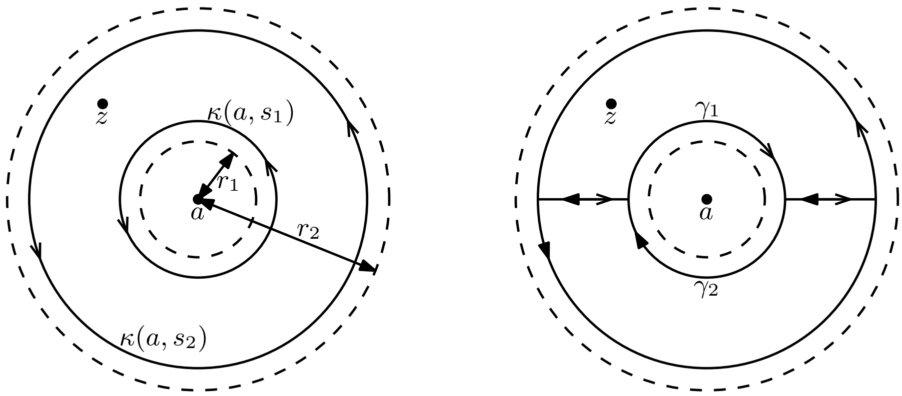
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(kde rad konverguje na A). Pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ je navyše koeficient c_n daný ako

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde r je ľubovoľné reálne číslo také, že $r_1 < r < r_2$.

Dôkaz. Nech $z \in A$ je pevné. Zvoľme reálne čísla s_1, s_2 tak, aby $r_1 < s_1 < |z-a| < s_2 < r_2$. Spojme kružnice $\kappa(a, s_1)$ a $\kappa(a, s_2)$ dvoma nepretínajúcimi sa úsečkami tak, aby bod z neležal na žiadnej z nich a skonštruujme krivky γ_1, γ_2 tak, ako na obrázku 9.1b.



(a) Voľba hodnôt s_1 a s_2. **(b)** Krivky γ_1 a γ_2.

Obr. 9.1: Dôkaz vety 9.1.1.

Z Cauchyho integrálneho vzorca potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

a z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w.$$

Sčítaním obidvoch integrálov dostávame

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_2)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_1)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w. \tag{9.1}$$

Pre $w \in \kappa(a, s_2)^*$ ale $|w-a| > |z-a|$ a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

kde rad konverguje rovnomerne pre w z nejakej oblasti obsahujúcej $\kappa(a, s_2)^*$. Pre $w \in \kappa(a, s_1)^*$ naopak $|w-a| < |z-a|$ a

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}},$$

kde rad konverguje rovnomerne pre w z nejakej oblasti obsahujúcej $\kappa(a, s_1)^*$. Dosadením do (9.1) tak s použitím vety 7.1.8 zisťujeme, že

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_2)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_1)} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}} \,\mathrm{d}w = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_1)} \frac{f(w)}{(w-a)^{-k}} \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^{-k-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s_1)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^n.
\end{aligned}$$

Vďaka vete o deformácii môžeme integračné krivky $\kappa(a,s_1)$ a $\kappa(a,s_2)$ nahradiť krivkou $\kappa(a,r)$. Dostávame teda

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Zostáva dokázať jednoznačnosť koeficientov c_n. Ak ale pre $z \in A$ platí $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-a)^k$ pre nejaké konštanty $(d_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, tak pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ zisťujeme, že

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (w-a)^{k-n-1} \, \mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (w-a)^{k-n-1} \, \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} (w-a)^{-k-n-1} \, \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Obidva nekonečné rady v integrandoch konvergujú rovnomerne podľa Weierstrassovho kritéria – za M_k možno pri prvom z nich vziať napríklad $|d_k| q_1^{k-n-1}$ pre ľubovoľné reálne q_1 také, že $r < q_1 < \varrho_1$, kde ϱ_1 je polomer konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k$ a pri druhom rade napríklad $|d_{-k}| q_2^{k+n+1}$ pre reálne číslo q_2 také, že $1/r < q_2 < \varrho_2$, kde ϱ_2 je polomer konvergencie radu $\sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} u^k$. Preto

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} (w-a)^{k-n-1} \, \mathrm{d}w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{-k}}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} (w-a)^{-k-n-1} \, \mathrm{d}w = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d_k}{2\pi i} \int_{\kappa(a,r)} (w-a)^{k-n-1} \, \mathrm{d}w = d_n, \end{aligned} \tag{9.2}$$

keďže integrál je v (9.2) nenulový len pre $k = n$ a jeho hodnota je v takom prípade $2\pi i$. □

Poznámka 9.1.2. Podobne ako pri Cauchyho integrálnych vzorcoch alebo koeficientoch Taylorových radov možno integrál pozdĺž kružnice $\kappa(a,r)$ v znení vety 9.1.1 nahradiť integrálom pozdĺž ľubovoľnej uzavretej po častiach hladkej krivky homotopickej v A s $\kappa(a,r)$ (čo vyplýva priamo z vety o deformácii), prípadne integrálom pozdĺž ľubovoľnej kladne orientovanej jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky γ s $\gamma^* \subseteq A$ takej, že $\overline{D}(a,r_1) \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ (kde je ale v konečnom dôsledku potrebné odvolať sa na Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu).

Poznámka 9.1.3. Pre *disjunktné* medzikružia so stredom v bode $a \in \mathbb{C}$ môžu byť Laurentove rozvoje so stredom v a vo všeobecnosti rôzne. Typicky sa však budeme zaujímať o Laurentov rozvoj funkcie na nejakom *prstencovom okolí* bodu a, ktorý je vďaka predchádzajúcej vete daný jednoznačne. Často budeme nepresne hovoriť o *Laurentovom rozvoji funkcie v bode* a; v takom prípade máme vždy na mysli (jediný) Laurentov rad na nejakom prstencovom okolí bodu a.

Príklad 9.1.4. Funkcia $f(z) = 1/z$ je „sama svojím Laurentovým radom" v bode $z = 0$ – to znamená $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_{-1} = 1$ a $c_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\}$.

Príklad 9.1.5. Uvažujme funkciu $f(z) = 1/(z^3 + z^2)$. Laurentov rozvoj funkcie f v bode $z = 0$ možno nájsť takto:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

To znamená, že koeficienty pri z^n sú pre $n < 2$ nulové. Ide pritom o Laurentov rad na prstencovom okolí $D'(0,1)$. Užitočným cvičením môže byť nájdenie Laurentovho radu reprezentujúceho funkciu f na medzikruží $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ pre ľubovoľné $r > 1$.

Príklad 9.1.6. Laurentov rad funkcie $\sin(1/z)$ v bode $z = 0$ je daný ako

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-(2n+1)}}{n!}.$$

Je v ňom teda nekonečne veľa nenulových koeficientov pri záporných mocninách z.

9.2 Izolované singularity a ich klasifikácia

Po zvyšok tejto kapitoly sa začneme vážnejšie zaoberať vlastnosťami bodov, v ktorých nejaká funkcia f nie je holomorfná, hoci je holomorfná v ich blízkosti – presnejšie sa budeme zaoberať takzvanými *izolovanými singularitami* jednohodnotových holomorfných funkcií, ktoré sú úzko späté s Laurentovými radmi. Samotný pojem *singularity* funkcie zatiaľ definovať nebudeme; urobíme tak až neskôr v súvislosti s analytickým predĺžením. Izolované singularity jednohodnotových funkcií budú – až na nepodstatný prípad odstrániteľných singularít – špeciálnym prípadom singularít.

Definícia 9.2.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina a $f: S \to \mathbb{C}$ je funkcia. Hovoríme, že bod $a \in \mathbb{C}$ je *izolovanou singularitou* funkcie f, ak existuje $r > 0$ také, že $D'(a, r) \subseteq S$, pričom funkcia f je holomorfná na $D'(a, r)$, ale nie je holomorfná[1] v bode a.

Podmienka holomorfnosti funkcie f na $D'(a, r)$ má za následok, že každú funkciu možno v jej izolovaných singularitách rozvinúť do Laurentovho radu. Vlastnosti tohto radu sú pritom základom pre jemnejšiu klasifikáciu izolovaných singularít.

Definícia 9.2.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, $f: S \to \mathbb{C}$ je funkcia a $a \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkcie f. Nech $r > 0$ je také, že f je holomorfná na $D'(a, r)$, pričom pre $z \in D'(a, r)$ je funkcia f daná Laurentovým rozvojom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Potom hovoríme, že a je:

a) *Odstrániteľnou singularitou* funkcie f, ak pre všetky celé čísla $n < 0$ je $c_n = 0$.

b) *Pólom* funkcie f, ak existuje $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že $c_{-m} \neq 0$ a pre všetky celé čísla $n < -m$ je $c_n = 0$. V takom prípade tiež hovoríme, že a je pólom *rádu* m.

c) *Podstatnou izolovanou singularitou* funkcie f, ak existuje nekonečne veľa rôznych celých čísel $n < 0$ takých, že $c_n \neq 0$.

Príklad 9.2.3. Z príkladov 9.1.4, 9.1.5 a 9.1.6 vyplýva, že funkcie

$$f_1(z) = \frac{1}{z}$$

a

$$f_2(z) = \frac{1}{z^3 + z^2}$$

majú v bode $z = 0$ pól. V prvom prípade ide o pól rádu 1, nazývaný tiež *jednoduchým pólom*; v druhom prípade ide o pól rádu 2. Funkcia

$$f_3(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

má v bode $z = 0$ podstatnú izolovanú singularitu. Príkladom funkcie s odstrániteľnou singularitou v bode 0 môže byť napríklad funkcia $f_4: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C}$ ako

$$f_4(z) = \begin{cases} 1 & \text{ak } z \neq 0, \\ 0 & \text{ak } z = 0, \end{cases}$$

prípadne zúženie funkcie e^z na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a podobne.

[1] Samotný bod a pritom môže, ale nemusí patriť do S.

9.3 Odstrániteľné singularity

V terminológii, ktorú zavedieme neskôr, sa odstrániteľné singularity za singularity vôbec nepokladajú. Existencia odstrániteľnej singularity funkcie f v bode a totiž znamená, že na nejakom prstencovom okolí $D'(a,r)$ bodu a je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

pre nejakú postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Funkcia definovaná týmto mocninovým radom je na $D(a,r)$ holomorfná. Ak teda funkcia f nie je holomorfná v bode a, môže to byť iba z dvoch dôvodov: buď nie je v bode a vôbec definovaná, alebo má v tomto bode hodnotu rôznu od c_0. V oboch prípadoch možno dodefinovaním resp. predefinovaním hodnoty $f(a)$ na c_0 získať holomorfnú funkciu. Prípad odstrániteľných singularít je teda zanedbateľný, keďže predefinovanie funkcie v jednom izolovanom bode zvyčajne nehrá veľkú rolu.

Veta 9.3.1 (Riemannova veta o odstrániteľných singularitách)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ a $f\colon S \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Existuje funkcia $\hat{f}\colon S \to \mathbb{C}$ holomorfná v bode a taká, že pre všetky $z \in S \setminus \{a\}$ je $\hat{f}(z) = f(z)$.*

(*ii*) *Existuje funkcia $\hat{f}\colon S \to \mathbb{C}$ spojitá v bode a taká, že pre všetky $z \in S \setminus \{a\}$ je $\hat{f}(z) = f(z)$.*

(*iii*) *Existuje $r > 0$ také, že $D(a,r) \subseteq S$ a funkcia f je ohraničená na $D'(a,r)$.*

(*iv*) *Existuje vlastná limita $\lim_{z\to a} f(z) = L$.*

(*v*) $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0$.

Dôkaz. Z tvrdenia (*i*) vyplýva tvrdenie (*ii*) podľa vety 2.5.1. Platnosť tvrdenia (*ii*) ďalej znamená, že ku každému $\varepsilon > 0$ vieme nájsť $\delta > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,\delta)$ je $\hat{f}(z) \in D(\hat{f}(a),\varepsilon)$. Ak teda zvolíme $r > 0$ tak, aby bolo $r \leq \delta$ a súčasne $D(a,r) \subseteq S$, pre všetky $z \in D'(a,r)$ je $|f(z)| = |\hat{f}(z)| \leq |\hat{f}(a)| + \varepsilon$ a funkcia f je teda ohraničená na $D'(a,r)$.

Predpokladajme ďalej platnosť tvrdenia (*iii*) a uvažujme funkciu $g\colon S \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $z \in S$ ako

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{ak } z \neq a, \\ 0 & \text{ak } z = a. \end{cases}$$

Funkcia g je evidentne holomorfná na $S \setminus \{a\}$ a vďaka ohraničenosti funkcie f na $D'(a,r)$ dostávame

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Funkcia g je teda holomorfná na S. Podľa vety 7.2.1 teda pre ľubovoľné $R > 0$ spĺňajúce $D(a,R) \subseteq S$ a všetky $z \in D(a,R)$ je

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

pre nejakú jednoznačne danú postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Keďže $g(a) = g'(a) = 0$, je $c_0 = c_1 = 0$. Pre všetky $z \in D(a,R)$ potom môžeme definovať hodnoty funkcie $\tilde{f}\colon D(a,R) \to \mathbb{C}$ ako

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n,$$

kde rad napravo evidentne konverguje pre všetky prípustné z. Pre všetky $z \in D'(a,R)$ navyše

$$\tilde{f}(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^2} = f(z).$$

Funkcia $\hat{f}\colon S \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in S$ ako

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \tilde{f}(z) & \text{ak } z \in D(a,R), \\ f(z) & \text{ak } z \in S \setminus D(a,R) \end{cases}$$

je potom holomorfným rozšírením funkcie f na S, čím sme dokázali tvrdenie (i).

Tvrdenia (i) až (iii) sú teda skutočne ekvivalentné a zostáva dokázať ich ekvivalenciu s tvrdeniami (iv) až (v). Ak ale predpokladáme napríklad (ii), podľa tvrdenia 2.2.6 je

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \hat{f}(z) = \hat{f}(a),$$

a tvrdenie (iv) je dokázané pre $L = \hat{f}(a)$. Tvrdenie (iv) ďalej zrejme implikuje tvrdenie (v).

Predpokladajme napokon platnosť tvrdenia (v) – teda

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0.$$

Pre ľubovoľné pevné $\varepsilon > 0$ potom existuje $\delta > 0$ také, že funkcia f je na $D'(a,\delta)$ holomorfná a pre všetky $w \in D'(a,\delta)$ je

$$|f(w)(w-a)| < \varepsilon;$$

pre ľubovoľné reálne číslo η spĺňajúce $\delta/2 < \eta < \delta$ a všetky $w \in \kappa(a,\eta)^*$ teda aj

$$|f(w)| < \frac{2\varepsilon}{\delta}. \tag{9.3}$$

Funkcia f ďalej musí byť na $D'(a,\delta)$ daná svojím Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z-a)^n$$

pre nejakú postupnosť koeficientov $(d_n)_{n=-\infty}^{\infty}$. Z vety 9.1.1, vety o odhade a (9.3) potom pre ľubovoľné reálne η spĺňajúce $\delta/2 < \eta < \delta$ a všetky *záporné* celé čísla n dostávame

$$|d_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,\eta)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \delta \cdot \frac{2^{n+2}\varepsilon}{\delta^{n+2}} = \frac{2^{n+2}\varepsilon}{\delta^{n+1}}$$

a keďže $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ môžu byť ľubovoľne malé, nutne $|d_n| = d_n = 0$. Pre všetky $z \in D'(a,\delta)$ teda v skutočnosti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n,$$

kde rad napravo udáva holomorfné rozšírenie funkcie f na $D(a,\delta)$. Pre funkciu $\hat{f}\colon S \to \mathbb{C}$ danú ako

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n & \text{ak } z \in D(a,\delta), \\ f(z) & \text{ak } z \in S \setminus D(a,\delta) \end{cases}$$

teda platí tvrdenie (i). □

O Riemannovej vete *o odstrániteľných singularitách* hovoríme v súvislosti s vetou 9.3.1 preto, lebo jej dôsledkom je nasledujúce kritérium odstrániteľnosti singularity.

Dôsledok 9.3.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia holomorfná na S s izolovanou singularitou v bode $a \in \mathbb{C}$. Nech $r > 0$ je také, že $D'(a,r) \subseteq S$ a nech je pre všetky $z \in D'(a,r)$ funkcia f daná Laurentovým radom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Bod a je odstrániteľnou singularitou funkcie f.*

(*ii*) *Existuje funkcia $\hat{f}$ holomorfná na $D(a,r)$ taká, pre všetky $z \in D'(a,r)$ je $f(z) = \hat{f}(z)$.*

(*iii*) *Existuje funkcia $\hat{f}$ spojitá na $D(a,r)$ taká, pre všetky $z \in D'(a,r)$ je $f(z) = \hat{f}(z)$.*

(*iv*) *Funkcia f je ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu a.*

(*v*) *Existuje vlastná limita $\lim_{z\to a} f(z) = L$.*

(*vi*) $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0$.

Dôkaz. Izolovaná singularita $a \in \mathbb{C}$ funkcie f je z definície odstrániteľná práve vtedy, keď pre všetky celé čísla $n < 0$ je $c_n = 0$. Pre všetky $z \in D'(a,r)$ potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

a rad napravo určuje holomorfné rozšírenie funkcie f na $D(a,r)$. Ak naopak existuje funkcia $\hat{f}$ holomorfná na $D(a,r)$ taká, že pre všetky $z \in D'(a,r)$ je $f(z) = \hat{f}(z)$, sú hodnoty funkcie f na $D'(a,r)$ dané Taylorovým radom funkcie $\hat{f}$ so stredom v bode a, ktorý je vďaka jednoznačnosti koeficientov Laurentovho radu súčasne aj Laurentovým radom funkcie f na $D'(a,r)$. Tento rad má nulové všetky koeficienty pri záporných mocninách z a izolovaná singularita a tak musí byť odstrániteľná.

Dokázali sme teda ekvivalenciu tvrdení (*i*) a (*ii*). Ekvivalencia tvrdenia (*ii*) so zvyšnými tvrdeniami vyplýva priamo z vety 9.3.1. □

Sformulujme ešte ďalšie dva užitočné dôsledky Riemannovej vety o odstrániteľných singularitách.

Dôsledok 9.3.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Potom je funkcia f holomorfná v bode a práve vtedy, keď je v bode a spojitá.*

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z ekvivalencie tvrdení (*i*) a (*ii*) vety 9.3.1. □

Dôsledok 9.3.4. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $F \subseteq S$ je konečná množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na $S \setminus F$ a $a \in F$. Potom je funkcia f holomorfná v bode a práve vtedy, keď je v bode a spojitá.*

Dôkaz. Keďže je množina S otvorená, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $D(a,\varepsilon) \subseteq S$. Ak navyše zvolíme toto číslo ε tak, aby bolo

$$\varepsilon < \min\{|z-a| \mid z \in F \setminus \{a\}\},$$

evidentne

$$D(a,\varepsilon) \subseteq (S \setminus F) \cup \{a\}.$$

Stačí sa teda opäť odvolať na vetu 9.3.1. □

9.4 Póly

Zaoberajme sa teraz bližšie pólmi. Charakterizujme najprv póly rádu m podobným spôsobom, ako sme v tvrdení 8.1.3 charakterizovali korene rádu m a v dôsledku 9.3.2 odstrániteľné singularity.

Tvrdenie 9.4.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na S. Nech $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ sú také, že $D'(a,r) \subseteq S$ a pre všetky $z \in D'(a,r)$ je funkcia f daná Laurentovým radom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Nech $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(*i*) *Bod a je pólom rádu m funkcie f.*

(*ii*) *Existuje funkcia g holomorfná na $D(a,r)$ taká, že $g(a) \neq 0$ a pre všetky $z \in D'(a,r)$ je funkcia f daná ako $f(z) = g(z)/(z-a)^m$.*

(*iii*) *Limita $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m$ existuje a je rovná nejakému nenulovému komplexnému číslu.*

Dôkaz. Platnosť tvrdenia (*i*) znamená, že $c_{-m} \neq 0$ a pre všetky celé čísla $n < -m$ je $c_n = 0$. Pre všetky $z \in D'(a,r)$ teda

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde koeficient c_{-m} je nenulový. Ľahko teda vidieť, že na $D'(a,r)$ je $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ pre funkciu g danú pre všetky $z \in D(a,r)$ ako

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z-a)^n.$$

Rad napravo zrejme konverguje pre všetky $z \in D(a,r)$; funkcia g je teda holomorfná na $D(a,r)$, pričom $g(a) = c_{-m} \neq 0$. Tvrdenie (*i*) teda implikuje tvrdenie (*ii*).

Ak naopak platí (*ii*) pre nejakú holomorfnú funkciu g spĺňajúcu $g(a) \neq 0$ a danú na $D(a,r)$ radom

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

tak pre všetky $z \in D'(a,r)$ je

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n,$$

pričom koeficient $c_{-m} = b_0 = g(a)$ pri $(z-a)^{-m}$ je nenulový. Tvrdenia (*i*) a (*ii*) sú teda ekvivalentné.

Zostáva dokázať ekvivalenciu tvrdenia (*iii*) s predchádzajúcimi dvoma tvrdeniami. Z platnosti (*ii*) a spojitosti holomorfnej funkcie g v bode a vyplýva

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^m g(z)}{(z-a)^m} = g(a),$$

kde $g(a) \neq 0$; tvrdenie (*ii*) teda implikuje (*iii*).

Nech naopak platí (*iii*) a $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je také, že

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m = C.$$

Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom existuje $\delta > 0$ také, že f je holomorfná na $D'(a,\delta)$ a pre všetky $w \in D'(a,\delta)$ je

$$|f(w)(w-a)^m - C| < \varepsilon;$$

pre ľubovoľné reálne číslo η spĺňajúce $\delta/2 < \eta < \delta$ a všetky $w \in \kappa(a,\eta)^*$ teda aj

$$|f(w)| < \frac{2^m(|C| + \varepsilon)}{\delta^m}.$$

Ak teda $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, pre $n < -m$ dostávame

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,\eta)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \delta \cdot \frac{2^{m+n+1}(|C| + \varepsilon)}{\delta^{m+n+1}} = \frac{2^{m+n+1}(|C| + \varepsilon)}{\delta^{m+n}}$$

a keďže $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ môžu byť ľubovoľne malé, nutne $c_n = 0$. Naopak ale

$$C = \lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m = \lim_{z \to a} \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} = \lim_{z \to a} \left(c_{-m} + \sum_{n=-m+1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} \right) = c_{-m},$$

z čoho $c_{-m} = C \neq 0$. Tvrdenie (iii) teda implikuje (i), čím je dôkaz dokončený. □

Môžeme teraz sformulovať relatívne dôležité tvrdenie dávajúce do súvisu korene a póly.

Tvrdenie 9.4.2. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$ a $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom má funkcia f v bode a koreň rádu m práve vtedy, keď má funkcia $1/f$ v bode a pól rádu m.*

Dôkaz. Ak má holomorfná funkcia f v bode a koreň rádu m, existuje $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,r)$ je

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde $c_m \neq 0$. Funkcia f potom musí byť pre nejaké δ spĺňajúce $0 < \delta \leq r$ nenulová na prstencovom okolí $D'(a,\delta)$ bodu a; v opačnom prípade by totiž bod a bol hromadným bodom množiny koreňov funkcie f, z lemy 8.2.1 by sme dostali nulovosť tejto funkcie na $D(a,r)$ a z jednoznačnosti koeficientov Taylorovho rozvoja by vyplynulo $c_m = 0$. Z toho vyplýva, že funkcia $1/f$ je holomorfná na $D'(a,\delta)$. Podľa tvrdenia 8.1.3 navyše existuje funkcia g holomorfná na $D(a,r)$ taká, že pre $z \in D(a,r)$ je $f(z) = (z-a)^m g(z)$ a $g(a) \neq 0$. Funkcia g pritom musí byť nenulová na $D(a,\delta)$, pretože v opačnom prípade by funkcia f nebola nenulová na $D'(a,\delta)$. Pre všetky $z \in D'(a,\delta)$ teda

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m g(z)} = \frac{1/g(z)}{(z-a)^m}$$

a keďže je $1/g$ holomorfná na $D(a,\delta)$ a $1/g(a) \neq 0$, je a pólom rádu m funkcie $1/f$ podľa tvrdenia 9.4.1.

Ak má naopak funkcia $1/f$ v bode a pól rádu m, existuje $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(a,r)$ je

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n(z-a)^n,$$

kde $d_{-m} \neq 0$. Funkcia

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n-m}(z-a)^n$$

je potom holomorfná na $D(a,r)$, pričom $g(a) = d_{-m} \neq 0$ a pre všetky $z \in D'(a,r)$ je

$$g(z) = \frac{(z-a)^m}{f(z)}.$$

Zo spojitosti tejto funkcie teda vyplýva existencia reálneho čísla δ takého, že $0 < \delta \leq r$ a funkcia g je na $D(a,\delta)$ nenulová. Na $D(a,\delta)$ je potom holomorfná aj funkcia $1/g(z)$, pričom evidentne $1/g(a) \neq 0$. Keďže navyše

$$f(z) = \left(\frac{1}{g(z)}\right)(z-a)^m$$

pre všetky $z \in D'(a,\delta)$ a funkcie na oboch stranách tejto rovnosti sú holomorfné v a, platí táto rovnosť podľa vety o jednoznačnosti pre všetky $z \in D(a,\delta)$ a funkcia f má podľa tvrdenia 8.1.3 v bode a koreň rádu m. □

9.5 Meromorfné funkcie

Zakončíme túto kapitolu definíciou dôležitej triedy *meromorfných funkcií* – funkcia je meromorfná na $T \subseteq \mathbb{C}$, ak je holomorfná na T s výnimkou nejakej množiny izolovaných bodov, ktoré sú pólmi funkcie. Čitateľ bude mať príležitosť preskúmať niektoré vlastnosti týchto funkcií v rámci cvičení.

Definícia 9.5.1. Nech S je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia. Hovoríme, že funkcia f je *meromorfná* v bode $a \in \mathbb{C}$, ak nastane jedna z nasledujúcich dvoch možností:

(i) Bod a patrí do S a funkcia f je holomorfná v a.

(ii) Funkcia f má v a pól.

Hovoríme, že funkcia f je *meromorfná* na množine $T \subseteq \mathbb{C}$, ak je meromorfná v každom bode $a \in T$.

Príklad 9.5.2. Každá racionálna funkcia f je (po odstránení prípadných odstrániteľných singularít) meromorfná na $\mathbb{C}$. Ak totiž

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

pre nejaké polynomické funkcie $p, q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kde funkcia q nie je konštantne nulová a množina jej koreňov je daná ako $Z(q) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, je funkcia f evidentne holomorfná na $\mathbb{C} \setminus Z(q)$. Ak je navyše pre $k = 1, \ldots, n$ koreň α_k funkcie q rádu $m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existuje polynomická funkcia $\hat{q}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taká, že $\hat{q}(\alpha_k) \neq 0$ a pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $q(z) = (z-\alpha_k)^{m_k}\hat{q}(z)$. Ak súčasne $p(\alpha_k) \neq 0$, existuje $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(\alpha_k, r)$ je

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-\alpha_k)^{m_k}\hat{q}(z)},$$

pričom funkcia $p(z)/\hat{q}(z)$ je holomorfná na $D(\alpha_k, r)$ a $p(\alpha_k)/\hat{q}(\alpha_k) \neq 0$. V dôsledku toho je podľa tvrdenia 9.4.1 bod α_k pólom funkcie f rádu m_k. Ak naopak $p(\alpha_k) = 0$, je α_k koreňom funkcie p rádu $m'_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, v dôsledku čoho existuje polynomická funkcia $\hat{p}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taká, že $\hat{p}(\alpha_k) \neq 0$ a pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $p(z) = (z-\alpha_k)^{m'_k}\hat{p}(z)$. Existuje teda $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(\alpha_k, r)$ je

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(z-\alpha_k)^{m'_k}\hat{p}(z)}{(z-\alpha_k)^{m_k}\hat{q}(z)} = (z-\alpha_k)^{m'_k - m_k}\frac{\hat{p}(z)}{\hat{q}(z)},$$

kde funkcia $\hat{p}(z)/\hat{q}(z)$ je holomorfná na $D(\alpha_k, r)$ a $\hat{p}(\alpha_k)/\hat{q}(\alpha_k) \neq 0$. Ak teda $m'_k \geq m_k$, je bod α_k odstrániteľnou singularitou funkcie f; ak $m'_k < m_k$, ide o pól funkcie f rádu $m_k - m'_k$. Funkcia f je teda po odstránení prípadných odstrániteľných singularít naozaj meromorfná na $\mathbb{C}$.

Cvičenia

1. Nájdite Laurentove rozvoje nasledujúcich funkcií $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ v bode $a = 0$:

   a) $f_1(z) = (\sin z)/z$;
   b) $f_2(z) = (\cos z)/z$;
   c) $f_3(z) = (\sin z)/z^5$;
   d) $f_4(z) = \cos(1/z^2)$.

   V každom z uvedených prípadov je bod $a = 0$ izolovanou singularitou danej funkcie – zistite pre jednotlivé funkcie druh tejto izolovanej singularity.

2. Nájdite Laurentov rozvoj funkcie

   $$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

   v bode $a = 0$ konvergentný na medzikruží:

   a) $A_1 = D'(0, 1)$;
   b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$;
   c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < r\}$ pre ľubovoľné $r > 2$.

3. Nech f je holomorfná na $D'(a, r)$ pre nejaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Dokážte, že funkcia f je holomorfná v bode a práve vtedy, keď $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.

4. Nech f je analytická v bode 0. Pozorujte, že funkcia $1/f$ je analytická v bode 0 práve vtedy, keď $f(0) \neq 0$. Nech navyše pre nejaké $r > 0$ a všetky $z \in D(a, r)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Nájdite Maclaurinov rad funkcie $1/f$ (vyjadrite jeho koeficienty pomocou koeficientov $a_0, a_1, a_2 \ldots$).

5. Funkcia *kosekans* je pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ daná predpisom

   $$\operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}.$$

   Nájdite prvých niekoľko členov Laurentových radov funkcií $\operatorname{cosec} z$ a $\operatorname{cosec}^2 z$ v bode $a = 0$. Vysvetlite, ako by ste opísali n-té členy týchto radov.

6. Nech $a \in \mathbb{C}$ je pól funkcie f. Dokážte, že v takom prípade $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ – t. j. $|f(z)|$ pre $z \to a$ rastie nad všetky medze.

7. Dokážte *Casoratiho-Weierstrassovu vetu*: ak $a \in \mathbb{C}$ je podstatná izolovaná singularita funkcie f holomorfnej na nejakom prstencovom okolí $D'(a, r)$ bodu a, tak pre každé $\ell \in \mathbb{C}$ existuje postupnosť bodov $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ z $D'(a, r)$ taká, že $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.

8. Charakterizujte funkcie meromorfné na $T \subseteq \mathbb{C}$ pomocou Laurentových rozvojov v bodoch $a \in T$.

9. Nech $T \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a f, g sú funkcie meromorfné na T. Dokážte, že v takom prípade sú po odstránení prípadných odstrániteľných singularít na T meromorfné aj funkcie $f + g$ a $f \cdot g$. Charakterizujte Laurentove rozvoje funkcií $f + g$ a $f \cdot g$ v bode $a \in T$ pomocou Laurentových rozvojov funkcií f a g.

10. Nech $T \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a f je funkcia meromorfná na T. Dokážte, že v takom prípade je po odstránení prípadných odstrániteľných singularít na T meromorfná aj funkcia $1/f$. Charakterizujte Laurentov rozvoj funkcie $1/f$ v bode $a \in T$ pomocou Laurentovho rozvoja funkcie f.

11. Nech $T \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť.

    a) Dokážte, že množina $\mathbf{H}(T)$ funkcií holomorfných na T tvorí spolu s bežnými operáciami sčítania a násobenia funkcií obor integrity.

    b) Dokážte, že množina $\mathbf{M}(T)$ funkcií meromorfných na T tvorí spolu s operáciami sčítania a násobenia funkcií, nasledovaných odstránením prípadných odstrániteľných singularít, pole.

Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je neohraničená oblasť. Potom hovoríme, že funkcia $f\colon S \to \mathbb{C}$ má v nekonečne izolovanú singularitu nejakého druhu, ak má izolovanú singularitu tohto druhu v bode 0 funkcia $\tilde{f}\colon T \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in T = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 1/z \in S\}$ ako $\tilde{f}(z) := f(1/z)$. Hovoríme tiež, že funkcia f je *holomorfná na* $\tilde{\mathbb{C}}$, ak ide o celú funkciu s odstrániteľnou singularitou v nekonečne a *meromorfná na* $\tilde{\mathbb{C}}$, ak ide o funkciu meromorfnú na $\mathbb{C}$, ktorá má v nekonečne odstrániteľnú singularitu alebo pól.

12. Nájdite druh izolovanej singularity v nekonečne pre funkciu:

    a) $f_1(z) = z^5$;

    b) $f_2(z) = 1/z^5$;

    c) $f_3(z) = \sin z$;

    d) $f_4(z) = \sin(1/z)$.

13. Dokážte, že:

    a) Každá funkcia holomorfná na $\tilde{\mathbb{C}}$ je konštantná.

    b) Každá funkcia meromorfná na $\tilde{\mathbb{C}}$ je racionálna.

Kapitola 10

Cauchyho integrálny vzorec II a Cauchyho integrálna veta II

Naše ďalšie úvahy začneme definíciou *indexu bodu vzhľadom ku krivke*, pomocou ktorého bude možné exaktne merať „počet ovinutí" uzavretej po častiach hladkej krivky okolo daného bodu,[1] ako aj poriadne – t. j. bez odkazu na matematicky pofidérne pojmy, akými sú smer hodinových ručičiek alebo ľavá a pravá strana – definovať orientáciu jednoduchej uzavretej krivky.

S použitím tohto pojmu ďalej dokážeme zatiaľ najvšeobecnejšiu verziu Cauchyho integrálneho vzorca, ktorá navyše *nebude* predpokladať platnosť Jordanovej ani Jordanovej-Schoenfliesovej vety – namiesto pokusov o topologické uchopenie pojmov ako „krivka obkolesujúca daný bod" totiž priamo v jej formulácii využijeme pojem indexu, ktorého nenulovosť bude známkou toho, že krivka daný bod aspoň raz ovinie. Nakoniec takto vylepšený Cauchyho integrálny vzorec použijeme na dôkaz všeobecných variantov Cauchyho integrálnej vety a vety o deformácii. Vo formulácii týchto viet nebude zmienka o žiadnej netriviálnej topologickej vlastnosti, akou je jednoduchá súvislosť – vlastnosť „neobkolesenia" žiadneho bodu mimo oblasti, na ktorej je funkcia holomorfná, vyjadríme len prostredníctvom relatívne elementárneho pojmu indexu. Text kapitoly čiastočne vychádza z [9, 11, 8].

10.1 Index bodu vzhľadom ku krivke

V predchádzajúcich kapitolách sme už niekoľkokrát narazili na integrál

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Ak je napríklad γ kladne orientovaná kružnica so stredom v a, je tento integrál rovný $2\pi i$. Rovnaká vlastnosť platí aj pre ľubovoľnú uzavretú po častiach hladkú krivku γ homotopickú v $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ s takouto kružnicou alebo – ak siahneme po Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vete – pre ľubovoľnú kladne orientovanú jednoduchú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $a \in \mathbf{I}(\gamma)$. Nech je γ daná ktorýmkoľvek z týchto spôsobov, bude mať integrál pozdĺž $\gamma+\gamma$ hodnotu $4\pi i$, integrál pozdĺž $\gamma+\gamma+\gamma$ bude $6\pi i$, atď. Naopak integrál pozdĺž $-\gamma$ bude $-2\pi i$ a podobne ako vyššie vieme nájsť hodnoty integrálov aj pozdĺž spojení niekoľkých takýchto kriviek.

Bez použitia Jordanovej vety nie je úplne jasné, čo si predstaviť pod „počtom ovinutí" krivky γ okolo $a \in \mathbb{C}$. Túto veličinu však môžeme *definovať* na základe vyššie uvedených pozorovaní – dostávame sa tak k dôležitému pojmu *indexu bodu vzhľadom ku krivke.*

Definícia 10.1.1. Nech γ je uzavretá po častiach hladká krivka a $a \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$. *Indexom bodu a vzhľadom ku krivke* γ nazveme hodnotu

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

[1] V angličtine sa preto pre index používa aj pomenovanie *winding number.*

Príklad 10.1.2. $\mathrm{Ind}_{\kappa(0,1)}(1/2) = 1$, $\mathrm{Ind}_{-\kappa(0,1)}(1/2) = -1$ a $\mathrm{Ind}_{\kappa(0,1)+\kappa(0,1)}(1/2) = 2$.

Pojem indexu môžeme využiť aj na definíciu orientácie jednoduchej uzavretej krivky – stačí si všimnúť, že pre kladne orientované kružnice a s nimi homotopické krivky je index ľubovoľného bodu v ich vnútri vzhľadom k nim rovný jednej. *S použitím Jordanovej vety* teda možno orientáciu jednoduchej uzavretej po častiach hladkej krivky γ definovať napríklad takto: γ je *kladne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$ a *záporne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = -1$.

My však uprednostníme nasledujúcu ekvivalentnú definíciu orientácie, ktorá – hoci je o niečo ťažšie čitateľná, než tá opísaná vyššie – neobsahuje implicitnú odvolávku na Jordanovu vetu.

Definícia 10.1.3. Nech γ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka. Hovoríme, že γ je *kladne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \geq 0$ a *záporne orientovaná*, ak pre všetky $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \leq 0$.

10.2 Integrálna reprezentácia logaritmov

Za účelom skúmania ďalších vlastností indexu budeme potrebovať vetu o integrálnej reprezentácii holomorfných vetiev prirodzeného logaritmu. Z oddielu 3.6 vieme, že holomorfné vetvy logaritmu na oblasti S – t. j. holomorfné funkcie $f\colon S \to \mathbb{C}$ také, že pre všetky $z \in S$ je $f(z) \in [\![\ln z]\!]$ – môžeme definovať kedykoľvek $S = \mathbb{C} \setminus R$, kde R je polpriamka začínajúca v bode 0. Z toho vyplýva, že holomorfné vetvy logaritmu môžeme definovať aj na ľubovoľnej konvexnej oblasti neobsahujúcej bod 0.

Nasledujúcu vetu sformulujeme pre ľubovoľnú oblasť S, na ktorej možno definovať holomorfnú vetvu logaritmu – môže teda ísť napríklad o oblasť $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ – a špeciálne pre ľubovoľnú konvexnú oblasť neobsahujúcu bod 0.

Veta 10.2.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je ľubovoľná oblasť, na ktorej je možné definovať holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu – alebo špeciálne ľubovoľná konvexná oblasť neobsahujúca bod 0. Nech $\ln_S\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná vetva prirodzeného logaritmu na S, t. j. $\ln_S$ je holomorfná a pre všetky $z \in S$ je $\ln_S(z) \in [\![\ln z]\!]$. Pre ľubovoľnú po častiach hladkú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = z$ potom*

$$\int_\gamma \frac{1}{w}\, \mathrm{d}w = \ln_S(z) - \ln_S(a).$$

Ak teda navyše $1 \in S$, $\gamma(\alpha) = 1$ a $\ln_S(1) = 0$, tak

$$\ln_S(z) = \int_\gamma \frac{1}{w}\, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Holomorfnú vetvu logaritmu možno definovať len pre oblasti S také, že $0 \notin S$; znenie vety teda dáva zmysel. Zjavne stačí dokázať iba jej prvú časť. V oddiele 3.6 sme ale dokázali, že pre všetky $k \in \mathbb{Z}$ a $w \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ je $\ln_k'(w) = 1/w$, pričom rovnaký argument evidentne možno použiť aj pre uvažovanú holomorfnú vetvu $\ln_S$: pre všetky $w \in S$ je

$$\ln_S'(w) = \frac{1}{w}.$$

Dokazované tvrdenie teda vyplýva priamo zo základnej vety o krivkových integráloch. $\square$

10.3 Index a spojitý výber argumentu

Hoci je význam indexu intuitívne zrejmý, ozajstné odôvodnenie použitia tohto konceptu na meranie „počtu ovinutí" uzavretej krivky okolo bodu poskytuje až nasledujúca veta, ktorá ho dáva do súvisu so *spojitým výberom argumentu* pozdĺž uzavretej krivky γ.

Veta 10.3.1. *Nech* $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ *je uzavretá po častiach hladká krivka a* $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *je bod. Potom existuje spojitá funkcia* $\eta\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *taká, že pre všetky* $t \in [\alpha,\beta]$ *je* $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t)-a)]\!]$ *a*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\left(\eta(\beta) - \eta(\alpha)\right).$$

Dôkaz. Nech S je ľubovoľná oblasť taká, že $\gamma^* \subseteq S$ a $a \notin S$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $D(z,\varepsilon) \subseteq S$. Nie je ťažké dokázať, že existuje $n \in \mathbb{N}$ a reálne čísla $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ také, že $\gamma^* \subseteq D_0 \cup \ldots \cup D_{n-1} \subseteq S$, kde pre $k = 0,\ldots,n-1$ je $D_k := D(\gamma(t_k),\varepsilon)$.[2]

Pre $k = 0,\ldots,n-1$ označme ako γ_k krivku $\gamma \restriction [t_k,t_{k+1}]$ a ako $\ln^{[k]}$ ľubovoľnú vetvu prirodzeného logaritmu takú, že $\ln^{[k]}(z-a)$ je holomorfná na D_k. Pre $z \in D_k$ potom

$$\ln^{[k]}(z-a) = \ln|z-a| + i\theta^{[k]}(z-a),$$

kde $\theta^{[k]}$ je funkcia taká, že $\theta^{[k]}(z-a)$ je spojitá na D_k a pre všetky $z \in D_k$ je $\theta^{[k]}(z-a) \in [\![\arg(z-a)]\!]$.

Pre $k = 0,\ldots,n-1$ definujme funkciu $\eta_k\colon [t_k,t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ pre všetky $t \in [t_k,t_{k+1}]$ predpisom $\eta_k(t) = \theta^{[k]}(\gamma(t)-a)$. Keďže sú funkcie $\theta^{[k]}$ a γ spojité, je spojitá aj funkcia η_k. Funkciu $\eta\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ teraz môžeme definovať pre $k = 0,\ldots,n-1$ a všetky $t \in [t_k,t_{k+1}]$ ako

$$\eta(t) = \eta_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta_j(t_j) - \eta_{j-1}(t_j)\right);$$

je zrejmé, že takto získame funkciu spojitú na $[\alpha,\beta]$. Od hodnoty $\eta_k(t)$ navyše vždy odpočítavame nejaký celočíselný násobok čísla 2π; pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ teda $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t)-a)]\!]$. Z vety 10.2.1 nakoniec dostávame

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_\gamma(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ln^{[k]}(\gamma(t_{k+1})-a) - \ln^{[k]}(\gamma(t_k)-a)\Big) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(i\theta^{[k]}(\gamma(t_{k+1})-a) - i\theta^{[k]}(\gamma(t_k)-a)\Big) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\eta_k(t_{k+1}) - \eta_k(t_k)\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\eta(\beta) - \eta(\alpha)\right),
\end{aligned}$$

čím je dôkaz vety dokončený. □

Dôsledok 10.3.2. *Nech* $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ *je uzavretá po častiach hladká krivka a* $a \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$ *je bod. Potom je* $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$ *celé číslo.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva existencia spojitej funkcie $\eta\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ takej, že pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ je $\eta(t) \in [\![\arg(\gamma(t)-a)]\!]$ a $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \left(\eta(\beta) - \eta(\alpha)\right)/2\pi$. Keďže ale $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nutne $\eta(\beta) - \eta(\alpha) = 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, z čoho už priamo vyplýva celočíselnosť hodnoty $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$. □

[2] Ide o náplň cvičenia 1 na konci tejto kapitoly.

10.4 Zámena poradia integrovania

Než prejdeme k hlavným výsledkom tejto kapitoly – teda k všeobecnému Cauchyho integrálnemu vzorcu a Cauchyho integrálnej vete – dokážeme tri na seba nadväzujúce tvrdenia o integráloch, z ktorých posledné sa nám pri dôkaze všeobecného Cauchyho integrálneho vzorca zíde. Dôkazy tvrdenia 10.4.1 a tvrdenia 10.4.2 sú prevzaté z [3], kde sa o problematike zámeny integrálov v reálnej analýze možno dočítať viac.

Nech $X, T \subseteq \mathbb{R}$. Pripomeňme si, že funkcia $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$ je spojitá na $X \times T$, ak pre každé $(x,t) \in X \times T$ a všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $(x',t') \in X \times T$ s $|x - x'| < \delta$ a $|t - t'| < \delta$ je $|f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon$. Z toho špeciálne vyplýva, že pre každé $t \in T$ je spojitá funkcia $f(\cdot, t)$ premennej x a súčasne je pre každé $x \in X$ spojitá funkcia $f(x, \cdot)$ premennej t.

Tvrdenie 10.4.1. *Nech $a \le b$ sú reálne čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom existuje $c \in [a,b]$ také, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Dôkaz. Pre $a = b$ je tvrdenie triviálne. Predpokladajme teda, že $a < b$. Nech $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Potom

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a),$$

z čoho

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M.$$

Funkcia f spojitá na uzavretom intervale $[a,b]$ musí na $[a,b]$ aspoň raz nadobudnúť hodnotu m, ako aj hodnotu M. Preto na $[a,b]$ aspoň raz nadobúda každú hodnotu z intervalu $[m,M]$; špeciálne teda existuje aj $c \in [a,b]$ také, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

čiže

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tým je lema dokázaná. □

Nasledujúce tvrdenie je špeciálnym prípadom takzvanej *Fubiniho vety* z teórie miery a integrálu.

Tvrdenie 10.4.2. *Nech $a \le b$ a $c \le d$ sú reálne čísla a $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b] \times [c,d]$. Potom*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Pre každé $x \in [a,b]$ je funkcia $f(x,\cdot)$ spojitá na uzavretom intervale $[c,d]$, a teda musí byť rovnomerne spojitá. Pre všetky $\varepsilon > 0$ teda existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\alpha, \beta \in [c,d]$ s $|\alpha - \beta| < \delta$ je $|f(x,\alpha) - f(x,\beta)| < \varepsilon$. Funkcia

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

je teda (rovnomerne) spojitá na $[c,d]$, lebo pre všetky $\alpha, \beta \in [c,d]$ s $|\alpha - \beta| < \delta$ je

$$|F(\alpha) - F(\beta)| = \left|\int_a^b \left(f(x,\alpha) - f(x,\beta)\right)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon(b-a).$$

Podobne možno dokázať, že funkcia
$$G(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
je spojitá na $[a,b]$. Všetky integrály zo znenia lemy teda existujú.

Prakticky rovnako ako pre funkcie jednej reálnej premennej definované na uzavretom intervale – prípadne ako pre homotópie v tvrdení 5.3.2 – by sme navyše dokázali, že aj samotná funkcia f, spojitá na kompaktnej množine $[a,b]\times[c,d]$, musí byť rovnomerne spojitá: pre všetky $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ také, že pre všetky $(x,t),(x',t')\in[a,b]\times[c,d]$ s $|x-x'|<\delta$ a $|t-t'|<\delta$ je $|f(x,t)-f(x',t')|<\varepsilon$. Pre dané $\varepsilon>0$ zvoľme $n\in\mathbb{N}$ tak, aby platili nerovnosti
$$\frac{b-a}{n}<\delta \qquad \text{a} \qquad \frac{d-c}{n}<\delta$$
a pre $j=0,\dots,n$ položme $a_j=a+(b-a)j/n$ a $c_j=c+(d-c)j/n$. Potom
$$\int_c^d\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\int_{c_{j-1}}^{c_j}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{10.1}$$
Pre $k=1,\dots,n$ a $j=1,\dots,n$ teraz dvojnásobným aplikovaním tvrdenia 10.4.1 zisťujeme, že existujú čísla $x_k\in[a_{k-1},a_k]$ a $t_j\in[c_{j-1},c_j]$ také, že
$$\int_{c_{j-1}}^{c_j}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=f(x_k,t_j)(a_k-a_{k-1})(c_j-c_{j-1}).$$
Z (10.1) potom
$$\int_c^d\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n f(x_k,t_j)(a_k-a_{k-1})(c_j-c_{j-1}).$$

Analogickou argumentáciou možno dokázať, že pre $k=1,\dots,n$ a $j=1,\dots,n$ existujú čísla $x'_k\in[a_{k-1},a_k]$ a $t'_j\in[c_{j-1},c_j]$ také, že
$$\int_a^b\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n f(x'_k,t'_j)(a_k-a_{k-1})(c_j-c_{j-1}).$$
Vďaka voľbe čísla n potom
$$\begin{aligned}\left|\int_c^d\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_a^b\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right| &=\\ =\left|\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\left(f(x_k,t_j)-f(x'_k,t'_j)\right)(a_k-a_{k-1})(c_j-c_{j-1})\right| &<\\ <\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\varepsilon(a_k-a_{k-1})(c_j-c_{j-1})=\varepsilon(b-a)(d-c).\end{aligned}$$
Keďže môže byť $\varepsilon>0$ ľubovoľne malé, nutne
$$\int_c^d\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_a^b\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$
čo bolo treba dokázať. □

Tvrdenie 10.4.3. *Nech $S, T \subseteq \mathbb{C}$ sú otvorené množiny, $f\colon S \times T \to \mathbb{C}$ je spojitá na $S \times T$ a γ_1, γ_2 sú po častiach hladké krivky také, že $\gamma_1^* \subseteq S$ a $\gamma_2^* \subseteq T$. Potom*

$$\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(z,w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Vďaka linearite krivkových integrálov stačí uvažovať prípad, keď sú krivky γ_1 a γ_2 hladké. Vďaka vete o reparametrizácii ďalej možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sú tieto krivky dané zobrazeniami $\gamma_1\colon [0,1] \to S$ a $\gamma_2\colon [0,1] \to T$. Z definície krivkového integrálu potom

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\,\mathrm{d}x\,\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Keďže sú krivky γ_1 a γ_2 hladké, je funkcia $g(x,t) = f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t)$ spojitá na $[0,1] \times [0,1]$. Tvrdenie 10.4.2 možno priamočiaro rozšíriť aj na prípad spojitých komplexných funkcií dvoch reálnych premenných; preto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} f(z,w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(\gamma_1(x), \gamma_2(t))\gamma_1'(x)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(z,w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

10.5 Všeobecný Cauchyho integrálny vzorec

Postupne teraz využijeme pojem indexu bodu vzhľadom ku krivke na sformulovanie a dôkaz všeobecnej verzie Cauchyho integrálneho vzorca. Hoci samotný dôkaz bude o niečo zdĺhavejší, než tomu bolo pri predchádzajúcich variantoch Cauchyho integrálneho vzorca, z hľadiska použitých metód pôjde o pomerne elementárny výsledok. Jeho formulácia ani dôkaz nebudú závisieť od nedokázaných tvrdení ako Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta a samotné znenie vety sa zaobíde aj bez relatívne pokročilých topologických pojmov, akými sú homotópie a jednoducho súvislé oblasti.

Varianty Cauchyho integrálneho vzorca, s ktorými sme sa stretli doposiaľ, vyjadrovali hodnotu $f(a)$ holomorfnej funkcie $f\colon S \to \mathbb{C}$ na oblasti S v bode $a \in S$ pomocou integrálu pozdĺž kladne orientovanej jednoduchej uzavretej krivky γ obkolesujúcej bod a, avšak neobkolesujúcej žiaden bod $b \notin S$ – prípadne pozdĺž nejakej uzavretej krivky, ktorá je v $S \setminus \{a\}$ s takouto krivkou homotopická. Vo všeobecnom Cauchyho integrálnom vzorci už uzavretá krivka γ obkolesujúca bod a nebude nutne jednoduchá a kladne orientovaná – bod a teda napríklad môže ovinúť aj viackrát, a to prípadne aj „v smere hodinových ručičiek“. To sa v znení vety prejaví tým, že namiesto samotnej hodnoty $f(a)$ budeme integrálom vyjadrovať súčin

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) f(a).$$

Podmienku neobkolesenia žiadneho bodu $b \notin S$ uzavretou krivkou γ napokon vyjadríme požiadavkou $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$ pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$.

V skutočnosti ale bude takýto Cauchyho integrálny vzorec až naším dôsledkom 10.5.4. V samotnej vete 10.5.3 budeme pracovať s ešte ďalším drobným zovšeobecnením uvedeného: namiesto pre uzavreté krivky ju totiž sformulujeme pre tzv. *cykly.*

Reťazou nazveme ľubovoľnú konečnú postupnosť $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sú po častiach hladké krivky. Píšeme potom $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$. Pre funkciu f spojitú na oblasti S s $\Gamma^* \subseteq S$ *definujeme*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Integrujeme teda „pozdĺž niekoľkých kriviek naraz“. Uvedená notácia nie je úplne jednoznačná, pretože $+$ môže označovať ako spojenie kriviek, tak aj “formálne $+$” z definície reťaze. Nie je to však na škodu, pretože v situáciách, keď táto nejednoznačnosť prichádza do úvahy, sú hodnoty integrálov pri obidvoch interpretáciách tie isté.

Na reťaziach možno zaviesť podobné operácie ako na krivkách: pre reťaze $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ a $\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 + \ldots + \hat{\gamma}_m$ píšeme $-\Gamma = (-\gamma_1) + \ldots + (-\gamma_n)$ a $\Gamma + \hat{\Gamma} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n + \hat{\gamma}_1 + \ldots + \hat{\gamma}_m$. *Dĺžku* $L(\Gamma)$ reťaze $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ definujeme ako $L(\Gamma) = L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_n)$.

Cyklom nazveme reťaz $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ takú, že všetky po častiach hladké krivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sú uzavreté. Na cykly možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj pojem indexu: pre všetky $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ kladieme

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Pre cyklus $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ pritom

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(a).$$

Všeobecný Cauchyho integrálny vzorec sformulovaný v reči uzavretých kriviek – t. j. dôsledok 10.5.4 nižšie – dostaneme z vety 10.5.3 obmedzením sa na cykly pozostávajúce z jedinej uzavretej krivky. Keďže naopak integrál pozdĺž cyklu dostaneme súčtom niekoľkých integrálov pozdĺž uzavretých kriviek, mohlo by sa zovšeobecnenie z uzavretých kriviek na cykly zdať na prvý pohľad pomerne lacným. V skutočnosti ale *veta 10.5.3 z dôsledku 10.5.4 nijak bezprostredne vyplývať nebude*: ak totiž cyklus $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ spĺňa podmienku $\mathrm{Ind}_\Gamma(b) = 0$ pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$, *nemusí* byť obdobná podmienka splnená aj pre uzavreté krivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, ktoré v skutočnosti bod b mimo oblasti S obkolesovať môžu. Napríklad môže byť $\Gamma = \gamma + (-\gamma)$, kde $\mathrm{Ind}_\gamma(b) \neq 0$; potom

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(b) = \mathrm{Ind}_\gamma(b) + \mathrm{Ind}_{-\gamma}(b) = \mathrm{Ind}_\gamma(b) - \mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0.$$

Veta 10.5.3 tak bude okrem všetkých situácií explicitne alebo implicitne zahrnutých v dôsledku 10.5.4 zahŕňať aj niektoré fundamentálne odlišné situácie – a práve vďaka nim je zovšeobecnenie na cykly opodstatnené. Jednou z aplikácií tohto prístupu bude aj variant vety o deformácii v znení vety 10.7.1, ktorý by sme iba s použitím dôsledku 10.5.4 tak ľahko nedokázali.

Než ale vyslovíme samotnú vetu 10.5.3 o všeobecnej verzii Cauchyho integrálneho vzorca, dokážme dve lemy, ktoré budeme pri jej dôkaze potrebovať.

Lema 10.5.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na S. Funkcia $g\colon S \times S \to \mathbb{C}$, daná pre všetky $z, w \in S$ predpisom*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{ak } w \neq z, \\ f'(z) & \text{ak } w = z, \end{cases}$$

je potom spojitá na $S \times S$: pre všetky $(z,w) \in S \times S$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $(u,v) \in S \times S$ spĺňajúce $u \in D(z,\delta)$ a $v \in D(w,\delta)$ je $|g(u,v) - g(z,w)| < \varepsilon$.

Dôkaz. Spojitosť funkcie g je zrejmá vo všetkých bodoch $(z, w) \in S \times S$ takých, že $z \neq w$ – zostáva dokázať jej spojitosť v bodoch (a, a) pre $a \in S$. Nech teda $a \in S$ je pevné a $\varepsilon > 0$. Zo spojitosti funkcie f' v bode a potom pre nejaké $\delta > 0$ a všetky $\zeta \in D(a, \delta) \cap S$ dostávame $|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon$. Pre všetky $(u, v) \in S \times S$ také, že $u, v \in D(a, \delta)$ tak pre $u = v = b$ máme

$$|g(u,v) - g(a,a)| = |g(b,b) - g(a,a)| = \left|f'(b) - f'(a)\right| < \varepsilon;$$

ak navyše bez ujmy na všeobecnosti $D(a, \delta) \subseteq S$ a $u, v \in D(a, \delta)$ sú rôzne, s použitím vety o odhade zisťujeme, že

$$\begin{aligned}|v - u| \cdot |g(u,v) - g(a,a)| &= |(v-u)\,(g(u,v) - g(a,a))| = \left|(f(v) - f(u)) - (v-u)f'(a)\right| = \\ &= \left|\int_{[u,v]} f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[u,v]} f'(a)\,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{[u,v]} \left(f'(\zeta) - f'(a)\right)\,\mathrm{d}\zeta\right| < \\ &< |v-u|\varepsilon.\end{aligned}$$

V oboch prípadoch teda $|g(u,v) - g(a,a)| < \varepsilon$ a spojitosť funkcie g je dokázaná. □

Lema 10.5.2. *Nech Γ je cyklus. Na každej oblasti $S \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ je potom funkcia* Ind_Γ *konštantná. Navyše existuje $M > 0$ také, že na oblasti $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ je funkcia* Ind_Γ *konštantne nulová.*

Dôkaz. Funkcia $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ premennej z je podľa dôsledku 10.3.2 celočíselná. Dokážeme, že je táto funkcia súčasne spojitá na $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.

Nech $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ je dané pevne. Zvoľme oblasť $T \subseteq \mathbb{C}$ tak, aby bolo $\Gamma^* \subseteq T$ a $z \notin \overline{T}$. Nech $r > 0$ je také, že pre všetky $w \in T$ je $|w - z| > 2r$.

Uvažujme teraz ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ bodov z $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ takú, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Postupnosť funkcií $(1/(w - z_n))_{n=0}^{\infty}$ premennej w potom pre $n \to \infty$ konverguje k funkcii $1/(w - z)$ rovnomerne na T – keďže totiž $z_n \to z$ pre $n \to \infty$, pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je $|z_n - z| < \varepsilon$ a súčasne $|z_n - z| < r$. Pre všetky $w \in T$ potom ale tiež $|w - z_n| > r$, z čoho

$$\left|\frac{1}{w - z_n} - \frac{1}{w - z}\right| = \left|\frac{z_n - z}{(w - z_n)(w - z)}\right| < \frac{\varepsilon}{2r^2}.$$

Keďže je $r > 0$ fixná konštanta, je týmto rovnomerná konvergencia dokázaná. Vďaka vete 7.1.8 teda

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}_\Gamma(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - z_n}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lim_{n\to\infty} \frac{1}{w - z_n}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w = \mathrm{Ind}_\Gamma(z)$$

a funkcia Ind_Γ je spojitá v bode z vďaka vete 2.2.13 a tvrdeniu 2.2.6. Keďže je $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ ľubovoľné, je táto celočíselná funkcia spojitá na $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ – ako taká teda musí byť na ľubovoľnej oblasti konštantná.

Z kompaktnosti množiny Γ^* navyše vyplýva existencia konštanty $M > 0$ takej, že pre všetky $w \in \Gamma^*$ je $|w| \leq M$. Na oblasti $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ je funkcia Ind_Γ konštantná, pričom pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ súčasne z vety o odhade dostávame

$$|\mathrm{Ind}_\Gamma(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w\right| \leq \frac{1}{2\pi} L(\Gamma) \frac{1}{|z| - M}.$$

Keďže môže byť $|z|$ ľubovoľne veľké, pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ nutne $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$. □

Môžeme teraz vysloviť a dokázať samotný všeobecný variant Cauchyho integrálneho vzorca.

Veta 10.5.3 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia IV)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a Γ s $\Gamma^* \subseteq S \setminus \{a\}$ je cyklus taký, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\operatorname{Ind}_\Gamma(b) = 0$. Potom*

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-a}\, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Funkcia $g\colon S \times S \to \mathbb{C}$, daná pre všetky $z, w \in S$ predpisom

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{ak } w \neq z, \\ f'(z) & \text{ak } w = z, \end{cases}$$

je spojitá podľa lemy 10.5.1. Môžeme teda definovať funkciu $h\colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ predpisom

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, \mathrm{d}w.$$

Dokážeme, že pre $a \in S \setminus \Gamma^*$ je

$$h(a) = 0. \tag{10.2}$$

Potom už bude Cauchyho integrálny vzorec dokázaný, lebo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-a}\, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(g(a,w) + \frac{f(a)}{w-a} \right) \mathrm{d}w = h(a) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(a)}{w-a}\, \mathrm{d}w = \operatorname{Ind}_\Gamma(a) f(a).$$

K rovnosti (10.2) pritom prídeme tak, že funkciu h rozšírime na *celú* funkciu $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, o ktorej dokážeme, že je konštantne nulová.

Ako prvý krok k tomuto cieľu *dokážeme, že funkcia h je spojitá na S*. Nech $z \in S$ je pevné a $T \subseteq S$ je ohraničená otvorená množina taká, že $z \in T$, $\Gamma^* \subseteq T$ a $\overline{T} \subseteq S$. Funkcia g spojitá na $S \times S$ je potom na kompaktnej množine $\overline{T} \times \overline{T}$ nutne rovnomerne spojitá: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, w_1, z_2, w_2 \in \overline{T}$ spĺňajúce $|z_1 - z_2| < \delta$ a $|w_1 - w_2| < \delta$ je $|g(z_1, w_1) - g(z_2, w_2)| < \varepsilon$.[3] Uvažujme ale ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ prvkov $\overline{T}$ takú, že $z_n \to z$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je $|z_n - z| < \delta$. Z obidvoch zistení dohromady vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T}$ je $|g(z_n, w) - g(z, w)| < \varepsilon$. Postupnosť funkcií $(g(z_n, \cdot))_{n=0}^\infty$ teda na $\overline{T}$ konverguje rovnomerne k funkcii $g(z, \cdot)$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z_n, w)\, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} g(z_n, w)\, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, \mathrm{d}w = h(z)$$

a funkcia h je v bode z spojitá vďaka vete 2.2.13 a tvrdeniu 2.2.6. Keďže je $z \in S$ ľubovoľné, funkcia h je spojitá na S.

Ako ďalší krok *dokážeme, že funkcia h je holomorfná na S*. Funkcia $g(z,w)$ premennej z je pre fixné $w \in S$ holomorfná na S – pre $z \neq w$ je to očividné a v bode $z = w$ si vďaka dôsledku 9.3.3 a tvrdeniu 2.2.6 stačí uvedomiť, že z holomorfnosti funkcie f vyplýva $\lim_{z \to w} g(z,w) = g(w,w)$. Nech teraz γ_Δ je ľubovoľný trojuholník taký, že $\gamma_\Delta^* \subseteq S$. Zo spojitosti funkcie g a tvrdenia 10.4.3 potom

$$\int_{\gamma_\Delta} h(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_{\gamma_\Delta} g(z,w)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}w = 0,$$

pretože

$$\int_{\gamma_\Delta} g(z,w)\, \mathrm{d}z = 0$$

pre všetky $w \in S$ vďaka holomorfnosti funkcie $g(\cdot, w)$ a Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník. Keďže je funkcia h spojitá na S a trojuholník γ_Δ s obrazom v S je ľubovoľný, z Morerovej vety vyplýva, že aj funkcia h je holomorfná na S.

[3] Už po niekoľký raz tu narážame na špeciálny prípad tvrdenia o rovnomernej spojitosti každého spojitého zobrazenia na kompaktnom metrickom priestore. Čitateľ, ktorý s teóriou metrických priestorov nie je oboznámený, ho istotne ľahko dokáže podobným spôsobom ako pre spojité reálne funkcie definované na uzavretom intervale, resp. ako pre homotópie v tvrdení 5.3.2.

Nech ďalej $S' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$. Z predpokladov vety vyplýva $\mathbb{C} \setminus S \subseteq S'$, a teda aj $S \cup S' = \mathbb{C}$. Keďže je podľa lemy 10.5.2 funkcia $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ premennej z na ľubovoľnej oblasti konštantná, *je množina S' otvorená*. Z tej istej lemy tiež vyplýva, že *množina S' obsahuje všetky $z \in \mathbb{C}$ s dostatočne veľkou absolútnou hodnotou*.

Definujme teraz funkciu $\hat{h}\colon S' \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S'$ predpisom

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w.$$

Ukážeme, že $\hat{h}$ je spojitá na S'. Vezmime pevné $z \in S'$ a ohraničené otvorené množiny $T' \subseteq S'$ a $T \subseteq S$ také, že $z \in T'$ a $\Gamma^* \subseteq T$, pričom $\overline{T'} \subseteq S'$, $\overline{T} \subseteq S$ a $\overline{T'} \cap \overline{T} = \emptyset$. Funkcia $f(w)/(w - z)$ o premenných z a w (v tomto poradí) je očividne spojitá na $\overline{T'} \times \overline{T}$; je tam teda aj rovnomerne spojitá: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, z_2 \in \overline{T'}$ a $w_1, w_2 \in \overline{T}$ spĺňajúce nerovnosti $|z_1 - z_2| < \delta$ a $|w_1 - w_2| < \delta$ je $|f(w_1)/(w_1 - z_1) - f(w_2)/(w_2 - z_2)| < \varepsilon$. Uvažujme ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n=0}^\infty$ prvkov $\overline{T'}$ takú, že $z_n \to z$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je $|z_n - z| < \delta$. Dohromady dostávame, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T}$ je $|f(w)/(w - z_n) - f(w)/(w - z)| < \varepsilon$. Postupnosť funkcií $f(w)/(w - z_n)$ premennej w teda na $\overline{T}$ pre $n \to \infty$ konverguje rovnomerne k funkcii $f(w)/(w - z)$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \hat{h}(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f(w)}{w - z_n} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w = \hat{h}(z)$$

a funkcia $\hat{h}$ je v bode z spojitá. Keďže je $z \in S'$ ľubovoľné, je funkcia $\hat{h}$ spojitá na S'.

Ukážeme ešte, že $\hat{h}$ je holomorfná na S'. Pre pevné $w \in \Gamma^*$ je funkcia $f(w)/(w - z)$ očividne holomorfná na S' ako funkcia premennej z. Uvažujme ďalej ľubovoľný trojuholník γ_Δ s $\gamma_\Delta^* \subseteq S'$. Zjavne existujú otvorené množiny $T' \subseteq S'$ a $T \subseteq S$ také, že $\gamma_\Delta^* \subseteq T'$, $\Gamma^* \subseteq T$ a $T' \cap T = \emptyset$. Funkcia $f(w)/(w - z)$ o premenných z a w (v tomto poradí) je potom evidentne spojitá na $T' \times T$. S použitím tvrdenia 10.4.3 teda dostávame

$$\int_{\gamma_\Delta} \hat{h}(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_{\gamma_\Delta} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w = 0,$$

kde posledný krok je dôsledkom rovnosti

$$\int_{\gamma_\Delta} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}z = 0$$

vyplývajúcej z holomorfnosti funkcií $f(w)/(w - z)$ o premennej z pre pevné $w \in \Gamma^*$ a z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník. Keďže je však trojuholník γ_Δ ľubovoľný a funkcia $\hat{h}$ je na S' spojitá, vďaka Morerovej vete môžeme usúdiť na holomorfnosť funkcie $\hat{h}$ na S'.

Rozšírme teraz funkciu h na celú funkciu H. Pre všetky $z \in S \cap S'$ je

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w) \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \,\mathrm{d}w = \hat{h}(z) - f(z) \,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \hat{h}(z).$$

Možno teda korektne definovať funkciu $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{ak } z \in S, \\ \hat{h}(z) & \text{ak } z \in S'. \end{cases}$$

Z holomorfnosti funkcií h a $\hat{h}$ na otvorených množinách S resp. S' navyše vyplýva, že funkcia H je holomorfná na $\mathbb{C}$ – je to celá funkcia.

Zostáva dokázať, že funkcia H – a tým pádom aj funkcia h – je konštantne nulová. Tu však stačí využiť fakt, že množina S' obsahuje všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z| > M$ pre nejaké $M \geq 0$. Pre $z \in \mathbb{C}$ také, že $|z| > M$ teda

$$|H(z)| = \left|\hat{h}(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right| \leq \frac{1}{2\pi}L(\Gamma)\frac{M'}{|z|-M}, \tag{10.3}$$

kde $M' \geq 0$ je také, že pre všetky $w \in \Gamma^*$ je $|f(w)| \leq M'$. Funkcia H je v dôsledku toho ohraničená napríklad na množine $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M+1)$. Množina $\overline{D}(0, M+1)$ je ale kompaktná a spojitá funkcia H na nej musí byť taktiež ohraničená. Funkcia H je teda ohraničená na $\mathbb{C}$. Keďže je ale súčasne H celá, z Liouvillovej vety vyplýva jej konštantnosť na $\mathbb{C}$ a z (10.3) vyplýva, že touto konštantou musí byť nula. □

Explicitne ešte sformulujme špeciálny prípad vety 10.5.3, v ktorom namiesto integrálov pozdĺž cyklov uvažujeme iba integrály pozdĺž uzavretých po častiach hladkých kriviek.

Dôsledok 10.5.4 (Cauchyho integrálny vzorec, formulácia V). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S \setminus \{a\}$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$. Potom*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Stačí aplikovať vetu 10.5.3 na cyklus Γ pozostávajúci z jedinej uzavretej krivky γ. □

10.6 Všeobecná Cauchyho integrálna veta

Všeobecná Cauchyho integrálna veta je jednoduchým dôsledkom práve dokázaného všeobecného variantu Cauchyho integrálneho vzorca.

Veta 10.6.1 (Cauchyho integrálna veta, všeobecná verzia I). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a Γ s $\Gamma^* \subseteq S$ je cyklus taký, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\mathrm{Ind}_\Gamma(b) = 0$. Potom*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Nech $a \in S \setminus \Gamma^*$. Definujme funkciu $g\colon S \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in S$ ako $g(z) = (z-a)f(z)$. Potom $g(a) = 0$ a zo všeobecného Cauchyho integrálneho vzorca dostávame

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, g(a)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0,$$

čo bolo treba dokázať. □

Dôsledok 10.6.2 (Cauchyho integrálna veta, všeobecná verzia II). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz. Stačí aplikovať vetu 10.6.1 na cyklus Γ pozostávajúci z jedinej uzavretej krivky γ. □

10.7 Všeobecná veta o deformácii

Ďalším užitočným dôsledkom všeobecného variantu Cauchyho integrálneho vzorca je nasledujúci všeobecný variant vety o deformácii.

Veta 10.7.1 (Veta o deformácii, všeobecná verzia)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a Γ_1, Γ_2 s $\Gamma_1^*, \Gamma_2^* \subseteq S$ sú cykly také, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(b) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(b)$. Potom*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Uvažujme cyklus $\Gamma = \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$. Pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ potom

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(b) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(b) + \operatorname{Ind}_{-\Gamma_2}(b) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(b) - \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(b) = 0.$$

Z vety 10.6.1 teda

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

z čoho

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

a veta je dokázaná. □

Dôsledok 10.7.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a γ_1, γ_2 s $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq S$ sú uzavreté po častiach hladké krivky také, že pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(b) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(b)$. Potom*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Stačí aplikovať vetu 10.7.1 na cyklus Γ pozostávajúci z jedinej uzavretej krivky γ. □

Cvičenia

1. Nech S je oblasť, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$ krivka a $\varepsilon > 0$ je také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Dokážte, že existuje $n \in \mathbb{N}$ a reálne čísla $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ také, že pre $k = 0, \ldots, n-1$ a $D_k := D(\gamma(t_k), \varepsilon)$ je $\gamma^* \subseteq D_0 \cup \ldots \cup D_{n-1} \subseteq S$. (Môže byť užitočné vyriešiť najprv cvičenie 4 kapitoly 1.)

2. V dôkaze tvrdenia 10.4.2 sme využívali skutočnosť, že funkcia $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, spojitá na svojom definičnom obore $[a, b] \times [c, d]$, musí byť aj rovnomerne spojitá.[4] Dokážte toto tvrdenie podobným spôsobom ako pre funkcie jednej reálnej premennej, resp. ako pre homotópie v tvrdení 5.3.2.

3. Zistite, ktoré výsledky z predchádzajúcich kapitol boli v konečnom dôsledku použité na dôkaz vety 10.5.3. Pokúste sa identifikovať čo možno najjednoduchšiu cestu od základných poznatkov o holomorfných funkciách až po túto vetu.

[4] Ide pritom o špeciálny prípad tvrdenia, podľa ktorého sú rovnomerne spojité všetky spojité zobrazenia definované na kompaktnom metrickom priestore.

Kapitola 11

Rezíduá

Cauchyho vetu o rezíduách, ktorú v tejto kapitole dokážeme, možno z určitého pohľadu vnímať ako zastrešujúci výsledok klasickej teórie funkcií komplexnej premennej – okrem toho, že ide o silný nástroj na výpočet krivkových integrálov, je táto veta spoločným zovšeobecnením Cauchyho integrálnej vety, Cauchyho integrálneho vzorca, aj Cauchyho vzorca pre derivácie. S použitím Cauchyho vety o rezíduách následne dokážeme aj rad ďalších dôležitých teoretických výsledkov – *Cauchyho princíp argumentu*, *Rouchého vetu*, *vetu o otvorenom zobrazení* a *vetu o inverznej funkcii.*

11.1 Cauchyho veta o rezíduách

Základný poznatok potrebný na dôkaz Cauchyho vety o rezíduách už máme k dispozícii: ak je funkcia f holomorfná na prstencovom okolí $D'(a,r)$ bodu $a \in \mathbb{C}$ pre nejaké $r > 0$, možno ju na $D'(a,r)$ reprezentovať jej Laurentovým rozvojom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Koeficienty c_n sú pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ dané integrálnym vzorcom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde $0 < s < r$. V špeciálnom prípade $n = -1$ potom dostávame

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(a,s)} f(w) \, \mathrm{d}w = c_{-1}, \tag{11.1}$$

pričom kružnicu $\kappa(a,s)$ možno nahradiť aj ľubovoľnou inou uzavretou po častiach hladkou krivkou γ homotopickou v $D'(a,r)$ s touto kružnicou, prípadne – ak sa implicitne odvoláme na Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu – ľubovoľnou kladne orientovanou jednoduchou uzavretou po častiach hladkou krivkou γ s $\gamma^* \subseteq D'(a,r)$ takou, že bod a leží v jej vnútri. Vidíme teda, že koeficient c_{-1} je veľkého významu pre výpočet integrálov funkcie f pozdĺž kriviek okolo bodu a. Pre *meromorfné* funkcie je tento význam natoľko veľký, že si koeficient c_{-1} vyslúžil vlastné pomenovanie.

Definícia 11.1.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f \colon S \to \mathbb{C}$ je funkcia s pólom v bode $a \in \mathbb{C}$. Nech je pre nejaké $r > 0$ na prstencovom okolí $D'(a,r) \subseteq S$ funkcia f daná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $c_{-m} \neq 0$. *Rezíduum* funkcie f v bode a je potom koeficient

$$\operatorname{Res}(f,a) := c_{-1}.$$

Poznámka 11.1.2. Účinný návod na výpočet rezíduí dáva cvičenie 3 na konci tejto kapitoly.

Cauchyho veta o rezíduách je zovšeobecnením vzťahu (11.1) pre *meromorfné* funkcie – hovorí, že až na konštantný faktor $2\pi i$ možno integrál každej funkcie f meromorfnej na oblasti S pozdĺž *ľubovoľnej* kladne orientovanej jednoduchej uzavretej krivky γ v oblasti S, neprechádzajúcej cez pól funkcie f, vyjadriť ako súčet rezíduí funkcie f cez všetky póly vo vnútri krivky γ. Túto vetu pritom dokážeme v dvoch variantoch. Prvý bude priamo sledovať uvedenú intuitívnu formuláciu, avšak medzi jej implicitnými predpokladmi bude aj Jordanova a Jordanova-Schoenfliesova veta. Druhý variant, využívajúci pojem indexu, bude od spomínaných dvoch nedokázaných tvrdení nezávislý a o niečo všeobecnejší; formulácia samotnej vety však bude o čosi menej intuitívna.

Dokážme najprv veľmi jednoduchú lemu, ktorá sa nám zíde pri dôkaze obidvoch variantov Cauchyho vety o rezíduách.

Lema 11.1.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a funkcia f je meromorfná na S. Nech A je množina všetkých pólov funkcie f v S. Potom množina A nemôže mať v S žiaden hromadný bod.*

Dôkaz. Sporom – nech $a \in S$ je hromadný bod množiny A. Pre všetky $r > 0$ potom existuje izolovaná singularita $z \in D'(a,r)$; funkcia f teda nie je holomorfná na $D'(a,r)$ pre žiadne $r > 0$. V dôsledku toho nemôže byť funkcia f v bode a holomorfná a bod a nemôže byť ani izolovanou singularitou funkcie f. Funkcia f teda nie je meromorfná v bode a: spor. □

Veta 11.1.4 (Cauchyho veta o rezíduách, formulácia I)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^*. Množina A všetkých pólov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$ je potom konečná a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f,a).$$

Dôkaz. Podľa Jordanovej vety je oblasť $\mathbf{I}(\gamma)$ ohraničená – množina $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ je teda kompaktná. Za účelom sporu predpokladajme, že je množina A nekonečná. Nech $(a_n)_{n=0}^\infty$ je ľubovoľná postupnosť po dvoch rôznych bodov z A. Keďže je množina $A \subseteq \mathbf{I}(\gamma)$ ohraničená, podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety sa z postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ musí dať vybrať konvergentná podpostupnosť $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$. Ak označíme limitu tejto postupnosti ako a, nutne $a \in \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$. Keďže sú prvky postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ po dvoch rôzne, je a hromadným bodom množiny A. Existencia takéhoto bodu ale odporuje leme 11.1.3.

Množina A je teda skutočne konečná. Pre všetky $a \in A$ je funkcia f na nejakom prstencovom okolí $D'(a,r)$ s $r > 0$ reprezentovaná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Označme g_a takzvanú *hlavnú časť* tohto Laurentovho radu:

$$g_a(z) := \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n.$$

Ľahko vidieť, že funkcia g_a je pre všetky $a \in A$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Ak teda definujeme

$$g(z) := f(z) - \sum_{a \in A} g_a(z),$$

má funkcia $g(z)$ na S iba odstrániteľné singularity. Môžeme ich teda odstrániť a predpokladať, že je funkcia g na S holomorfná.

Z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť a dôsledku 5.7.3 potom

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pre každé $a \in A$ ďalej z integrálneho vzorca pre koeficient c_{-1} Laurentovho radu a z tvrdenia 5.8.1 dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Res}(g_a, a) = \operatorname{Res}(f, a).$$

Preto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(g(z) + \sum_{a\in A} g_a(z)\right)\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{a\in A}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f,a),\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Poznámka 11.1.5. Ak je funkcia f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$, je množina A z predchádzajúcej vety prázdna a samotná veta teda hovorí, že

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ide teda o variant Cauchyho integrálnej vety.[1]

Ak je funkcia f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$, je pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcia

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

holomorfná na $(\gamma^*\cup\mathbf{I}(\gamma))\setminus\{a\}$, pričom v bode a má funkcia g jednoduchý pól. Na nejakom prstencovom okolí bodu a teda

$$g(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Funkcia

$$(z-a)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}(z-a)^n$$

má v bode a odstrániteľnú singularitu, a teda

$$\lim_{z\to a}(z-a)g(z) = \lim_{z\to a} f(z) = c_{-1}.$$

Pre rezíduum funkcie g v bode a preto platí

$$\operatorname{Res}(g,a) = c_{-1} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

a z Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a).$$

Ako špeciálny prípad Cauchyho vety o rezíduách teda dostávame aj Cauchyho integrálny vzorec.

[1] Predpoklady na funkciu f a krivku γ sú tu trochu iné, než vo variantoch Cauchyho integrálnej vety, s ktorými sme sa doposiaľ stretli. Špeciálnym prípadom druhého variantu Cauchyho vety o rezíduách, ktorý dokážeme nižšie, však bude všeobecná Cauchyho integrálna veta v podobe, v akej sme ju vyslovili v rámci dôsledku 10.6.2.

Ak je napokon f holomorfná na $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)$ a $m \in \mathbb{N}$, je pre $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcia

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}$$

opäť holomorfná na $(\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma)) \setminus \{a\}$, pričom v bode a má funkcia g pól rádu $m+1$. Na nejakom prstencovom okolí bodu a teda

$$g(z) = \sum_{n=-(m+1)}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Funkcia

$$(z-a)^{m+1} g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-(m+1)} (z-a)^n$$

má v bode a odstrániteľnú singularitu. Môžeme ju teda odstrániť, čím dostaneme funkciu $f(z)$; podľa vety o Taylorových radoch potom

$$c_{-1} = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

V dôsledku toho

$$\operatorname{Res}(g,a) = c_{-1} = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

a z Cauchyho vety o rezíduách máme

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \,\mathrm{d}z = f^{(m)}(a).$$

Ako špeciálny prípad Cauchyho vety o rezíduách tak dostávame aj Cauchyho vzorec pre derivácie.

V rámci cvičení sme už videli viacero situácií, kedy je možné krivkový integrál vyrátať veľmi jednoducho s použitím Cauchyho integrálneho vzorca alebo Cauchyho vzorca pre derivácie. To však vyžaduje, aby bola integrovaná funkcia f už vyjadrená alebo ľahko vyjadriteľná v tvare

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{m+1}},$$

kde g je v bode a holomorfná. Vieme už, že takýmto spôsobom možno vyjadriť ľubovoľnú funkciu, ktorá má v bode a pól rádu $m+1$; prevod do kýženého tvaru však nemusí byť technicky jednoduchý. Navyše môže integračná krivka obkolesovať aj viacero pólov a Cauchyho integrálny vzorec, ani Cauchyho vzorec pre derivácie, už použiť nemôžeme. Práve v uvedených situáciách je na výpočet krivkových integrálov veľmi užitočným nástrojom Cauchyho veta o rezíduách.

Príklad 11.1.6. Uvažujme integrál

$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{1}{z^3 \cos z} \,\mathrm{d}z.$$

Na $D'(0,\pi/2)$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos z} &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)} = \\
&= 1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)^2 + O(z^6) = \\
&= 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^4}{4} + O(z^6) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + O(z^6),
\end{aligned}$$

z čoho

$$\frac{1}{z^3 \cos z} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^1} + \frac{5z^1}{24} + O(z^3)$$

a

$$\operatorname{Res}\big(1/(z^3 \cos z), 0\big) = \frac{1}{2}.$$

Bod 0 je pritom jediným pólom integrovanej funkcie na $D(0, \pi/2)$; vo zvyšných bodoch $D(0, \pi/2)$ je táto funkcia holomorfná. Z Cauchyho vety o rezíduách preto

$$\int_{\kappa(0,1)} \frac{1}{z^3 \cos z} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big(1/(z^3 \cos z), 0\big) = \pi i.$$

Príklad 11.1.7. Vypočítajme teraz integrál

$$\int_{\kappa(0,2)} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} \, dz.$$

Integrovanú funkciu tu možno upraviť nasledovne:

$$\frac{z}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}.$$

Zisťujeme teda, že na $D(0,2)$ má integrovaná funkcia tri jednoduché póly: 1 a $\pm i$; na $\kappa(0,2)^*$ je integrovaná funkcia holomorfná. Z úvah učinených v rámci poznámky 11.1.5 vyplývajú nasledujúce vzťahy:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}, 1\right) = \frac{1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}, i\right) = \frac{i}{(i-1)(i+i)} = \frac{1}{2(i-1)} = -\frac{i+1}{4},$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}, -i\right) = \frac{-i}{(-i-1)(-i-i)} = -\frac{1}{2(i+1)} = \frac{i-1}{4}.$$

Z Cauchyho vety o rezíduách tak dostávame

$$\int_{\kappa(0,2)} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} \, dz = 2\pi i \sum_{a \in \{1,i,-1\}} \operatorname{Res}\left(z/(z-1)(z-i)(z+i), a\right) =$$
$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{i+1}{4} + \frac{i-1}{4}\right) = 0.$$

Cauchyho vetu o rezíduách možno často využiť aj na výpočet *reálnych* integrálov, ako ukazuje nasledujúci príklad prebratý z [5].

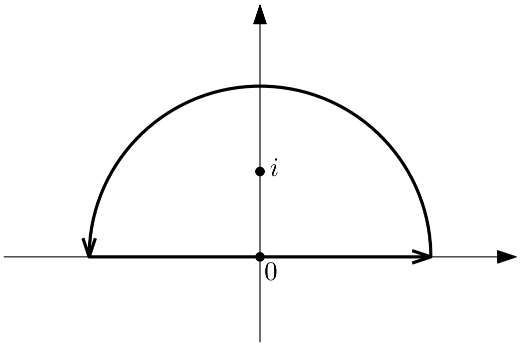
Príklad 11.1.8. Uvažujme nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \, dx.$$

Vypočítajme najprv pre všetky $r > 1$ krivkový integrál

$$\int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1} \, dz$$

pozdĺž integračnej krivky $[-r, r] + \kappa_{[0,\pi]}(0, r)$ znázornenej na obrázku 11.1.



Obr. 11.1: Integračná krivka $[-r, r] + \kappa_{[0,\pi]}(0, r)$.

Keďže je integrovaná funkcia

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

holomorfná na tejto krivke a meromorfná v jej vnútri, pričom jedinou izolovanou singularitou v jej vnútri je jednoduchý pól i s

$$\operatorname{Res}\big(1/(z^2+1), i\big) = -\frac{i}{2},$$

podľa Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}\big(1/(z^2+1), i\big) = \pi.$$

Z vety o odhade však súčasne

$$\left| \int_{\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \right| \le \pi r \frac{1}{r^2-1}$$

a pre $r \to \infty$ táto hodnota speje k nule. Preto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \\ &= \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]+\kappa_{[0,\pi]}(0,r)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \pi.\end{aligned}$$

Dokážme teraz druhý variant Cauchyho vety o rezíduách, využívajúci pojem indexu bodu vzhľadom ku krivke – bude o niečo všeobecnejší, než ten predchádzajúci a navyše nebude predpokladať platnosť Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety.

Veta 11.1.9 (Cauchyho veta o rezíduách, formulácia II)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^* a pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$. Nech A je množina všetkých pólov funkcie f v S. Potom existuje nanajvýš konečne veľa bodov $a \in A$ s $\operatorname{Ind}_\gamma(a) \neq 0$, pričom*[2]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f, a).$$

[2] V nasledujúcom sumujeme iba cez nenulové prvky, ktorých je konečne veľa.

Dôkaz. Podľa lemy 10.5.2 existuje $M > 0$ také, že funkcia Ind_γ je na $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ nulová. Z toho vyplýva, že množina $T = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\} \cup \gamma^*$ – a teda aj množina $A' = \{a \in A \mid \mathrm{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ – je podmnožinou nejakej ohraničenej oblasti D. Navyše tiež existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq D \cap S$. Pre ľubovoľné w na hranici otvorenej množiny $D \cap S$ (t. j. $w \in \overline{D \cap S} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus (D \cap S)}$) potom okolie $D(w, \varepsilon)$ neobsahuje žiaden bod z γ^* a funkcia Ind_γ tak na tomto okolí musí byť – opäť podľa lemy 10.5.2 – konštantná. Toto okolie však súčasne obsahuje aspoň jeden bod $b \in \mathbb{C} \setminus (D \cap S)$; ak ale $b \notin S$, je $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$ podľa predpokladov vety a ak $b \notin D$, máme $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$ vďaka inklúzii $T \subseteq D$. Na okolí $D(w, \varepsilon)$ je teda funkcia $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ nulová a množina A' je v dôsledku toho obsiahnutá v nejakej kompaktnej podmnožine ohraničenej množiny $D \cap S$ – z jej nekonečnosti by teda, rovnako ako v dôkaze prvého variantu Cauchyho vety o rezíduách, vyplynula existencia hromadného bodu množiny A v S, čo by odporovalo leme 11.1.3. Množina A' je teda skutočne konečná.

Ďalej už postupujeme podobne ako v dôkaze prvého variantu Cauchyho vety o rezíduách. Pre všetky $a \in A'$ je funkcia f na nejakom prstencovom okolí $D'(a, r)$ s $r > 0$ reprezentovaná Laurentovým radom

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Označme g_a hlavnú časť tohto Laurentovho radu:

$$g_a(z) := \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n.$$

Ľahko vidieť, že funkcia g_a je pre všetky $a \in A'$ je holomorfná na $S \setminus \{a\}$. Ak teda definujeme

$$g(z) := f(z) - \sum_{a \in A'} g_a(z),$$

má funkcia $g(z)$ v oblasti $S \setminus (A \setminus A')$ iba odstrániteľné singularity.[3] Odstráňme ich a predpokladajme, že je funkcia g na $S \setminus (A \setminus A')$ holomorfná.

Keďže pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus (S \setminus (A \setminus A')) = (\mathbb{C} \setminus S) \cup (A \setminus A')$ je $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$, zo všeobecnej Cauchyho integrálnej vety máme

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pre každé $a \in A'$ ďalej zo základnej vety o krivkových integráloch a definície indexu dostávame

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma c_{-1}(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z = \\ &= c_{-1}\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(g_a, a) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f, a).\end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(g(z) + \sum_{a \in A'} g_a(z) \right) \mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{a \in A'} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in A'} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f, a) = \\ &= \sum_{a \in A} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f, a),\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

[3] Dôkaz, že $S \setminus (A \setminus A')$ je skutočne oblasť, prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

11.2 Cauchyho princíp argumentu

Naším ďalším cieľom bude dokázať takzvaný *Cauchyho princíp argumentu*, ktorý umožňuje vyjadriť rozdiel počtu koreňov a počtu pólov nejakej meromorfnej funkcie, obkolesených jednoduchou uzavretou krivkou γ, pomocou integrálneho vzorca. Dokážeme tu iba variant implicitne využívajúci Jordanovu a Jordanovu-Schoenfliesovu vetu; dôkaz variantu založeného na pojme indexu a nezávislého od týchto nedokázaných tvrdení prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.[4]

Nasledujúcu lemu budeme potrebovať na odôvodnenie zmysluplnosti našich ďalších tvrdení.

Lema 11.2.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, T je ohraničená množina taká, že $\overline{T} \subseteq S$ a f je funkcia meromorfná na S, ktorá na S nie je konštantne nulová. Potom má funkcia f v T nanajvýš konečne veľa koreňov a nanajvýš konečne veľa pólov.*

Dôkaz. Konečnosť počtu pólov možno dokázať podobne ako v dôkaze Cauchyho vety o rezíduách: množina $\overline{T}$ je kompaktná a z nekonečnosti množiny pólov A funkcie f v T by tak vyplývala existencia hromadného bodu množiny A v S. To by bol spor s lemou 11.1.3.

Keby mala na druhej strane funkcia f v množine T nekonečne veľa koreňov, rovnaká argumentácia by zaručovala existenciu hromadného bodu a množiny $Z(f)$ v S; z tvrdenia 9.4.1(iii) pritom ľahko vidieť, že bod a nemôže byť pólom funkcie f. Pomocou vety o jednoznačnosti tak zisťujeme, že funkcia f musí byť konštantne nulová na svojom definičnom obore. Takáto funkcia však nemá žiaden pól, čo spolu s meromorfnosťou funkcie f na S znamená, že je f konštantne nulová na S. To odporuje predpokladom lemy. □

Prv, než vyslovíme a dokážeme samotný Cauchyho princíp argumentu, dokážeme na ilustráciu jeho o niečo slabšiu verziu.

Tvrdenie 11.2.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je holomorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $f(z) \neq 0$. Potom*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z,$$

kde $Z \in \mathbb{N}$ je počet koreňov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$, pričom koreň rádu $m \geq 1$ je započítaný m-krát.

Dôkaz. Tvrdenie dáva zmysel vďaka leme 11.2.1 a skutočnosti, že $\mathbf{I}(\gamma)$ je ohraničená množina taká, že $\overline{\mathbf{I}(\gamma)} = \gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$.

Nech $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ je koreň funkcie f rádu $m \geq 1$. Podľa tvrdenia 8.1.3 potom existuje $r > 0$ také, že pre všetky $z \in D(a,r)$ je

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

kde g je holomorfná na $D(a,r)$ a $g(a) \neq 0$. Na $D(a,r)$ potom tiež

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z),$$

z čoho

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Keďže $g(a) \neq 0$, je funkcia $g'(z)/g(z)$ holomorfná v bode a, a teda $\operatorname{Res}(f'/f, a) = m$. Keďže je koreň $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ ľubovoľný a keďže je funkcia $f'(z)/f(z)$ holomorfná vo všetkých bodoch $b \in S$ takých, že $f(b) \neq 0$, z Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \operatorname{Res}(f'/f, a) = Z,$$

čo bolo treba dokázať. □

[4] Ide o cvičenie 8 na konci tejto kapitoly.

Veta 11.2.3 (Cauchyho princíp argumentu)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je kladne orientovaná jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná na γ^* a pre všetky $z \in \gamma^*$ je $f(z) \neq 0$. Potom*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z - P,$$

kde $Z \in \mathbb{N}$ je počet koreňov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$ a $P \in \mathbb{N}$ je počet pólov funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma)$, pričom každý koreň a pól rádu m je započítaný m-krát.

Dôkaz. Podobne ako v dôkaze tvrdenia 11.2.2 zisťujeme, že pre každý koreň $a \in \mathbf{I}(\gamma)$ funkcie f rádu m je $\mathrm{Res}(f'/f, a) = m$. Nech teraz $b \in \mathbf{I}(\gamma)$ je pól funkcie f rádu $k \geq 1$. Podľa tvrdenia 9.4.1 potom existuje $s > 0$ také, že pre všetky $z \in D'(b, s)$ je

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}$$

pre nejakú funkciu h holomorfnú na $D'(b, s)$ takú, že $h(b) \neq 0$. Na $D'(b, s)$ potom tiež

$$f'(z) = -k\frac{h(z)}{(z-a)^{k+1}} + \frac{h'(z)}{(z-a)^k},$$

z čoho

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Keďže $h(b) \neq 0$, je funkcia $h'(z)/h(z)$ holomorfná v bode b, a teda $\mathrm{Res}(f'/f, b) = -k$. Ak navyše $c \in \mathbf{I}(\gamma)$ nie je koreňom ani pólom funkcie f, je funkcia $f'(z)/f(z)$ v tomto bode holomorfná. Ak teda označíme ako $P(f)$ množinu všetkých pólov funkcie f, z Cauchyho vety o rezíduách dostávame

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \mathrm{Res}(f'/f, a) + \sum_{b \in P(f)\cap \mathbf{I}(\gamma)} \mathrm{Res}(f'/f, b) = Z - P.$$

Tým je veta dokázaná. □

Poznámka 11.2.4. Integrál z predchádzajúcej vety možno interpretovať aj ako integrál funkcie $1/z$ pozdĺž krivky $f \circ \gamma$, čiže ako index bodu 0 vzhľadom ku krivke $f \circ \gamma$. Vďaka súvisu so spojitým výberom argumentu teda ide o „celkový nárast argumentu“ hodnoty $f(z)$ pozdĺž krivky γ; odtiaľ pomenovanie „Cauchyho princíp argumentu“.

11.3 Rouchého veta

Vyslovme a dokážme ešte jeden zaujímavý dôsledok Cauchyho princípu argumentu – tzv. *Rouchého vetu.* Opäť sa pritom obmedzíme iba na jej variant implicitne predpokladajúci platnosť Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety.

Veta 11.3.1 (Rouchého veta)**.** *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcie f, g sú holomorfné na S a γ s $\gamma^* \cup \mathbf{I}(\gamma) \subseteq S$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka taká, že pre všetky $z \in \gamma^*$ je $|f(z)| > |g(z)|$. Potom majú funkcie f a $f + g$ rovnaký počet koreňov v $\mathbf{I}(\gamma)$.*

Dôkaz. Nech $t \in [0, 1]$. Z predpokladov vety vyplýva, funkcia $f + tg$ je holomorfná na S a pre všetky $z \in \gamma^*$ je $f(z) + tg(z) \neq 0$. Z tvrdenia 11.2.2 (prípadne z Cauchyho princípu argumentu) teda vyplýva, že

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\,\mathrm{d}z = \pm\zeta(t),$$

kde $\zeta(t)$ je počet koreňov funkcie $f + tg$ v $\mathbf{I}(\gamma)$.

Dokážeme, že funkcia $\zeta\colon [0,1] \to \mathbb{N}$ je spojitá, čím zároveň dokážeme aj jej konštantnosť. Pre všetky $t_1, t_2 \in [0,1]$ je

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \pm \frac{t_2 - t_1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + t_1 g(z))(f(z) + t_2 g(z))}\,\mathrm{d}z.$$

Keďže je množina γ^* kompaktná, funkcia $g'(z)f(z) - f'(z)g(z)$ na nej nadobúda maximum $M \geq 0$ a funkcia $(f(z) + t_1 g(z))(f(z) + t_2 g(z))$, ktorá je na γ^* nutne nenulová, na nej nadobúda minimum $m > 0$. Pre všetky $z \in \gamma^*$ je teda

$$\left| \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + t_1 g(z))(f(z) + t_2 g(z))} \right| \leq \frac{M}{m}.$$

Z toho

$$|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)| = \left| \frac{t_2 - t_1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + t_1 g(z))(f(z) + t_2 g(z))}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi} L(\gamma) \frac{M}{m}.$$

Pre všetky $\varepsilon > 0$ teda pre dostatočne malé $|t_2 - t_1|$ máme

$$|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)| < \varepsilon$$

a funkcia ζ je naozaj (rovnomerne) spojitá. Musí byť teda konštantná, z čoho vyplýva, že všetky funkcie $f + tg$ s $t \in [0,1]$ majú rovnaký počet koreňov v $\mathbf{I}(\gamma)$. Špeciálne teda majú rovnako veľa koreňov v $\mathbf{I}(\gamma)$ aj funkcie $f = f + 0g$ a $f + g = f + 1g$. □

11.4 Veta o otvorenom zobrazení a veta o inverznej funkcii

Rouchého vetu teraz aplikujeme na dôkaz dôležitého tvrdenia o holomorfných funkciách – tzv. *vety o otvorenom zobrazení*. Dôsledkom tejto vety ďalej bude *veta o inverznej funkcii*, ktorú možno chápať ako zosilnenie vety 2.5.7 o derivácii inverznej funkcie pre prípad holomorfných funkcií.

Definícia 11.4.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia. Hovoríme, že f je *otvorené zobrazenie* na S, ak pre všetky otvorené množiny $T \subseteq S$ je $f(T)$ otvorená množina.

Veta 11.4.2 (Veta o otvorenom zobrazení). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ nekonštantná funkcia holomorfná na S. Potom je funkcia f otvoreným zobrazením na S.*

Dôkaz. Nech $T \subseteq S$ je otvorená množina a $b \in f(T)$. Dokážeme existenciu čísla $\varepsilon > 0$ takého, že $D(b, \varepsilon) \subseteq f(T)$.

Keďže $b \in f(T)$, existuje $a \in T$ také, že $b = f(a)$. Funkcia f je na S nekonštantná, takže funkcia $f(z) - f(a)$ premennej z nemôže byť na S konštantne nulová. Z vety o jednoznačnosti teda vyplýva, že pre nejaké $\delta > 0$ také, že $D(a, \delta) \subseteq T$ musí byť funkcia $f(z) - f(a)$ nenulová na $D'(a, \delta)$.

Zvoľme reálne číslo r také, že $0 < r < \delta$ a uvažujme kružnicu $\kappa(a, r)$. Keďže ide o kompaktnú množinu, absolútna hodnota $|f(z) - f(a)|$ spojitej funkcie $f(z) - f(a)$ na $\kappa(a, r)^*$ nadobúda minimum m. Vďaka nenulovosti funkcie $f(z) - f(a)$ na $D'(a, \delta)$ je $m > 0$. Pre všetky $w \in D(b, m)$ a $z \in \kappa(a, r)^*$ ďalej

$$|(f(a) - f(z)) + (f(z) - w)| = |f(a) - w| < m \leq |f(z) - f(a)|,$$

takže funkcie

$$f(z) - f(a)$$

a

$$f(z) - w = (f(z) - f(a)) + ((f(a) - f(z)) + (f(z) - w))$$

premennej z majú podľa Rouchého vety rovnaký počet koreňov v $D(a, r)$. Keďže teda má funkcia $f(z) - f(a)$ práve jeden koreň v $D(a, r)$, musí tam mať práve jeden koreň aj každá z funkcií $f(z) - w$ pre $w \in D(b, m)$. Pre každé $w \in D(b, m)$ teda existuje $z \in D(a, r)$ také, že $f(z) = w$ – a teda $D(b, m) \subseteq f(D(a, r)) \subseteq f(T)$. Na zavŕšenie dôkazu teda stačí vziať $\varepsilon = m$. □

Veta 11.4.3 (Veta o inverznej funkcii, formulácia I). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f: S \to \mathbb{C}$ injektívna funkcia holomorfná na S. Pre $T = f(S)$ je potom inverzná funkcia $f^{-1}: T \to \mathbb{C}$ k funkcii f holomorfná na T a pre všetky $a \in S$ s $f(a) = b$ je*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dôkaz. Vďaka vete 2.5.7 stačí dokázať, že funkcia f^{-1} je na T spojitá. Nech teda $b \in T$ a $\varepsilon > 0$ – dokážeme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $w \in D(b,\delta)$ je $f^{-1}(w) \in D(a,\varepsilon)$. Podľa vety o otvorenom zobrazení je ale $f(D(a,\varepsilon))$ otvorená množina, pričom vďaka rovnosti $b = f(a)$ musí byť $b \in f(D(a,\varepsilon))$. Existuje teda $\delta > 0$ také, že $D(b,\delta) \subseteq f(D(a,\varepsilon))$ a pre všetky $w \in D(b,\delta)$ tak existuje $z \in D(a,\varepsilon)$ také, že $w = f(z)$ – čiže $f^{-1}(w) = z \in D(a,\varepsilon)$. □

Poznámka 11.4.4. Z tvrdenia v cvičení 5 kapitoly 2 ľahko vidieť, že bijektívna funkcia $f: S \to T$ je otvoreným zobrazením práve vtedy, keď je inverzná funkcia $f^{-1}: T \to S$ spojitá. V našom dôkaze vety o inverznej funkcii sme v podstate iba aplikovali toto pozorovanie.

Nasledujúce tvrdenie hovorí, že holomorfná funkcia f s nenulovou deriváciou v bode a musí byť na nejakom okolí tohto bodu injektívna. Z vety o inverznej funkcii teda vyplýva, že nenulovosť derivácie funkcie f v bode a je postačujúcou podmienkou existencie holomorfnej inverznej funkcie k zúženiu funkcie f na nejaké okolie bodu a.

Tvrdenie 11.4.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina, $a \in S$ a $f: S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S. Ak $f'(a) \neq 0$, existuje $r > 0$ také, že $D(a,r) \subseteq S$ a zúženie funkcie f na $D(a,r)$ je injektívne.*

Dôkaz. Z lemy 10.5.1 vyplýva existencia $r > 0$ takého, že pre všetky $z, w \in D(a,r)$ je

$$|f(w) - f(z)| \geq \frac{|f'(a)||w - z|}{2}.$$

Ak pritom $z \neq w$, je vďaka predpokladu $f'(a) \neq 0$ výraz na pravej strane nerovnosti kladný, a teda aj $|f(w) - f(z)| > 0$ – z toho $f(z) \neq f(w)$. □

Dôsledok 11.4.6 (Veta o inverznej funkcii, formulácia II). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a nech $f: S \to \mathbb{C}$ funkcia holomorfná na S. Nech $a \in S$ je bod taký, že $f'(a) \neq 0$. Potom existuje $r > 0$ také, že funkcia f je injektívna na $D(a,r)$ a pre $T = f(D(a,r))$ je inverzná funkcia $f^{-1}: T \to \mathbb{C}$ k tomuto zúženiu funkcie f holomorfná na T. Pre všetky $z \in D(a,r)$ s $f(z) = w$ pritom*

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Dôkaz. Bezprostredne z vety 11.4.3 a tvrdenia 11.4.5. □

Cvičenia

1. a) Nájdite rezíduá funkcie $f_1(z) = (e^{iz} - 1)/(z^2 + 1)^2$ v bodoch i a $-i$. Vypočítajte integrály tejto funkcie pozdĺž kriviek $\kappa(i, 10^{-100})$ a $\kappa(i, 10^{100})$.

   b) Nájdite rezíduá funkcie $f_2(z) = e^{iz}/(z^3 - 1)$ v bodoch 1, $e^{i2\pi/3}$ a $e^{i4\pi/3}$. Vypočítajte integrály tejto funkcie pozdĺž kriviek $\kappa(e^{i2\pi/3}, 10^{-100})$ a $\kappa(e^{i2\pi/3}, 10^{100})$.

2. Vypočítajte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx.$$

3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ funkcia s pólom rádu $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ v bode $a \in \mathbb{C}$. Dokážte, že v takom prípade je
$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right).$$

4. Zovšeobecnite Cauchyho vetu o rezíduách aj na prípad funkcií s odstrániteľnými a podstatnými izolovanými singularitami.

5. Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, danú pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ ako
$$f(z) = \frac{-5iz - 1}{2\pi(z^2+1)}.$$
Nájdite všetky $I \in \mathbb{C}$ také, že pre nejakú uzavretú po častiach hladkú krivku γ s $\gamma^* \subseteq \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ je
$$I = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

6. Zistite, či existuje funkcia f meromorfná na $\mathbb{C}$ taká, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ má funkcia f v bode n pól, pričom $\operatorname{Res}(f, n) = n$. Ak áno, skonštruujte takú funkciu; ak nie, dokážte.

7. Zistite, či existuje meromorfná funkcia f na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ taká, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje pól $a \in S$ funkcie f, pre ktorý je $\operatorname{Res}(f, a) = \alpha$. Ak áno, skonštruujte takú funkciu; ak nie, dokážte.

8. Dokážte nasledujúci variant Cauchyho princípu argumentu, založený na pojme indexu a nezávislý od Jordanovej a Jordanovej-Schoenfliesovej vety: nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, funkcia f je meromorfná na S a γ s $\gamma^* \subseteq S$ je uzavretá po častiach hladká krivka taká, že f je holomorfná a nenulová na γ^* a pre všetky $b \in \mathbb{C} \setminus S$ je $\operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0$. Nech $Z(f)$ je množina koreňov a $P(f)$ je množina pólov funkcie f. Potom je v oboch týchto množinách iba konečný počet prvkov s nenulovým indexom vzhľadom ku krivke γ a
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z(f)} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \deg(a) - \sum_{b \in P(f)} \operatorname{Ind}_\gamma(b) \deg(b),$$
kde $\deg(w)$ označuje rád koreňa resp. pólu w.

9. Nájdite počet koreňov funkcie $z^2 + 5 - e^{iz}$ takých, že $\operatorname{Im} z > 0$.

Kapitola 12

Analytické predĺženie

Technika *analytického predĺženia* – do veľkej miery založená na vete o jednoznačnosti, ktorú sme už dokázali – umožňuje rozšíriť analytickú (čiže holomorfnú) funkciu f, definovanú na nejakom obore S, na „maximálny možný definičný obor“ obsahujúci S. Napríklad funkciu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

definovanú na okolí $D(0,1)$, možno pomocou analytického predĺženia rozšíriť na funkciu $1/(1-z)$ definovanú na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Takto rozšírená funkcia je vždy daná jednoznačne; ukáže sa však, že môže byť aj viachodnotová. Náš doterajší prístup k viachodnotovým funkciám – spočívajúci v *ad hoc* výbere jednohodnotových vetiev – už tým pádom nebude dlhšie únosný. Namiesto toho budeme musieť zrevidovať samotné naše chápanie analytických funkcií tak, aby tento koncept prirodzene zahŕňal aj viachodnotové funkcie. Dospejeme tak k dôležitému pojmu *globálnych analytických funkcií*, ktoré budú reprezentovať vo všeobecnosti viachodnotové analytické funkcie na svojom „maximálnom možnom definičnom obore“. Odporúčaným doplňujúcim čítaním k tejto kapitole sú príslušné partie kníh [7, 6, 9].

12.1 Rozšírenie definičného oboru funkcie a viachodnotovosť

V komplexnej analýze sa často ocitáme v situácii, keď možno funkciu rozšíriť na väčší definičný obor, než na akom bola pôvodne definovaná. Nech napríklad $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ je pre všetky $z \in D(0,1)$ daná ako

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Podľa štandardného vzorca pre súčet geometrického radu pre všetky $z \in D(0,1)$ máme

$$f(z) = \frac{1}{1-z};$$

funkcia $g\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ daná pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ako

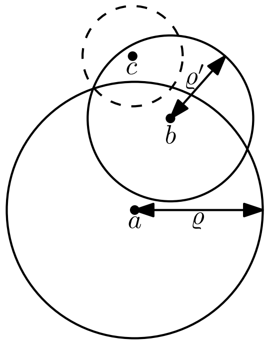
$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

je ale analytická na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Našli sme teda funkciu $g(z)$, ktorá sa na $D(0,1)$ zhoduje s funkciou f, ale jej definičný obor je väčší: $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Keďže má množina $D(0,1)$ v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ hromadný bod, z vety o jednoznačnosti vyplýva, že ide o *jedinú* analytickú funkciu $g(z)$ s touto vlastnosťou. Hovoríme, že takto definovaná funkcia $g\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ je *analytickým predĺžením* funkcie f.[1] V analytické predĺženie funkcie f na celú komplexnú rovinu $\mathbb{C}$ dúfať nemôžeme – to možno jednoducho dokázať s použitím jednoznačnosti Laurentových radov alebo prostredníctvom Liouvillovej vety.

[1] Ozajstnú definíciu analytického predĺženia sformulujeme až nižšie.

Pre analytickú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$, kde $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, sa teda ponúkajú prirodzené otázky:

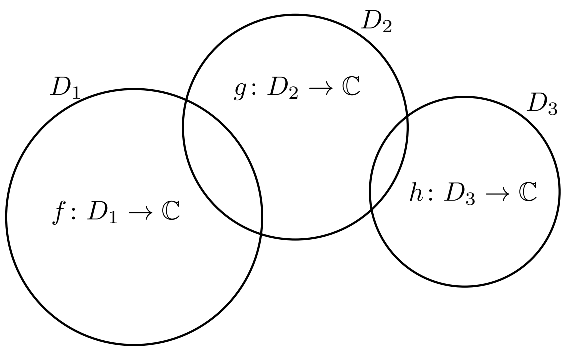
- Možno funkciu f rozšíriť na analytickú funkciu definovanú na oblasti $T \supsetneq S$?
- Ak áno, z vety o jednoznačnosti vyplýva, že existuje práve jedna taká funkcia – ako ju ale možno nájsť?



Obr. 12.1: Weierstrassova technika analytického predĺženia pomocou mocninových radov.

Karl Weierstrass prišiel s technikou postupného rozširovania definičného oboru analytickej funkcie založenej na nasledujúcom pozorovaní. Predpokladajme, že je funkcia f analytická v nejakom bode $a \in \mathbb{C}$. Jej Taylorov rad v bode a má potom nenulový polomer konvergencie ϱ. Zvoľme ľubovoľný bod $b \in D(a, \varrho)$. Funkcia f je v tomto bode nutne analytická, a teda je reprezentovateľná Taylorovým radom so stredom v b. Tento rad určite konverguje na $D(b, \varrho - |b-a|)$; jeho polomer konvergencie ϱ' však niekedy môže byť aj väčší a v takom prípade sme práve rozšírili definičný obor pôvodnej analytickej funkcie. Môžeme teraz rovnaký postup opakovať s ľubovoľným ďalším bodom c nového definičného oboru. Táto situácia je znázornená na obrázku 12.1.

V skutočnosti ale pri analytickom predĺžení vôbec nie je nutné narábať s mocninovými radmi a ich polomermi konvergencie. Ak máme danú analytickú (t. j. holomorfnú) funkciu f na ľubovoľnom kruhovom okolí D_1 (prípadne aj na oblasti iného typu) a nájdeme analytickú funkciu g na nejakom inom okolí D_2 takom, že $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, pričom na tomto prieniku sa obidve funkcie zhodujú, našli sme jediné predĺženie funkcie f na $D_1 \cup D_2$. Tento postup môžeme ľubovoľne veľa ráz opakovať. Situácia je znázornená na obrázku 12.2.



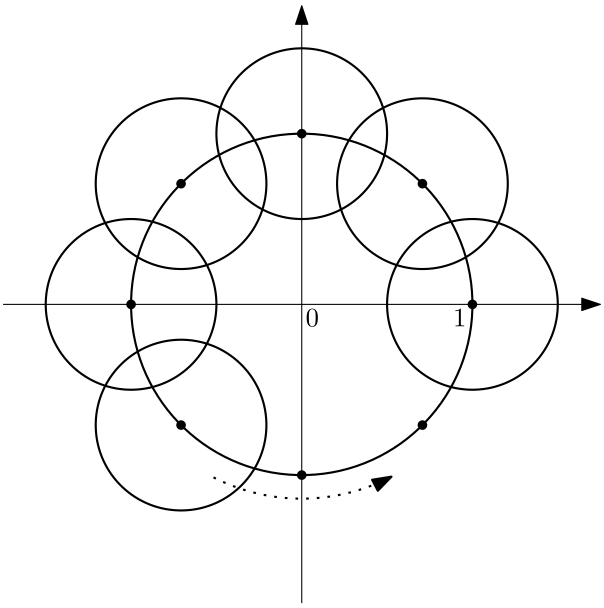
Obr. 12.2: Základná myšlienka analytického predĺženia.

Uvidíme, že ak je možné analytickú funkciu $f\colon S \to \mathbb{C}$ na oblasti S predĺžiť na nejakú nadoblasť $T \supseteq S$, vždy ju tam možno predĺžiť rovnakým spôsobom ako vyššie, aj keď vo všeobecnosti môže byť potrebných nekonečne veľa krokov.

Pri takomto postupnom predlžovaní funkcie sa však môže pomerne „zákerným" spôsobom prejaviť jej *viachodnotovosť*. Nech napríklad $D_0 = D(1, 1/2)$ a $\ln^{[0]}\colon D_0 \to \mathbb{C}$ označuje holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu na D_0 takú, že $\ln^{[0]}(1) = 0$.[2] Postupne pokrývajme kladne orientovanú jednotkovú kružnicu „reťazou" prekrývajúcich sa okolí $D_0, D_1, D_2, \ldots$ o polomere $1/2$ a so stredmi

$$a_0 = 1, a_1 = e^{i\pi/4}, a_2 = e^{i\pi/2}, a_3 = e^{i3\pi/4}, a_4 = -1, \ldots$$

tak, ako na obrázku 12.3. Okolie D_k sa pre všetky $k \in \mathbb{N}$ prekrýva s D_{k+1} a ľahko vidieť, že ak pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $\ln^{[k]}\colon D_k \to \mathbb{C}$ holomorfná vetva prirodzeného logaritmu na D_k taká, že $\ln^{[k]}(a_k) = ik\pi/4$, tak pre všetky $z \in D_k \cap D_{k+1}$ je $\ln^{[k]}(z) = \ln^{[k+1]}(z)$. Takto však postupne prídeme k okoliu D_8 so stredom v bode $a_8 = e^{i2\pi} = 1$, pre ktoré zisťujeme, že $\ln^{[8]}(1) = i2\pi$. Obkrúžením kladne orientovanej jednotkovej kružnice sme sa teda nevrátili k pôvodnej vetve prirodzeného logaritmu $\ln^{[0]}$ spĺňajúcej $\ln^{[0]}(1) = 0$, ale plynule sme prešli k inej vetve. Ľahko vidieť, že pomocou niekoľkých takýchto „obkrúžení" kladne alebo záporne orientovanej jednotkovej kružnice by sme vedeli získať ľubovoľnú vetvu prirodzeného logaritmu (napríklad) na $D(1, 1/2)$.



Obr. 12.3: Analytické predĺženie prirodzeného logaritmu, pri ktorom sa prejaví jeho viachodnotovosť.

Viachodnotovosť analytických funkcií už teda, zdá sa, nemôžeme ďalej zametať pod koberec. Aby pojem analytického predĺženia funkcie dával naozajstný zmysel, musíme zrevidovať samotné naše pojatie pojmu analytickej funkcie tak, aby zahŕňalo aj viachodnotové funkcie – „maximálnym" analytickým predĺžením akejkoľvek vetvy logaritmu tak bude „ozajstný viachodnotový logaritmus".

12.2 Analytické prvky a analytické predĺženie

Sformalizujeme teraz ideu analytického predĺženia podľa „reťazcov" prekrývajúcich sa okolí, ktorú sme si na neformálnej úrovni vysvetlili v predchádzajúcom oddiele. Základným stavebným kameňom pre nás pritom bude takzvaný *analytický prvok* – pôjde o kruhové okolie, na ktorom je definovaná nejaká analytická funkcia. V literatúre sa však vyskytujú aj rôzne iné definície analytických prvkov – môže sa napríklad požadovať, aby polomerom kruhového okolia so stredom v $a \in \mathbb{C}$ bol polomer konvergencie Taylorovho radu danej analytickej funkcie so stredom v a; iné definície zas namiesto kruhových okolí pripúšťajú ľubovoľnú oblasť. Všetky podobné prístupy sú však vo svojej podstate ekvivalentné a líšia sa len v detailoch.

[2] Ide teda o zúženie hlavnej vetvy $\operatorname{Ln} z = \ln_0(z)$ prirodzeného logaritmu definovanej na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Definícia 12.2.1. *Analytický prvok* je dvojica (f, D), kde $D = D(a, r)$ je kruhové okolie nejakého bodu $a \in \mathbb{C}$ o polomere $r > 0$ alebo $D = D(a, \infty) := \mathbb{C}$ a $f\colon D \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná na D. Hovoríme potom, že $a \in \mathbb{C}$ je *stredom*[3] analytického prvku (f, D) a $r > 0$ je jeho *polomerom*. Ak je navyše $S \subseteq \mathbb{C}$ oblasť a $D \subseteq S$, hovoríme, že (f, D) je *analytický prvok v oblasti* S.

Definícia 12.2.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f, D), (g, E)$ sú analytické prvky v S. Hovoríme, že:

a) Prvok (g, E) je *priamym analytickým predĺžením* prvku (f, D) v oblasti S, ak $D \cap E \neq \emptyset$ a pre všetky $z \in D \cap E$ je $f(z) = g(z)$.

b) Prvok (g, E) je *analytickým predĺžením* prvku (f, D) v oblasti S, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ a postupnosť analytických prvkov $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ v S takých, že $(f_1, D_1) = (f, D)$, $(f_n, D_n) = (g, E)$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ je prvok (f_{k+1}, D_{k+1}) priamym analytickým predĺžením prvku (f_k, D_k).

Ak $S = \mathbb{C}$, hovoríme iba o *priamom analytickom predĺžení* resp. o *analytickom predĺžení.*

Tvrdenie 12.2.3. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Relácia „byť priamym analytickým predĺžením v S“ je reflexívna a symetrická. Relácia „byť analytickým predĺžením v S“ je reláciou ekvivalencie na množine všetkých analytických prvkov v oblasti S.*

Dôkaz. Zrejmé. □

Tvrdenie 12.2.4. *Nech (f, D) je analytický prvok, E je kruhové okolie a $(g_1, E), (g_2, E)$ sú* priame *analytické predĺženia prvku (f, D). Potom $(g_1, E) = (g_2, E)$.*

Dôkaz. Ak $(g_1, E), (g_2, E)$ sú priame analytické predĺženia prvku (f, D), z definície nutne $D \cap E \neq \emptyset$ a z otvorenosti týchto dvoch množín vyplýva, že $D \cap E$ má v E hromadný bod. Navyše pre všetky $z \in D \cap E$ je $g_1(z) = g_2(z) = f(z)$. Z vety o jednoznačnosti preto $g_1 = g_2$ a $(g_1, E) = (g_2, E)$. □

Poznámka 12.2.5. Príklad prirodzeného logaritmu z úvodného oddielu ukazuje, že nemôže byť pravdivá žiadna obdoba tvrdenia 12.2.4 pre všeobecné – čiže nie nutne priame – analytické predĺženie. Táto skutočnosť je základným zdrojom viachodnotovosti analytických funkcií.

Ľubovoľné dva analytické prvky $(f, D), (g, E)$ také, že D a E majú rovnaký stred a pre všetky $z \in D \cap E$ je $f(z) = g(z)$, sú očividne navzájom svojimi priamymi analytickými predĺženiami. V takom prípade píšeme $(f, D) \equiv (g, E)$ a obidva prvky aj v určitých situáciách stotožňujeme.[4] Zrejme pritom ide o reláciu ekvivalencie.

12.3 Globálne analytické funkcie

Môžeme teraz využiť definície z predchádzajúceho oddielu na zavedenie pojmu *globálnej analytickej funkcie*, ktorá bude daná nejakou ďalej nepredĺžiteľnou množinou analytických prvkov takou, že každé dva prvky z tejto množiny sú vzájomne svojimi analytickými predĺženiami. Pôjde teda o všeobecnosti aj viachodnotové funkcie definované na „maximálnom možnom definičnom obore“. Neskôr definujeme aj *vetvy* globálnych analytických funkcií – a práve tento pojem sa ukáže byť vhodným zovšeobecnením konceptu analytickej funkcie do „viachodnotového sveta“.

[3] Za stred analytického prvku s okolím $\mathbb{C}$ možno považovať každé komplexné číslo a. Ak teda budeme neskôr hovoriť o „dvojiciach analytických prvkov s rovnakým stredom“, špeciálnym prípadom bude aj taká dvojica prvkov, kde aspoň jeden z nich je s okolím $\mathbb{C}$.

[4] Stotožnenie takýchto dvojíc analytických prvkov vychádza z pôvodného Weierstrassovho pojatia analytických prvkov, kde je funkcia f daná mocninovým radom v nejakom bode a a zodpovedajúcim okolím D je $D(a, \varrho)$ pre polomer konvergencie ϱ tohto mocninového radu. Vďaka vete o Taylorových radoch je potom $D(a, \varrho)$ jednoznačne daným maximálnym okolím D so stredom v bode a takým, že (f, D) je analytický prvok. Všetky ostatné analytické prvky tohto typu teda môžeme s prvkom (f, D) bez veľkej ujmy stotožniť.

Definícia 12.3.1. Nech $\mathscr{E}$ je množina všetkých analytických prvkov a $\sim$ je relácia ekvivalencie na $\mathscr{E}$ taká, že pre dvojicu analytických prvkov (f, D), (g, E) je $(f, D) \sim (g, E)$ práve vtedy, keď jeden z týchto prvkov je analytickým predĺžením druhého. *Globálna analytická funkcia* je ľubovoľná trieda ekvivalencie $\mathbf{f}$ relácie $\sim$, čiže ľubovoľný prvok $\mathbf{f} \in \mathscr{E}/\sim$.

Často býva užitočné pracovať aj s „lokálnymi globálnymi analytickými funkciami“, čiže s obdobou globálnych analytických funkcií definovanou na základe analytického predĺženia v nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. Takéto funkcie budeme (nešťastne) volať *globálnymi analytickými funkciami v* S.

Definícia 12.3.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathscr{E}_S$ je množina všetkých analytických prvkov v S a $\sim_S$ je relácia ekvivalencie na $\mathscr{E}_S$ taká, že pre analytické prvky (f, D), (g, E) v S je $(f, D) \sim_S (g, E)$ práve vtedy, keď jeden z nich je analytickým predĺžením toho druhého v S. *Globálna analytická funkcia v oblasti* S je ľubovoľná trieda ekvivalencie $\mathbf{f}$ relácie $\sim_S$, čiže ľubovoľný prvok $\mathbf{f} \in \mathscr{E}_S/\sim_S$.

Poznámka 12.3.3. Globálna analytická funkcia je teda globálna analytická funkcia v oblasti $\mathbb{C}$.

Každá globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ (v oblasti S) je teda nejaká množina analytických prvkov (v oblasti S), pričom pre každý analytický prvok $(f, D) \in \mathbf{f}$ patria do $\mathbf{f}$ práve všetky analytické prvky, ktoré sú (v oblasti S) analytickým predĺžením prvku (f, D). Pracovať priamo s touto definíciou by ale bolo značne ťažkopádne. Zavedieme preto terminológiu a notáciu, ktorá bude mať bližšie k intuitívnej predstave o globálnej analytickej funkcii.

Nech $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. *Definičným oborom* funkcie $\mathbf{f}$ nazveme zjednotenie všetkých množín D takých, že $\mathbf{f}$ obsahuje nejaký prvok (f, D). Ľahko vidieť, že tento definičný obor je opäť oblasť. Pre všetky z z definičného oboru funkcie $\mathbf{f}$ označíme $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ množinu všetkých hodnôt funkcie $\mathbf{f}$ v bode z, danú ako

$$[\![\mathbf{f}(z)]\!] = \{f(z) \mid (f, D) \in \mathbf{f};\ z \in D\}.$$

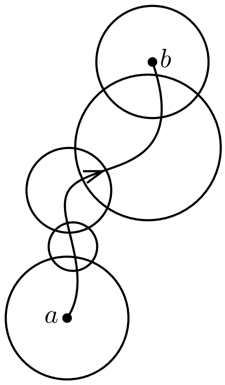
Ak je v nejakom bode z definičného oboru funkcie $\mathbf{f}$ množina $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ jednoprvková, hovoríme, že funkcia $\mathbf{f}$ je v bode z *jednohodnotová*; inak hovoríme, že je *viachodnotová*. Na príklade prirodzeného logaritmu vidieť, že globálna analytická funkcia môže naozaj byť aj viachodnotová. Ak je globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v oblasti S jednohodnotová v každom bode $z \in S$, stotožňujeme túto funkciu s „bežnou“ – a očividne analytickou – funkciou $f\colon S \to \mathbb{C}$ takou, že pre všetky $z \in S$ je $f(z)$ dané ako jediný prvok množiny $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$.

Vetvou globálnej analytickej funkcie $\mathbf{f}$ na oblasti $T \subseteq S$ ďalej nazveme globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}_T$ v oblasti T takú, že $\mathbf{f}_T \subseteq \mathbf{f}$. Ľahko možno dokázať, že špeciálne každý analytický prvok $(f, D) \in \mathbf{f}$ je – po stotožnení s globálnou analytickou funkciou v oblasti D – jednohodnotovou vetvou funkcie $\mathbf{f}$. Zneužívajúc terminológiu tiež hovoríme, že $\mathbf{f}$ je *analytickým predĺžením* ľubovoľnej svojej vetvy (a teda aj ľubovoľného svojho analytického prvku).

Napriek svojej relatívne komplikovanej definícii je tak pojem vetvy globálnej analytickej funkcie prirodzeným zovšeobecnením pojmu analytickej funkcie, ako sme ho chápali doteraz.

12.4 Analytické predĺženie pozdĺž krivky

V úvodnom oddiele tejto kapitoly sme holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu analyticky predlžovali pozdĺž jednotkovej kružnice – videli sme pritom, že orientácia a počet jej „obkrúžení“ boli rozhodujúce pre to, akú vetvu sme získali na konci celého procesu. Myšlienku takéhoto *analytického predĺženia pozdĺž krivky* teraz sformalizujeme – pôjde o predĺženie, v ktorom jednotlivé analytické prvky vyberáme tak, aby ich stredy ležali na danej krivke, pričom stredom prvého okolia je počiatočný bod a stredom posledného okolia je koncový bod tejto krivky. Táto situácia je znázornená na obrázku 12.4. Dokážeme, že analytické predĺženie pozdĺž krivky skutočne závisí iba od tejto krivky a nie od konkrétneho výberu analytických prvkov so stredmi na tejto krivke.



Obr. 12.4: Analytické predĺženie pozdĺž krivky z bodu a do bodu b.

Definícia 12.4.1. Nech (f,D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$ a (g,E) je analytický prvok so stredom $b \in \mathbb{C}$. Nech $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je krivka. Hovoríme, že prvok (g,E) je *analytickým predĺžením* prvku (f,D) *pozdĺž krivky* γ, ak existuje $n \in \mathbb{N}$, reálne čísla $\alpha = t_0 \leq \ldots \leq t_n = \beta$ a analytické prvky $(f_1,D_1),\ldots,(f_n,D_n)$, pre ktoré sú splnené nasledujúce podmienky:

(*i*) Platí $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$, $(f_1,D_1) = (f,D)$ a $(f_n,D_n) = (g,E)$.

(*ii*) Pre $k = 1,\ldots,n$ je $(\gamma \restriction [t_{k-1},t_k])^* \subseteq D_k$ a stred okolia D_k leží v γ^*.

(*iii*) Pre $k = 1,\ldots,n-1$ je (f_{k+1},D_{k+1}) priamym analytickým predĺžením prvku (f_k,D_k).

Poznámka 12.4.2. Hodnoty $t_0,\ldots,t_n$ z predchádzajúcej definície je vždy možné bez ujmy na všeobecnosti predpokladať po dvoch rôzne tak, aby bolo $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ (a to aj v prípade zhodnosti niektorých okolí).

Poznámka 12.4.3. *Každé* analytické predĺženie možno chápať ako analytické predĺženie pozdĺž krivky, ba dokonca pozdĺž lomenej čiary. Stačí pospájať úsečkami stredy analytických prvkov vystupujúcich v definícii analytického predĺženia.

Dokážeme teraz, že „výsledok“ analytického predĺženia pevne daného analytického prvku (f,D) pozdĺž pevne danej krivky γ je vždy jednoznačne daný – ľubovoľné dve analytické predĺženia (f,D) pozdĺž γ sú totiž v relácii $\equiv$.

Tvrdenie 12.4.4. *Nech (f,D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$, $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\gamma(\alpha) = a$ a $(g_1,E_1),(g_2,E_2)$ sú analytické predĺženia (f,D) pozdĺž γ. Potom $(g_1,E_1) \equiv (g_2,E_2)$.*

Dôkaz. Nech $(f_1,D_1),\ldots,(f_n,D_n)$ sú analytické prvky z definície 12.4.1, vďaka ktorým je prvok (g_1,E_1) analytickým predĺžením (f,D) pozdĺž γ; nech $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ sú zodpovedajúce indexy v zmysle poznámky 12.4.2. Nech $(\hat{f}_1,\hat{D}_1),\ldots,(\hat{f}_m,\hat{D}_m)$ sú takéto analytické prvky pre (g_2,E_2) a $\alpha = \hat{t}_0 < \ldots < \hat{t}_m = \beta$ sú príslušné indexy. Potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ je okolie $D[t] := D(\gamma(t),\varepsilon)$ súčasne podmnožinou D_k pre $k \in \{1,\ldots,n\}$ také, že $t \in [t_{k-1},t_k] =: I_k$ a podmnožinou $\hat{D}_j$ pre $j \in \{1,\ldots,m\}$ také, že $t \in [\hat{t}_{j-1},\hat{t}_j] =: \hat{I}_j$.[5] Evidentne $\alpha \in I_1 \cap \hat{I}_1$ a $\beta \in I_n \cap \hat{I}_m$.

Pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ definujme funkcie $f[t]\colon D[t] \to \mathbb{C}$ a $\hat{f}[t]\colon D[t] \to \mathbb{C}$ ako $f[t](z) = f_k(z)$ a $\hat{f}[t](z) = \hat{f}_j(z)$ pre všetky $z \in D[t]$ a $k \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}$ také, že $t \in I_k \cap \hat{I}_j$. Ak pritom $t = t_p$ pre $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, je súčasne $t \in I_p$ a $t \in I_{p+1}$ – a podobne ak $t = \hat{t}_q$ pre $q \in \{1,\ldots,m-1\}$, je súčasne $t \in \hat{I}_q$ a $t \in \hat{I}_{q+1}$. Uvedená definícia funkcií $f[t]$ a $\hat{f}[t]$ je ale napriek tomu korektná, pretože pre $t = t_p$ je $D[t] \subseteq D_p \cap D_{p+1}$ a keďže (f_{p+1},D_{p+1}) je priamym analytickým predĺžením prvku (f_p,D_p), musí pre všetky $z \in D_p \cap D_{p+1}$ byť $f_p(z) = f_{p+1}(z)$; podobne pre $t = \hat{t}_q$ je $D[t] \subseteq \hat{D}_q \cap \hat{D}_{q+1}$ a keďže je $(\hat{f}_{q+1},\hat{D}_{q+1})$ priamym analytickým predĺžením $(\hat{f}_q,\hat{D}_q)$, je $\hat{f}_q(z) = \hat{f}_{q+1}(z)$ pre všetky $z \in \hat{D}_q \cap \hat{D}_{q+1}$.

[5] Príslušnosť okolí D_k a $\hat{D}_j$ k intervalom obsahujúcim t je potrebné zdôrazniť, pretože krivka γ nemusí byť jednoduchá. Môžu teda existovať $t,t' \in [\alpha,\beta]$ také, že $t \neq t'$, ale $\gamma(t) = \gamma(t')$ a v takom prípade je tento bod stredom dvoch zhodných okolí $D[t]$ a $D[t']$. Je ich teda nutné medzi sebou odlíšiť v prípade, že zodpovedajú rôznym D_k resp. $\hat{D}_j$.

Keďže sú navyše $f[t]$ a $\hat{f}[t]$ pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ zúženiami holomorfných funkcií, sú obe tieto funkcie holomorfné na $D[t]$; v nasledujúcom tak môžeme skúmať analytické prvky $(f[t], D[t])$ a $(\hat{f}[t], D[t])$ v závislosti na parametri $t \in [\alpha, \beta]$. *Stačí pritom ukázať, že* $f[\beta] = \hat{f}[\beta]$ – keďže totiž pre všetky $z \in D[\beta] \subseteq D_n \cap \hat{D}_m$ je $f[\beta](z) = f_n(z)$ a $\hat{f}[\beta](z) = \hat{f}_m(z)$, pričom $D[\beta]$ má v oblasti $D_n \cap \hat{D}_m$ hromadný bod, z rovnosti $f[\beta] = \hat{f}[\beta]$ pomocou vety o jednoznačnosti dostaneme $f_n(z) = \hat{f}_m(z)$ pre všetky $z \in D_n \cap \hat{D}_m$; okolia D_n a $\hat{D}_m$ pritom majú rovnaký stred $\gamma(\beta)$, z čoho vyplynie, že nutne $(g_1, E_1) = (f_n, D_n) \equiv (\hat{f}_m, \hat{D}_m) = (g_2, E_2)$.

Nech teraz $\alpha = \tilde{t}_0 < \ldots < \tilde{t}_s = \beta$ sú indexy také, že pre $\ell = 1, \ldots, s$ existujú $k \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ také, že $\tilde{I}_\ell := [\tilde{t}_\ell - 1, \tilde{t}_\ell] \subseteq I_k \cap \hat{I}_j$. Indukciou vzhľadom na $\ell = 1, \ldots, s$ dokážeme, že pre všetky $t \in \tilde{I}_\ell$ je $f[t] = \hat{f}[t]$.

Pre $\ell = 1$ a ľubovoľné $t \in \tilde{I}_1$ je $t \in I_1 \cap \hat{I}_1$ – funkcia $f[t]$ je teda zúžením f_1 na $D[t]$ a funkcia $\hat{f}[t]$ je zúžením $\hat{f}_1$ na $D[t]$. Avšak $(f_1, D_1) = (\hat{f}_1, \hat{D}_1) = (f, D)$, takže naozaj $f[t] = \hat{f}[t]$.

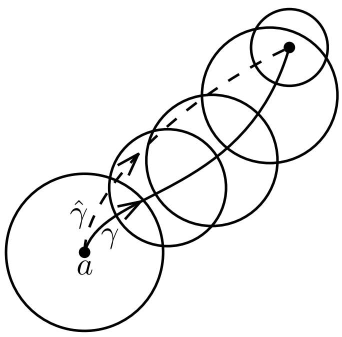
Nech teraz tvrdenie platí pre $\ell = q < s$ a uvažujme $\ell = q + 1$. Potom $\tilde{t}_q \in \tilde{I}_q$ a súčasne $\tilde{t}_q \in \tilde{I}_{q+1}$. Z indukčného predpokladu teda $f[\tilde{t}_q] = \hat{f}[\tilde{t}_q]$. Pre $k \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ také, že $\tilde{I}_{q+1} \subseteq I_k \cap \hat{I}_j$ ale súčasne $D[\tilde{t}_q] \subseteq D_k \cap \hat{D}_j$, pričom $D[\tilde{t}_q]$ má v oblasti $D_k \cap \hat{D}_j$ hromadný bod a pre všetky $z \in D[\tilde{t}_q]$ je $f_k(z) = f[\tilde{t}_q](z) = \hat{f}[\tilde{t}_q](z) = \hat{f}_j(z)$. Z vety o jednoznačnosti teda dostávame $f_k(z) = \hat{f}_j(z)$ pre všetky $z \in D_k \cap \hat{D}_j$. Pre ľubovoľné $t \in \tilde{I}_{q+1}$ ale $D[t] \subseteq D_k \cap \hat{D}_j$, pričom $f[t]$ je zúžením f_k na $D[t]$ a $\hat{f}[t]$ je zúžením $\hat{f}_j$ na $D[t]$. Z uvedeného teda vyplýva, že $f[t] = \hat{f}[t]$.

Pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ teda skutočne $f[t] = \hat{f}[t]$ – a špeciálne $f[\beta] = \hat{f}[\beta]$, čo bolo treba dokázať. □

Tvrdenie 12.4.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $(f, D), (g, E)$ sú analytické prvky v S také, že (g, E) je analytickým predĺžením (f, D) pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$. Potom je (g, E) analytickým predĺžením (f, D) v oblasti S.*

Dôkaz. Nech sú $(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ analytické prvky, vďaka ktorým je analytický prvok (g, E) analytickým predĺžením (f, D) pozdĺž krivky γ; nech ďalej $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ sú príslušné indexy v zmysle poznámky 12.4.2. Pre $k = 1, \ldots, n$ uvažujme interval $I_k := [t_{k-1}, t_k]$ a príslušné zúženie $\gamma_k := \gamma \restriction I_k$ krivky γ; množina γ_k^* je potom kompaktná, a teda existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \gamma_k^*$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq S \cap D_k$. Vďaka kompaktnosti γ_k^* tiež existuje jej konečné pokrytie okoliami $\hat{D}_{k,1}, \ldots, \hat{D}_{k,m_k}$ so stredom v γ_k^* a o polomere ε, pričom $\gamma(t_{k-1}) \in \hat{D}_{k,1}$ a $\gamma(t_k) \in \hat{D}_{k,m_k}$. Pre $k = 1, \ldots, n$ a $\ell = 1, \ldots, m_k$ potom možno funkciu $\hat{f}_{k,\ell}\colon \hat{D}_{k,\ell} \to \mathbb{C}$ korektne definovať pre všetky $z \in \hat{D}_{k,\ell}$ ako $\hat{f}_{k,\ell}(z) = f_k(z)$. Ľahko vidieť, že $(f, D), (\hat{f}_{1,1}, \hat{D}_{1,1}), \ldots, (\hat{f}_{1,m_1}, \hat{D}_{1,m_1}), \ldots, (\hat{f}_{n,1}, \hat{D}_{n,1}), \ldots, (\hat{f}_{n,m_n}, \hat{D}_{n,m_n}), (g, E)$ je postupnosť analytických prvkov, vďaka ktorým je (g, E) analytickým predĺžením (f, D) v oblasti S. □

V definícii analytického predĺženia pozdĺž krivky sme – najmä kvôli súladu tohto pojmu s intuíciou – požadovali, aby stredy jednotlivých analytických prvkov ležali na danej krivke. Dokážeme teraz tvrdenie, podľa ktorého je táto podmienka nepodstatná za predpokladu, že je krivka stále jednotlivými analytickými prvkami pokrytá. Jeho znenie je znázornené aj na obrázku 12.5.



Obr. 12.5: Tvrdenie 12.4.6.

Tvrdenie 12.4.6. *Nech (f, D) je analytický prvok so stredom $a \in \mathbb{C}$, $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\gamma(\alpha) = a$, (g, E) je analytické predĺženie (f, D) pozdĺž γ a $(f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)$ sú analytické prvky zodpovedajúce tomuto predĺženiu podľa definície 12.4.1. Nech $\hat{\gamma}\colon [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \to \mathbb{C}$ je krivka taká, že $\hat{\gamma}(\hat{\alpha}) = \gamma(\alpha)$ a $\hat{\gamma}(\hat{\beta}) = \gamma(\beta)$, pričom existujú čísla $\alpha = \hat{t}_0 < \ldots < \hat{t}_n = \beta$ také, že pre $k = 1, \dots, n$ krivka $\hat{\gamma}_k := \hat{\gamma} \restriction [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$ spĺňa $\hat{\gamma}_k^* \subseteq D_k$. Potom existuje analytické predĺženie $(\hat{g}, \hat{E})$ prvku (f, D) pozdĺž $\hat{\gamma}$, pričom $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (g, E)$.*

Dôkaz. Myšlienka dôkazu spočíva v pokrytí krivky $\hat{\gamma}$ dostatočne malými okoliami tak, aby každé z týchto okolí bolo podmnožinou príslušného „veľkého“ okolia D_k. Následne možno skúmať analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\hat{\gamma}$, využívajúce tieto okolia – vďaka tvrdeniu 12.4.4 na výbere okolí nezáleží.

Presnejšie: keďže je pre $k = 1, \dots, n$ množina $\hat{\gamma}_k^* \subseteq D_k$ kompaktná, existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in \hat{\gamma}_k^*$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq D_k$. Vďaka kompaktnosti $\hat{\gamma}_k^*$ potom existuje aj nejaké *konečné* pokrytie $\hat{\gamma}_k^*$ okoliami tohto typu. Vyberme takéto konečné pokrytie pre každú z kriviek $\hat{\gamma}_k$ pre $k = 1, \dots, n$ a zahrňme doň vždy aj okolia $D(\hat{\gamma}(\hat{t}_{k-1}), \varepsilon)$ a $D(\hat{\gamma}(\hat{t}_k), \varepsilon)$. Zisťujeme potom, že existujú čísla $\hat{\alpha} = s_0 < \ldots < s_m = \hat{\beta}$ také, že pre $k = 0, \dots, n$ je $\hat{t}_k = s_j$ pre nejaké $j \in \{0, \dots, m\}$, a pre $j = 0, \dots, m$ okolie $\hat{D}_j$ so stredom v s_j, pričom $\hat{D}_0 = D$ a pre $j = 1, \dots, m$ je $(\hat{\gamma} \restriction [s_{j-1}, s_j])^* \subseteq \hat{D}_j$ a $\hat{D}_j \subseteq D_k$ pre $k \in \{1, \dots, n\}$ spĺňajúce $s_j \in [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$. Ak na takomto okolí $\hat{D}_j$ definujeme funkciu $\hat{f}_j\colon \hat{D}_j \to \mathbb{C}$ predpisom $\hat{f}_j(z) = f_k(z)$ pre všetky $z \in \hat{D}_j$ a ak vezmeme $f_0 = f$, bude pre $j = 1, \dots, m$ analytický prvok $(\hat{f}_j, \hat{D}_j)$ evidentne priamym analytickým predĺžením prvku $(\hat{D}_{j-1}, \hat{f}_{j-1})$. Naozaj teda existuje analytické predĺženie $(\hat{g}, \hat{E}) = (\hat{f}_m, \hat{D}_m)$ prvku (f, D) pozdĺž krivky $\hat{\gamma}$, pričom pre všetky $z \in \hat{D}_m \subseteq D_n$ je $\hat{f}_m(z) = f_n(z)$. Nutne teda musí byť $\hat{g}(z) = \hat{f}_m(z) = f_n(z) = g(z)$ pre všetky $z \in \hat{E}$, z čoho vyplýva, že naozaj $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (g, E)$. □

12.5 Jednohodnotové globálne analytické funkcie

Analytický prvok v nejakej oblasti S so stredom v bode a nazveme *neobmedzene predĺžiteľným* v S, ak existuje jeho analytické predĺženie pozdĺž ľubovoľnej krivky v oblasti S začínajúcej v bode a.

Definícia 12.5.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a (f, D) je analytický prvok v S so stredom $a \in S$. Hovoríme, že prvok (f, D) je *neobmedzene predĺžiteľný v* S, ak pre ľubovoľnú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ takú, že $\gamma^* \subseteq S$ a $\gamma(\alpha) = a$ existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ.

Zaviedli sme už konvenciu stotožňovania jednohodnotových globálnych analytických funkcií $\mathbf{f}$ v oblasti S s „bežnými“ analytickými funkciami $f\colon S \to \mathbb{C}$ – každá jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S totiž zrejme takúto funkciu f definuje. Ukážeme teraz, že aj naopak ku každej „bežnej“ analytickej funkcii $f\colon S \to \mathbb{C}$ zodpovedá jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S; každý analytický prvok tejto funkcie je navyše v S neobmedzene predĺžiteľný. Toto pozorovanie – ktoré pre jeho dôležitosť sformulujeme ako vetu – umožňuje pojmy „bežnej“ analytickej funkcie na S a jednohodnotovej globálnej analytickej funkcie v S nadobro stotožniť.

Veta 12.5.2. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $f\colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná funkcia. Potom existuje jednohodnotová globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S taká, že pre všetky $z \in S$ je $[\![\mathbf{f}(z)]\!] = \{f(z)\}$. Každý analytický prvok funkcie $\mathbf{f}$ je navyše neobmedzene predĺžiteľný v S a*

$$\mathbf{f} = \{(f_D, D) \mid \exists a \in S\ \exists r > 0\colon D = D(a, r) \subseteq S;\ \forall z \in D : f_D(z) = f(z)\}.$$

Dôkaz. Pre každé $T \subseteq S$ označme ako $f_T\colon T \to \mathbb{C}$ zúženie funkcie f na T. Nech $a \in S$, $r > 0$ a $D = D(a, r)$ je okolie také, že $D \subseteq S$. Stačí dokázať, že pre ľubovoľnú voľbu takéhoto D je analytický prvok (f_D, D) neobmedzene predĺžiteľný v S, pričom pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = b$ je analytickým predĺžením prvku (f_D, D) pozdĺž γ prvok (f_E, E) pre nejaké $E = D(b, s)$, kde $s > 0$ a $E \subseteq S$.

Nech je ale takáto krivka γ daná. Uvažujme pokrytie krivky γ okoliami $D_1, \ldots, D_n \subseteq S$ so stredmi v γ^* takými, že $D_1 = D$ a pre nejaké reálne čísla $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ a $k = 1, \ldots, n$ je $(\gamma \restriction [t_{k-1}, t_k])^* \subseteq D_k$. Potom $(f_{D_1}, D_1) = (f_D, D)$ a ľahko vidieť, že pre $k = 1, \ldots, n-1$ je analytický prvok $(f_{D_{k+1}}, D_{k+1})$ priamym analytickým predĺžením prvku (f_{D_k}, D_k). Analytickým predĺžením prvku (f_D, D) pozdĺž γ je tak prvok (f_{D_n}, D_n), pričom zrejme $(f_{D_n}, D_n) \equiv (f_E, E)$. Preto je (f_E, E) naozaj (až na $\equiv$ jediným) analytickým predĺžením (f_D, D) pozdĺž γ. Keďže γ môže byť ľubovoľná krivka s danými vlastnosťami, je prvok (f_D, D) neobmedzene predĺžiteľný v S. $\square$

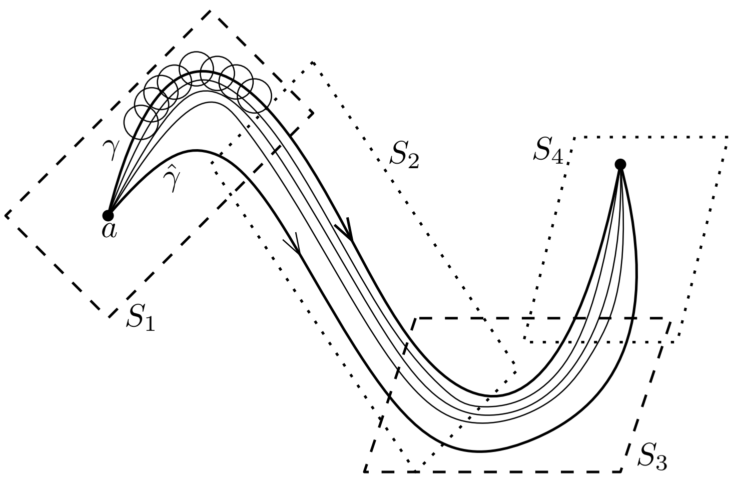
12.6 Veta o monodrómii

Dokážeme teraz *vetu o monodrómii*, ktorá sa právom pokladá za jednu z najdôležitejších viet o analytickom predĺžení. Hovorí nasledujúce: ak je oblasť S *jednoducho súvislá* a nejaká globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S obsahuje analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v S, tak je funkcia $\mathbf{f}$ na S jednohodnotová a splýva s „bežnou“ holomorfnou funkciou $f\colon S \to \mathbb{C}$.

Po ceste k vete monodrómii v skutočnosti dokážeme aj o niečo silnejšie tvrdenie: ak je S ľubovoľná – teda nie nutne jednoducho súvislá – oblasť a (f, D) je neobmedzene predĺžiteľný analytický prvok v S, tak je jeho analytické predĺženie rovnaké pozdĺž ľubovoľných dvoch kriviek homotopických v S a začínajúcich v strede okolia D.

Veta 12.6.1. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $a \in S$ je bod, $D \subseteq S$ je kruhové okolie so stredom v bode a, $\gamma, \hat{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^*, \hat{\gamma}^* \subseteq S$, $\gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$ sú krivky homotopické v S ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi a (f, D) je analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v S. Nech (g, E) je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ a $(\hat{g}, \hat{E})$ je jeho predĺženie pozdĺž $\hat{\gamma}$. Potom $(g, E) \equiv (\hat{g}, \hat{E})$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pre prípad, že krivka $\hat{\gamma}$ vznikne z γ elementárnou deformáciou; rozšírenie na prípad homotopických kriviek je už potom vďaka vete 5.3.12 iba otázkou jednoduchého induktívneho argumentu. Rámcová myšlienka dôkazu – definovať dostatočné množstvo kriviek[6] „medzi γ a $\hat{\gamma}$“ a každé dve po sebe idúce z týchto kriviek pokryť spoločnou konečnou postupnosťou okolí pod S tak, aby bolo možné aplikovať tvrdenie 12.4.6 – je znázornená na obrázku 12.6.



Obr. 12.6: Myšlienka dôkazu vety 12.6.1.

K danej dvojici kriviek prislúcha nejaké pokrytie konvexnými oblasťami $S_1, \ldots, S_n$ a rozdelenie na podkrivky $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ a $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n$ ako v definícii 5.3.10. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre $k = 1, \ldots, n$ sú krivky γ_k a $\hat{\gamma}_k$ parametrizované rovnakým intervalom $[\alpha_k, \beta_k]$. Z konvexnosti množiny S_k vyplýva, že pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ leží úsečka $[\gamma_k(t), \hat{\gamma}_k(t)]$ celá v S_k. To znamená,

[6] V princípe pôjde o krivky „vyrobené“ homotópiou z γ na $\hat{\gamma}$.

že pre všetky $q \in [0,1]$ môžeme definovať krivku $\gamma_k[q]\colon [\alpha_k, \beta_k] \to S$ pre všetky $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ predpisom

$$\gamma_k[q](t) = \gamma(t) + q(\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)).$$

Pre každé $q \in [0,1]$ je spojenie týchto kriviek, $\gamma[q] := \gamma_1[q] + \ldots + \gamma_n[q]$, krivkou vedúcou z bodu $a = \gamma(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha)$ do bodu $\gamma(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$; navyše platí $\gamma[q]^* \subseteq S$.

Množina

$$Q := \bigcup_{q \in [0,1]} \gamma[q]^*$$

je kompaktná, a teda existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $z \in Q$ je $D(z, \varepsilon) \subseteq S$. Ak navyše

$$d = \sup\{|\hat{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| \mid k \in \{1, \ldots, n\};\ t \in [\alpha_k, \beta_k]\},$$

vezmime $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že $d/m < \varepsilon/2$. Pre $j = 0, \ldots, m-1$ a $k = 1, \ldots, n$ potom množinu $\gamma_k[j/m]^* \cup \gamma_k[(j+1)/m]^*$ môžeme pokryť kruhovými okoliami typu $D(z, \varepsilon)$, kde $z \in \gamma_k[j/m]^*$. Množina $\gamma_k[j/m]^* \cup \gamma_k[(j+1)/m]^*$ je navyše kompaktná, a teda existuje aj takéto konečné pokrytie.

Keďže je analytický prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S, musí existovať jeho analytické predĺženie pozdĺž každej z kriviek $\gamma[j/m]$ pre $j = 0, \ldots, m$. Po zjednotení spomínaných konečných pokrytí $\gamma_k[j/m]^* \cup \gamma_k[(j+1)/m]^*$ cez všetky $k \in \{1, \ldots, n\}$ a pridaní najviac dvoch ďalších okolí o polomere ε (so stredmi v spoločnom počiatočnom resp. koncovom bode uvažovaných kriviek) tak sú pre $j = 0, \ldots, m-1$ a krivky $\gamma[j/m]$, $\gamma[(j+1)/m]$ splnené predpoklady tvrdenia 12.4.6. Pre analytické predĺženia (g_j, E_j), (g_{j+1}, E_{j+1}) prvku (f, D) pozdĺž kriviek $\gamma[j/m]$ resp. $\gamma[(j+1)/m]$ teda platí $(g_j, E_j) \equiv (g_{j+1}, E_{j+1})$. Keďže však $\gamma[0] = \gamma$, $\gamma[1] = \hat{\gamma}$ a relácia $\equiv$ je tranzitívna, nutne $(g, E) \equiv (\hat{g}, \hat{E})$, čo bolo treba dokázať. □

Z práve dokázanej vety možno už ako pomerne jednoduchý dôsledok odvodiť aj samotnú *vetu o monodrómii.*

Veta 12.6.2 (O monodrómii). *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S obsahujúca nejaký analytický prvok (f, D) neobmedzene predĺžiteľný v S. Potom je funkcia $\mathbf{f}$ na S jednohodnotová.*

Dôkaz. Predpokladajme, že globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ v S za daných predpokladov nie je jednohodnotová. Potom existuje dvojica analytických prvkov $(g_1, E_1), (g_2, E_2)$ v $\mathbf{f}$ s rovnakým stredom $b \in S$ takých, že $(g_1, E_1) \not\equiv (g_2, E_2)$. Keďže prvky (g_1, E_1), (g_2, E_2) a (f, D) všetky patria do $\mathbf{f}$, sú všetky tieto prvky navzájom svojimi analytickými predĺženiami v S – videli sme pritom, že v takom prípade ide aj o analytické predĺženia pozdĺž nejakých kriviek.

Nech (f, D) má stred $a \in S$ a nech γ s $\gamma^* \subseteq S$ je krivka z bodu a do bodu b taká, že (g_1, E_1) je analytickým predĺžením prvku (f, D) podľa γ. Nech $\hat{\gamma}$ s $\hat{\gamma}^* \subseteq S$ je krivka z a do b taká, že (g_2, E_2) je predĺžením prvku (f, D) podľa $\hat{\gamma}$. Krivky γ a $\hat{\gamma}$ potom podľa tvrdenia 5.5.6 musia byť v jednoducho súvislej oblasti S homotopické ako krivky s rovnakými počiatočnými a koncovými bodmi. Prvok (f, D) je navyše neobmedzene predĺžiteľný v S a z vety 12.6.1 tak dostávame $(g_1, E_1) \equiv (g_2, E_2)$: spor. □

12.7 Riemannove plochy

Pri štúdiu globálnych analytických funkcií sa často zíde ich prirodzená geometrická interpretácia pomocou takzvaných *Riemannových plôch.* Viachodnotové funkcie definované na nejakej podmnožine komplexnej roviny totiž môžeme rovnako dobre považovať aj za jednohodnotové funkcie definované na ploche takej, že analytické predĺženie pozdĺž dvoch „neekvivalentných“ kriviek z nejakého bodu a vždy vedie do rôznych bodov na tejto ploche. Tak napríklad prirodzený logaritmus možno reprezentovať na „špirálovej ploche“ okolo $z = 0$, kde každá holomorfná vetva logaritmu (napríklad) na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ zodpovedá jednému „poschodiu“ tejto špirály. Riemannovými plochami sa pre značnú rozsiahlosť a netriviálnosť tejto problematiky zaoberať nebudeme – čitateľa len odkážeme na [7].

Cvičenia

1. Nájdite globálnu analytickú funkciu obsahujúcu ako svoju vetvu:

   a) Funkciu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ definovanú na $D(0, 1)$.

   b) Hlavnú vetvu $\operatorname{Ln} z = \ln_0(z)$ prirodzeného logaritmu definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   c) Hlavnú vetvu $e^{(\operatorname{Ln} z)/n}$ mocninovej funkcie $z^{1/n}$ pre nejaké prirodzené $n \geq 2$, definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   d) Hlavnú vetvu $e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ mocninovej funkcie z^α pre $\alpha \in \mathbb{C}$, definovanú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   e) Nejakú funkciu meromorfnú na $\mathbb{C}$.

2. Ak existuje, nájdite globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ s definičným oborom S takú, že pre všetky $z \in S$ je $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ alebo jednoprvková, alebo dvojprvková množina, pričom obidva tieto prípady nastanú pre aspoň jedno $z \in S$.

3. Ak existuje, nájdite globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ takú, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existuje $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré je $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ presne n-prvková množina.

4. Videli sme, že každé analytické predĺženie je analytickým predĺžením pozdĺž nejakej lomenej čiary. Dokážte, že rovnaké tvrdenie je pravdivé aj pre analytické predĺženia pozdĺž lomených čiar $\gamma = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + \ldots + [a_{n-1}, a_n]$ takých, že $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_n \in \mathbb{C}$ a pre $k = 1, \ldots, n-1$ je $a_k = p_k + iq_k$, kde $p_k, q_k \in \mathbb{Q}$.

5. Dokážte *Poincarého-Volterrovu* vetu, podľa ktorej je pre každú globálnu analytickú funkciu $\mathbf{f}$ a každé $z \in \mathbb{C}$ množina $[\![\mathbf{f}(z)]\!]$ nanajvýš spočítateľne nekonečná.

Kapitola 13

Singularity

V súvislosti s Laurentovými radmi sme sa už zaoberali izolovanými singularitami jednohodnotových analytických funkcií. Koncept analytického predĺženia nám v nasledujúcom umožní definovať a skúmať *singularity* vo všeobecnosti – to znamená tak, aby tento pojem zahŕňal ako neizolované singularity, tak aj singularity viachodnotových analytických funkcií.[1]

13.1 Definícia singularity

Pod *singularitou* analytického prvku (f, D) budeme rozumieť bod na hranici kruhového okolia D taký, že neexistuje žiadne priame analytické predĺženie prvku (f, D) so stredom v tomto bode.

Definícia 13.1.1. Nech (f, D) je analytický prvok. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *singularitou* analytického prvku (f, D), ak $b \in \overline{D} \setminus D$ a neexistuje žiaden analytický prvok (g, E) so stredom v b, ktorý je priamym analytickým predĺžením prvku (f, D).

Poznámka 13.1.2. Namiesto $b \in \overline{D} \setminus D$ by sme v definícii singularity mohli požadovať iba $b \in \overline{D}$; pre každé $b \in D$ totiž zrejme existuje priame analytické predĺženie prvku (f, D) so stredom v b – stačí vziať funkciu f na okolí bodu b dostatočne malom na to, aby bolo celé súčasťou D. Príslušnosť bodu b do $\overline{D}$ je naopak zásadná – singularitou totiž chceme nazvať iba bod *v bezprostrednej blízkosti* oblasti, na ktorej je funkcia definovaná a analytická.

Definíciu singularít globálnej analytickej funkcie v oblasti S musíme sformulovať o niečo opatrnejšie, s použitím pojmu analytického predĺženia pozdĺž krivky – pôjde o „prekážky“ pri analytickom predĺžení pozdĺž kriviek. Ľahko vidieť, že ak pre nejakú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ existuje analytické predĺženie nejakého analytického prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, kde $\tau \in [\alpha, \beta)$, tak takéto predĺženie musí existovať aj pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, t]$ pre všetky t z nejakého intervalu $[\tau, \tau + \varepsilon]$, kde $\varepsilon > 0$. Ak teda existuje nejaké $\tau \in [\alpha, \beta]$ také, že *neexistuje* analytické predĺženie (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, nutne musí existovať aj *najmenšie* také τ. Táto myšlienka je v pozadí za nasledujúcou definíciou.

Definícia 13.1.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *singularita* funkcie $\mathbf{f}$, ak existuje analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v bode $a \in S$ a krivka $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ a nasledujúcimi vlastnosťami:

(i) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta)$ je $\gamma(t) \in S$ a existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, t]$.

(ii) Neexistuje žiadne analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž krivky γ.

[1] Čiže globálnych analytických funkcií v nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$, resp. ekvivalentne vetiev nejakej globálnej analytickej funkcie.

Poznámka 13.1.4. Singularitou globálnej analytickej funkcie teda nazveme ľubovoľný bod b, ktorý je singularitou *aspoň jednej* z jej vetiev.[2] Nemusí pritom ísť o singularitu každej vetvy definovanej v blízkosti bodu b, ako možno vidieť na príklade funkcie $1/\ln z$. Dá sa ukázať, že táto funkcia – okrem toho, že je singulárna v bode 0 – má singularitu aj v bode 1: ide o jednoduchý pól spôsobený tým, že existuje vetva prirodzeného logaritmu taká, že $\ln 1 = 0$. Existujú však aj iné vetvy prirodzeného logaritmu na okolí bodu 1, pričom zodpovedajúce vetvy funkcie $1/\ln z$ sú v bode 1 analytické.

Dokážeme teraz, že singularity analytických prvkov funkcie $\mathbf{f}$ sú súčasne aj singularitami samotnej tejto funkcie.

Tvrdenie 13.1.5. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a (f, D) je analytický prvok funkcie $\mathbf{f}$. Ak $b \in \mathbb{C}$ je singularita prvku (f, D), je tento bod aj singularitou funkcie $\mathbf{f}$.*

Dôkaz. Nech a je stred kruhového okolia D. Bod b leží na hranici tohto kruhového okolia. Uvažujme úsečku $[a, b]$. Pre všetky $t \in [0, 1)$ zjavne existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž úsečky $[a, b] \restriction [0, t]$ – je ním ľubovoľný analytický prvok (g, E) taký, že E je kruhové okolie bodu $[a, b](t)$ obsiahnuté v D a g je zúženie funkcie f na E. Analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $[a, b]$ ale neexistuje, pretože by zrejme bolo priamym analytickým predĺžením prvku (f, D) so stredom v jeho singularite b. □

Poznámka 13.1.6. Existuje globálna analytická funkcia $\mathbf{f}$ so singularitou v bode $b \in \mathbb{C}$ taká, že b nie je singularita žiadneho analytického prvku (f, D) funkcie $\mathbf{f}$.

Poznámka 13.1.7. Je jednoduchým cvičením dokázať, že singularitami jednohodnotovej analytickej funkcie $f \colon D \to \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$ je nejaké kruhové okolie, sú práve všetky singularity analytického prvku (f, D). Tento fakt budeme v nasledujúcom voľne využívať.

V minulej kapitole sme videli, že každú „bežnú“ jednohodnotovú analytickú funkciu $f \colon S \to \mathbb{C}$ na nejakej oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ možno chápať aj ako globálnu analytickú funkciu na tejto oblasti. Mali by sme sa teda presvedčiť o tom, že izolované singularity – tak, ako sme ich chápali doteraz – sú singularitami aj podľa novej definície. Presnejšie teraz ukážeme, že táto vlastnosť platí pre póly a podstatné izolované singularity; *odstrániteľné singularity už ďalej za singularity považovať nebudeme.*

Tvrdenie 13.1.8. *Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $f \colon S \to \mathbb{C}$ je holomorfná na S a $b \in \mathbb{C}$ je pól alebo podstatná izolovaná singularita funkcie f. Potom je bod b singularitou funkcie f.*

Dôkaz. Z definície izolovanej singularity vyplýva, že pre nejaké $r > 0$ musí byť $D'(b, r) \subseteq S$. Vezmime ľubovoľné $a \in D'(b, r/2)$ a $D := D(a, |b - a|) \subseteq D'(b, r)$; nech f_D je zúženie f na D. Potom je (f_D, D) analytickým prvkom funkcie f. Keby teraz bod b nebol singularitou funkcie f, muselo by existovať analytické predĺženie (g, E) prvku (f_D, D) pozdĺž úsečky $[a, b]$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $E = D(b, s)$, kde $0 < s < r$. Funkcia g sa zhoduje s funkciou f na množine $D(b, s) \cap D$ a prstencové okolie $D'(b, s)$, na ktorom sú definované obidve funkcie f a g, má hromadný bod v $D(b, s) \cap D$. Z vety o jednoznačnosti teda vyplýva, že pre všetky $z \in D'(b, s)$ je $f(z) = g(z)$ a vďaka jednoznačnosti koeficientov Laurentových radov zisťujeme, že Laurentovým radom funkcie f v bode b musí byť Taylorov rad funkcie g v tomto bode. Bod b teda môže byť nanajvýš odstrániteľnou singularitou funkcie f, čo je spor s predpokladmi tvrdenia. □

[2] Každá globálna analytická funkcia je totiž zároveň aj svojou vetvou, a teda každá singularita globálnej analytickej funkcie je naozaj singularitou niektorej jej vetvy. Ak je naopak $b \in \mathbb{C}$ singularitou niektorej vetvy globálnej analytickej funkcie $\mathbf{f}$, musí byť tento bod „prekážkou“ pri analytickom predĺžení nejakého prvku (f, D) z danej vetvy pozdĺž nejakej krivky γ; ten istý prvok (f, D) a tú istú krivku γ ale potom môžeme použiť na dôkaz, že b je singularitou funkcie $\mathbf{f}$.

13.2 Singularity na kružnici konvergencie Taylorovho radu

Zaoberajme sa teraz na chvíľu „maximálnymi“ analytickými prvkami – čiže obormi konvergencie Taylorových radov analytických funkcií. Ukážeme najprv, že na hranici každého takéhoto analytického prvku, ak je ohraničený, musí byť aspoň jedna singularita.

Veta 13.2.1. *Nech f je funkcia holomorfná v bode $a \in \mathbb{C}$, s Taylorovým rozvojom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{13.1}$$

o konečnom polomere konvergencie $\varrho > 0$. Potom na hranici $\kappa(a,\varrho)^*$ analytického prvku $(f, D(a,\varrho))$ existuje aspoň jedna singularita tohto prvku.

Dôkaz. Za účelom sporu predpokladajme, že žiaden bod $z \in \kappa(a,\varrho)^*$ nie je singularitou $(f, D(a,\varrho))$. Pre všetky $w \in \kappa(a,\varrho)^*$ potom existuje priame analytické predĺženie $(g[w], D(w, \varepsilon[w]))$ analytického prvku $(f, D(a,\varrho))$ so stredom v bode w, kde $\varepsilon[w] > 0$. Systém

$$(D(w,\varepsilon[w]) \mid w \in \kappa(a,\varrho)^*)$$

je otvoreným pokrytím kružnice $\kappa(a,\varrho)^*$; z kompaktnosti tejto kružnice teda vyplýva, že existuje konečná množina bodov $J \subseteq \kappa(a,\varrho)^*$ taká, že $(D(w,\varepsilon[w]) \mid w \in J)$ je konečným otvoreným pokrytím $\kappa(a,\varrho)^*$. Nech $\varepsilon > 0$ je také, že pre všetky $z \in \kappa(a,\varrho)^*$ platí $D(z,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{w\in J} D(w,\varepsilon[w])$. Ľahko potom vidieť, že funkcia $F\colon D(a,\varrho+\varepsilon) \to \mathbb{C}$ definovaná pre všetky $z \in D(a,\varrho+\varepsilon)$ predpisom

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{ak } |z-a| < \varrho, \\ g[w](z) & \text{ak } w \in J \text{ je také, že } z \in D(w,\varepsilon[w]) \end{cases}$$

je holomorfná na $D(a,\varrho+\varepsilon)$ a na $D(a,\varrho)$ sa zhoduje s funkciou f. Z vety o Taylorových radoch tak vyplýva, že polomer konvergencie radu (13.1) musí byť aspoň $\varrho+\varepsilon$: spor. □

Príklad 13.2.2. Polomer konvergencie Maclaurinovho radu funkcie

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

je rovný jednej, pričom *jedinou* jej singularitou v $\kappa(0,1)^*$ je bod $a = 1$. Rad pritom nekonverguje v žiadnom bode $\kappa(0,1)^*$. *Divergencia Taylorovho radu v nejakom bode na hranici jeho oboru konvergencie teda ešte nie je zárukou existencie singularity v tomto bode.*

Príklad 13.2.3. Z príkladu 3.2.4 tiež vieme, že mocninový rad s konečným polomerom konvergencie $\varrho > 0$ môže konvergovať na celej kružnici konvergencie; funkcia týmto radom daná pritom podľa vety 13.2.1 musí mať v $\kappa(0,\varrho)^*$ aspoň jednu singularitu. *Konvergencia Taylorovho radu v bode na hranici jeho oboru konvergencie teda nevylučuje existenciu singularity v danom bode.*

Príklad 13.2.4. Ukážeme teraz, že funkcia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

definovaná na $D(0,1)$ – kde polomer konvergencie radu je očividne rovný jednej – má singularitu v každom bode $\kappa(0,1)^*$: hovoríme, že množina $\kappa(0,1)^*$ tvorí *prirodzenú hranicu* funkcie f.

Skutočne – ľahko vidieť, že pre všetky $z \in D(0,1)$ je

$$f(z) = z + f(z^2) = z + z^2 + f(z^4) = \ldots = \sum_{j=0}^{s-1} z^{2^j} + f(z^{2^s}), \tag{13.2}$$

kde $s \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné.

Ak teda špeciálne pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ vezmeme za z ľubovoľnú 2^n-tú odmocninu jednej prenásobenú nejakým $r \in (0,1)$ – t. j. $z = re^{i2k\pi/2^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ a $r \in (0,1)$ – tak z (13.2) pre $s = n$ dostávame

$$f(re^{i2k\pi/2^n}) = \sum_{j=0}^{n-1} r^{2^j} e^{i2k\pi/2^{n-j}} + f(r^{2^n}).$$

Pre fixné n potom

$$\lim_{r\to 1} \left| f(re^{i2k\pi/2^n}) \right| \geq -n + \lim_{r\to 1} \left| f(r^{2^n}) \right| = \infty, \tag{13.3}$$

kde posledná rovnosť vyplýva zo skutočnosti, že vďaka kladnosti čísla r pre všetky $s \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| f(r^{2^n}) \right| = \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} + f(r^{2^s}) \right| \geq \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} \right|,$$

a teda aj

$$\lim_{r\to 1} \left| f(r^{2^n}) \right| \geq \lim_{r\to 1} \left| \sum_{j=0}^{s-1} r^{2^j} \right| = s$$

pre všetky $s \in \mathbb{N}$. Z (13.3) a z Riemannovej vety o odstrániteľných singularitách teda vyplýva, že v žiadnej 2^n-tej odmocnine jednej nemôže existovať priame analytické predĺženie prvku $(f, D(0,1))$ – ide teda o jeho singularitu. Navyše je zrejmé, že množina singularít analytického prvku $(f, D(0,1))$ na $\kappa(0,1)^*$ musí byť uzavretá.[3] Keďže ale

$$\overline{\left\{ e^{i2k\pi/2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N};\ k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \right\}} = \kappa(0,1)^*,$$

musí byť množina týchto singularít rovná celej kružnici $\kappa(0,1)^*$, čo bolo treba dokázať.

13.3 Základná klasifikácia singularít

Singularity globálnych analytických funkcií v danej oblasti S možno v prvom rade rozdeliť na *izolované* a *neizolované* (alebo *podstatné*[4]). Pojem izolovanej singularity pritom bude zahŕňať izolované singularity jednohodnotových funkcií – čiže póly a podstatné izolované singularity[5] – tak, ako sme ich chápali doteraz, ako aj singularity viachodnotového typu, ktorými budú takzvané *body vetvenia*.

Definícia 13.3.1. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ je *izolovaná singularita* funkcie $\mathbf{f}$, ak existuje $r > 0$, analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v bode $a \in S$ a krivka $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ a nasledujúcimi vlastnosťami:

(i) Pre všetky $t \in [\alpha, \beta)$ je $\gamma(t) \in S$ a existuje analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, t]$.

(ii) Neexistuje žiadne analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ.

(iii) Nech $\tau \in [\alpha, \beta)$ je také, že $(\gamma \restriction [\tau, \beta])^* \subseteq D(b, r)$ a (g, E) je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$ také, že $E \subseteq D'(b, r)$. Potom je (g, E) neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b, r)$.

Bod $b \in \mathbb{C}$ je *neizolovaná* alebo *podstatná* singularita funkcie $\mathbf{f}$, ak preň existuje prvok (f, D) a krivka γ s vlastnosťami (i) a (ii) tak, že pre žiadne $r > 0$ nie je splnená vlastnosť (iii).

[3]Ak existuje priame analytické predĺženie (g, E) prvku $(f, D(0,1))$ so stredom v nejakom bode $a \in \kappa(0,1)^*$, existuje toto predĺženie aj vo všetkých bodoch $\kappa(0,1)^* \cap E$; komplement množiny týchto singularít je teda otvorená množina.

[4]„Podstatná singularita“ je teda niečo iné ako „podstatná izolovaná singularita“.

[5]Odstrániteľné singularity už za singularity nepovažujeme.

Izolovaná singularita je teda prekážkou pri analytickom predĺžení pozdĺž krivky γ, ale ide o jedinú takúto prekážku na celom okolí $D(b,r)$.[6] Z uvedenej definície je bezprostredne zrejmé, že každá izolovaná singularita globálnej analytickej funkcie $\mathbf{f}$ v S je skutočne singularitou funkcie $\mathbf{f}$.

Poznámka 13.3.2. V nasledujúcom budeme trochu nepresne hovoriť o analytickom predĺžení pozdĺž kružnice $\kappa(b,s)$ pre *ľubovoľný analytický prvok so stredom v* $\kappa(b,s)^*$. Rozumieme pritom samo sebou, že ide o kružnicu „zrotovanú“ tak, aby jej začiatok a koniec bol zhodný so stredom daného analytického prvku. Rovnakú konvenciu budeme občas používať aj pre ľubovoľnú jednoduchú uzavretú krivku γ prechádzajúcu cez stred daného analytického prvku.

Póly a podstatné izolované singularity jednohodnotových funkcií sú zjavne špeciálnymi prípadmi izolovaných singularít. Mali by sme ešte tieto pojmy definovať aj pre globálne analytické funkcie v nejakej oblasti S, resp. pre ich vetvy.

Pre takúto funkciu $\mathbf{f}$ budeme hovoriť o singularite $b \in \mathbb{C}$ *jednohodnotového typu* práve vtedy, keď je jednohodnotová – pri označení z predchádzajúcej definície – vetva funkcie $\mathbf{f}$ na $D'(b,r)$ obsahujúca analytický prvok (g,E). To znamená, že analytickým predĺžením ľubovoľného analytického prvku tejto vetvy pozdĺž ľubovoľnej krivky v $D'(b,r)$ s pevným koncovým bodom získame vždy (až na $\equiv$) ten istý prvok. Ľahko pritom vidieť, že táto požiadavka je ekvivalentná tomu, aby existoval *nejaký* analytický prvok $(\hat{f},\hat{D})$ tejto vetvy a *nejaká* kružnica $\kappa(b,s)$ s $\kappa(b,s)^* \subseteq D'(b,r)$ taká, že analytickým predĺžením prvku $(\hat{f},\hat{D})$ pozdĺž $\kappa(b,s)$ je (až na $\equiv$) opäť $(\hat{f},\hat{D})$. Takéto predĺženie totiž definuje „bežnú“ jednohodnotovú holomorfnú funkciu na nejakom medzikruží so stredom v bode b, ktoré je celé obsiahnuté v $D'(b,r)$, pričom táto funkcia je daná hodnotami uvažovanej vetvy funkcie $\mathbf{f}$. Ľahko vidieť, že konečným počtom priamych analytických predĺžení prvkov tejto funkcie možno získať jednohodnotovú holomorfnú funkciu F na *ľubovoľnom* medzikruží

$$A(r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-b| < r_2\},$$

kde $0 < r_1 < r_2 < r$. Ak je ale γ_1, γ_2 ľubovoľná dvojica kriviek v $D'(b,r)$ s počiatočným bodom v strede nejakého prvku (F_D, D) – kde F_D je zúženie F na D – a s rovnakým koncovým bodom, musí existovať medzikružie $A(r_1,r_2)$ také, že $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq A(r_1,r_2)$ a predĺžením prvku (F_D, D) pozdĺž obidvoch kriviek získame (až na $\equiv$) ten istý prvok. Jednohodnotová funkcia F je teda globálnou analytickou funkciou v $D'(b,r)$. Keďže ale funkcia F súčasne obsahuje analytický prvok $(\hat{f},\hat{D})$, je rovná F a jednohodnotová aj pôvodne uvažovaná vetva funkcie $\mathbf{f}$.

Okolo izolovaných singularít jednohodnotového typu sa teda vetvy globálnych analytických funkcií správajú rovnako ako „bežné“ holomorfné funkcie v blízkosti svojich izolovaných singularít. Možno ich tam teda lokálne rozvinúť do *Laurentovho radu* a podľa charakteru tohto radu môžeme izolované singularity jednohodnotového typu rozdeliť na *póly* a *podstatné izolované singularity.*

Definícia 13.3.3. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S. Bod $b \in \mathbb{C}$ nazveme *bodom vetvenia*[7] funkcie $\mathbf{f}$, ak je izolovanou singularitou $\mathbf{f}$, ktorá nie je jednohodnotového typu.[8]

Bod b je teda bodom vetvenia, ak je viachodnotová – pri označeniach z definície 13.3.1 – vetva funkcie $\mathbf{f}$ na $D'(b,r)$ obsahujúca analytický prvok (g,E). Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že táto situácia nastane práve vtedy, keď je analytickým predĺžením nejakého analytického prvku $(\hat{f},\hat{D})$ z tejto vetvy pozdĺž nejakej kružnice $\kappa(b,s)$ s $\kappa(b,s)^* \subseteq D'(b,r)$ analytický prvok, ktorý s $(\hat{f},\hat{D})$ nie je v relácii $\equiv$. To je ďalej ekvivalentné existencii takejto kružnice pre *každý* prvok danej vetvy.

[6] Je dôležité uvedomiť si, že toto nie je ekvivalentné neexistencii ďalšej singularity v tomto okolí – takáto singularita sa v $D(b,r)$ nachádzať môže, ale v takom prípade musí ísť o singularitu inej vetvy funkcie $\mathbf{f}$.

[7] Alebo *singularitou viachodnotového typu.*

[8] Opäť treba upozorniť na to, že kvôli možnej „viacvetvovosti“ funkcie táto formulácia *nie je* ekvivalentná formulácii „b je izolovaná singularita a súčasne b nie je singularita jednohodnotového typu“.

13.4 Klasifikácia bodov vetvenia a Puiseuxove rady

Nasledujúca veta prebratá z knihy [7] sumarizuje základné poznatky umožňujúce jemnejšiu klasifikáciu bodov vetvenia.

Veta 13.4.1. *Nech $b \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Nech (f, D) s $D \subseteq D'(b, r)$ je analytický prvok neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b, r)$ a $\mathbf{f}$ je (jediná) globálna analytická funkcia v $D'(b, r)$ obsahujúca prvok (f, D). Označme $H := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w < \ln r\}$. Potom:*

a) *Existuje jednohodnotová analytická funkcia $f^*\colon H \to \mathbb{C}$ taká, že pre všetky $w \in H$ je*

$$f^*(w) \in [\![\mathbf{f}(b + e^w)]\!].$$

b) *Ak navyše existuje $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že pre (niektorú takúto) funkciu f^* a všetky $w \in H$ je*

$$f^*(w) = f^*(w + i2k\pi)$$

a k je najmenšie *s touto vlastnosťou, tak pre každý analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ je k zároveň aj najmenšie kladné prirodzené číslo také, že analytickým predĺžením $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž spojenia k kružníc $\kappa(b, s)$ so stredom v bode b a prechádzajúcich cez stred $\hat{a}$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ je (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$. Všeobecnejšie možno namiesto kružnice $\kappa(b, s)$ uvažovať ľubovoľnú jednoduchú uzavretú krivku γ s $\gamma^* \subseteq D'(b, r)$ takú, že $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$.*[9]

c) *Ak takéto $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neexistuje, je analytickým predĺžením každého analytického prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ pozdĺž spojenia ľubovoľného kladného počtu kružníc so stredom v b a prechádzajúcich cez stred $\hat{a}$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ analytický prvok, ktorý s prvkom $(\hat{f}, \hat{D})$ nie je v relácii $\equiv$ – a podobne pre ľubovoľnú jednoduchú uzavretú krivku γ s $\gamma^* \subseteq D'(b, r)$, $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$.*

d) *Ak existuje k z tvrdenia b), nadobúda $\mathbf{f}$ v každom $z \in D'(b, r)$ najviac k rôznych hodnôt a prvky funkcie $\mathbf{f}$ so stredom z tvoria presne k tried ekvivalencie relácie $\equiv$. Inak existuje nekonečne veľa týchto tried ekvivalencie.*

e) *Ak je k z tvrdenia b) rovné jednej, bod b buď nie je singularitou funkcie $\mathbf{f}$, alebo je jej singularitou jednohodnotového typu. Ak $k \geq 2$ alebo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ z tvrdenia b) vôbec neexistuje, je b bodom vetvenia funkcie $\mathbf{f}$.*

Dôkaz. Označme ako $\ln_D$ ľubovoľnú holomorfnú vetvu prirodzeného logaritmu na $\mathbb{C} \setminus \{se^{i\alpha} \mid s \geq 0\}$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $z \in D$ je $\alpha \notin [\![\arg(z - b)]\!]$; ľahko vidieť, že také α musí určite existovať. Z jednej strany túto funkciu spojite rozšírme aj na $\{se^{i\alpha} \mid s > 0\}$. Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a nejaké $m \in \mathbb{Z}$ teda

$$\ln_D(z) = \ln|z| + i\theta, \qquad \text{kde } \theta \in [\![\arg z]\!] \cap [2m\pi + \alpha, 2(m+1)\pi + \alpha).$$

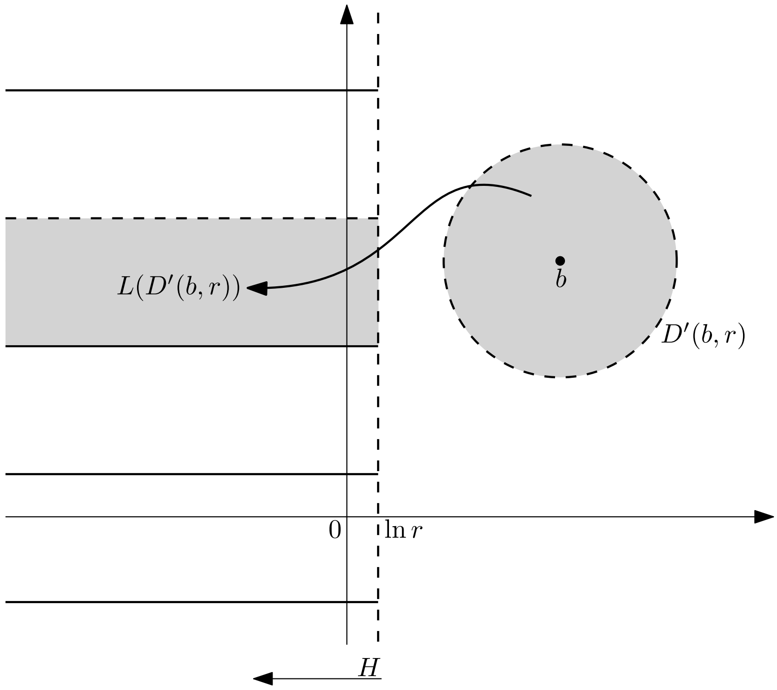
Pre funkciu $L\colon D'(b, r) \to \mathbb{C}$, danú pre všetky $z \in D'(b, r)$ predpisom $L(z) := \ln_D(z - b)$, je potom

$$L(D'(b, r)) = H \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 2m\pi + \alpha \leq \operatorname{Im} z < 2(m+1)\pi + \alpha\}.$$

Táto situácia je znázornená na obrázku 13.1.

Prstencové okolie $D'(b, r)$ sa teda cez L zobrazí na jeden pás v H. Idea dôkazu spočíva v tom, že každú krivku γ v $D'(b, r)$ možno pomocou „vhodne predĺženej“ funkcie L zobraziť na krivku λ v H, ktorá už môže prechádzať aj cez viac takýchto pásov – čo zodpovedá tomu, že vetva L môže spojite prejsť v inú vetvu zodpovedajúcej globálnej analytickej funkcie v $D'(b, r)$. Tým rozlíšime medzi rovnakými bodmi na krivke γ, ktoré však dosiahneme po rôznom počte „obkrúžení“ bodu b.

[9] V duchu poznámky 13.3.2 je potrebné kružnicu $\kappa(b, s)$ resp. krivku γ „zrotovať“ tak, aby jej počiatočným a koncovým bodom bol bod $\hat{a}$.



Obr. 13.1: Definičný obor a možný obraz funkcie $L(z)$.

Analytický prvok (f, D) je neobmedzene predĺžiteľný v $D'(b, r)$ – pre každú krivku $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ spĺňajúcu $\gamma^* \subseteq D'(b, r)$, s počiatočným bodom v strede $a \in D'(b, r)$ prvku (f, D), existuje nejaké analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž γ. Pozdĺž γ tiež možno analyticky predĺžiť funkciu L, čím získame spojitý výber funkcie prirodzeného logaritmu zo $z - b$ pozdĺž tejto krivky – a teda aj (spojitú) krivku $\lambda\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s $\lambda^* \subseteq H$ takú, že $\lambda(\alpha) = L(a)$ a pre všetky $t \in [\alpha, \beta]$ je $\lambda(t) \in [\![\ln(\gamma(t) - b)]\!]$.

Uvažujme teraz analytický prvok (φ, Δ) pre nejaké kruhové okolie $\Delta \subseteq L(D)$ so stredom v $L(a)$ a funkciu $\varphi\colon \Delta \to \mathbb{C}$ danú pre všetky $w \in \Delta$ ako $\varphi(w) = f(b + e^w)$ – dokážeme, že existuje jeho analytické predĺženie pozdĺž krivky λ v H. Nech L_D je zúženie funkcie L na D. K pokrytiu krivky λ „dostatočne malými“ kruhovými okoliami $\Delta = \Delta_1, \ldots, \Delta_n \subseteq H$ potom možno nájsť kruhové okolia $D_1, \ldots, D_n \subseteq D'(b, r)$ také, že analytické predĺženie prvku (L_D, D) pozdĺž γ je dané postupnosťou analytických prvkov $(L_D, D) = (L_1, D_1), \ldots, (L_n, D_n)$, analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž krivky γ je dané postupnosťou analytických prvkov $(f, D) = (f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n)$ a pre $j = 1, \ldots, n$ je $\Delta_j \subseteq L_j(D_j)$. Na Δ_j tak pre $j = 1, \ldots, n$ môžeme definovať funkciu $\varphi_j\colon \Delta_j \to \mathbb{C}$ pre všetky $w \in \Delta_j$ ako

$$\varphi_j(w) = f_j(b + e^w)$$

a ľahko vidieť, že postupnosť prvkov $(\varphi_1, \Delta_1), \ldots, (\varphi_n, \Delta_n)$ určuje analytické predĺženie prvku (φ, Δ) pozdĺž krivky λ v oblasti H.

Keďže môže byť krivka γ v $D'(b, r)$ ľubovoľná, môže byť ľubovoľná aj krivka λ v H; analytickými predĺženiami prvku (φ, Δ) v H je teda definovaná globálna analytická funkcia f^* v H, ktorá je neobmedzene predĺžiteľná v jednoducho súvislej oblasti H. Podľa vety o monodrómii potom musí byť funkcia f^* jednohodnotová. Navyše je zrejmé, že pre takto definovanú funkciu f^* musí pre každé $w \in H$ existovať analytický prvok $(f[w], D[w])$ v $\mathbf{f}$ taký, že na nejakom okolí bodu w je $f^*(w) = f[w](b + e^w)$. Pre všetky $w \in H$ preto

$$f^*(w) \in [\![\mathbf{f}(b + e^w)]\!],$$

čím je dokázané tvrdenie a).

Takáto funkcia f^* samozrejme nie je daná jednoznačne, ale je determinovaná počiatočnou voľbou funkcie L, resp. zodpovedajúcej vetvy prirodzeného logaritmu.

Dokážeme tvrdenie b). Nech je prirodzené $k \geq 1$ z jeho znenia dané. Analytický prvok $(\hat{f}, \hat{D})$ so stredom $\hat{a} \in D'(b, r)$ musí byť analytickým predĺžením prvku (f, D) pozdĺž nejakej krivky (alebo dokonca lomenej čiary) γ s $\gamma^* \subseteq D'(b, r)$. Rovnako ako vyššie teda môžeme nájsť krivku λ končiacu v nejakom bode $w_0 \in H$ takom, že $b + e^{w_0} = \hat{a}$ a na nejakom okolí bodu w_0 je $f^*(w) = \hat{f}(b + e^w)$. Nech je funkcia $\hat{L}$ daná pre $(\hat{f}, \hat{D})$ rovnako ako L pre (f, D); nech $\hat{L}_{\hat{D}}$ je zúženie $\hat{L}$ na $\hat{D}$.

Analytickému predĺženiu $(\hat{g}, \hat{E})$ prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž k kladne orientovaných kružníc so stredom v b prechádzajúcich cez $\hat{a}$ zodpovedá, rovnako ako vyššie, analytické predĺženie $(\hat{L}_{\hat{E}}, \hat{E})$ prvku $(\hat{L}_{\hat{D}}, \hat{D})$ pozdĺž týchto k kružníc, ako aj analytické predĺženie funkcie f^* pozdĺž úsečky $[w_0, w_0 + i2k\pi]$. Ak je teda $(f^*_{\Delta_1}, \Delta_1)$ analytický prvok f^* so stredom w_0 taký, že $\Delta_1 \subseteq \hat{L}_{\hat{D}}(\hat{D})$ a $(f^*_{\Delta_2}, \Delta_2)$ je analytický prvok f^* so stredom $w_0 + i2k\pi$ taký, že $\Delta_2 \subseteq \hat{L}_{\hat{E}}(\hat{E})$ a Δ_2 má rovnaký polomer ako Δ_1 (čo môžeme predpokladať bez ujmy na všeobecnosti), vďaka periodicite funkcie f^* musí pre všetky $w \in \Delta_2$ byť

$$\hat{g}(b + e^w) = f^*_{\Delta_2}(w) = f^*(w) = f^*(w - i2k\pi) = f^*_{\Delta_1}(w - i2k\pi) = \hat{f}(b + e^{w - i2k\pi}) = \hat{f}(b + e^w),$$

a teda aj $(\hat{g}, \hat{E}) \equiv (\hat{f}, \hat{D})$.

Treba ešte dokázať, že číslo k je najmenšie s touto vlastnosťou. Keby pre nejaké $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ bol analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž j uvažovaných kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$, musel by z rovnakých dôvodov ako vyššie byť analytickým predĺžením prvku $(f^*_{\Delta_1}, \Delta_1)$ funkcie f^* pozdĺž $[w_0, w_0 + i2j\pi]$ prvok $(f^*_{\Delta_3}, \Delta_3)$ funkcie f^* taký, že pre všetky $w \in \Delta_3$ je[10]

$$f^*(w) = f^*_{\Delta_3}(w) = f^*_{\Delta_1}(w - i2j\pi) = f^*(w - i2j\pi).$$

Množina Δ_3 má však v H hromadný bod a z vety o jednoznačnosti tak vyplýva platnosť vzťahu

$$f^*(w) = f^*(w + i2j\pi)$$

pre všetky $w \in H$ – čo je zrejmý spor s voľbou čísla k.

Toto tvrdenie možno zovšeobecniť aj na prípad jednoduchej uzavretej krivky γ v $D'(b, r)$ s $\hat{a} \in \gamma^*$ a $b \in \mathbf{I}(\gamma)$. Keďže je každá takáto krivka homotopická s jednoduchou uzavretou *po častiach hladkou* krivkou (alebo dokonca s lomenou čiarou), môžeme predpokladať, že je krivka γ po častiach hladká. Vďaka súvisu indexu so spojitým výberom argumentu potom zisťujeme, že analytické predĺženie prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž k takýchto kriviek zodpovedá predĺženiu f^* pozdĺž krivky λ s počiatočným bodom w_0 a koncovým bodom $w_0 + i \operatorname{Ind}_\gamma(b) 2k\pi$. Zvyšok argumentácie je rovnaký ako vyššie.

Na dôkaz tvrdenia c) si (pre kružnicu) stačí rovnako ako vyššie uvedomiť, že keby bol analytickým predĺžením prvku $(\hat{f}, \hat{D})$ pozdĺž j uvažovaných kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok $(\hat{f}, \hat{D})$, muselo by pre všetky w z nejakého okolia bodu $w_0 + i2j\pi$ byť

$$f^*(w) = f^*(w - i2j\pi)$$

a z vety o jednoznačnosti tak aj

$$f^*(w) = f^*(w + i2j\pi)$$

pre všetky $w \in H$; to by bol spor s neexistenciou takéhoto j. Rovnako ako vyššie možno tvrdenie zovšeobecniť aj na iné jednoduché uzavreté krivky.

Tvrdenie d) je bezprostredným dôsledkom tvrdení b) a c), rovnako ako tvrdenie e). □

Prirodzene sa ponúka myšlienka klasifikácie bodov vetvenia na základe čísla k z predchádzajúcej vety. Ak takéto k pre bod vetvenia b existuje, budeme hovoriť, že b je vetviacim bodom *rádu* $k - 1$.[11]

---

[10] Opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme rovnosť polomerov okolí Δ_1 a Δ_3.

[11] Pričom singularity jednohodnotového typu a body, ktoré nie sú singularitami, by sme mohli nazvať vetviacimi bodmi rádu 0.

Definícia 13.4.2. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a $b \in \mathbb{C}$ je bod vetvenia funkcie $\mathbf{f}$, uvažovaný v súvislosti s neexistenciou analytického predĺženia nejakého prvku (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ s počiatočným bodom v strede prvku (f, D) a koncovým bodom b. Nech $r > 0$ a $\tau \in [\alpha, \beta)$ sú také, že $(\gamma \restriction [\tau, \beta])^* \subseteq D(b, r)$ a (g, E) s $E \subseteq D'(b, r)$ je analytické predĺženie prvku (f, D) pozdĺž $\gamma \restriction [\alpha, \tau]$, ktoré je neobmedzene predĺžiteľné v $D'(b, r)$. Pre prirodzené $k \geq 2$ potom hovoríme, že b je *bodom vetvenia rádu* $k-1$, ak je k najmenšie kladné prirodzené číslo také, že analytickým predĺžením prvku (g, E) pozdĺž k kladne orientovaných kružníc so stredom b, prechádzajúcich cez stred prvku (g, E), je (až na $\equiv$) opäť prvok (g, E). Ak žiadne takéto k neexistuje,[12] nazývame b *bodom vetvenia rádu* ∞.

Poznámka 13.4.3. Podobne ako niekoľkokrát vyššie je v uvedenej definícii zamlčaný jeden podstatný aspekt: rád bodu vetvenia $b \in \mathbb{C}$ nezávisí len na tomto bode, ale aj na vetve, v ktorej ho uvažujeme – čiže presnejšie na analytickom prvku (f, D) a krivke γ z predchádzajúcej definície. Nie je teda vylúčená ani situácia, kde b je v niektorých vetvách bodom vetvenia rádu r_1, v iných vetvách bodom vetvenia rádu $r_2 \neq r_1$ a v ešte ďalších vetvách vôbec nie je bodom vetvenia.

Príklad 13.4.4. Pre každú vetvu funkcie $z^{1/n}$ s $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, definovanú na oblasti S obsahujúcej body ľubovoľne blízko nuly, je $b = 0$ bodom vetvenia rádu $n - 1$.

Príklad 13.4.5. Pre každú vetvu funkcie $\ln z$, definovanú na oblasti S obsahujúcej body ľubovoľne blízko nuly, je $b = 0$ bodom vetvenia rádu ∞.

Dokážeme teraz veľmi dôležitú vetu o singulárnych rozvojoch funkcií v bodoch vetvenia konečného rádu – takéto rozvoje budeme nazývať *Puiseuxovými radmi*[13] a pôjde o zovšeobecnenie Laurentových radov, pri ktorom sa v rade vyskytujú aj racionálne mocniny $(z-a)$; tie sú už samotné multifunkciami, čo je v súlade so skutočnosťou, že má daný rad vyjadrovať viachodnotovú funkciu. Prípadné rozšírenie nasledujúcej vety na prípad $k = 1$ by zahŕňalo aj vetu o Laurentových radoch.

Veta 13.4.6. *Nech $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v $D'(a, r)$ taká, že ľubovoľný analytický prvok (f, D) funkcie $\mathbf{f}$ je neobmedzene predĺžiteľný v $D'(a, r)$, pričom a je bodom vetvenia funkcie $\mathbf{f}$ rádu $k - 1$, kde $k \geq 2$ je prirodzené číslo. Potom existuje jednoznačne daná postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ taká, že pre všetky $z \in D'(a, r)$ je*

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}$$

(kde rad konverguje).[14] *Uvedený rad nazývame* Puiseuxovým radom *funkcie* $\mathbf{f}$ *v bode* a.

Dôkaz. Uvažujme zobrazenie $M\colon D'(a, r) \to \mathbb{C}$ dané pre všetky $z \in D'(a, r)$ predpisom

$$M(z) = (z-a)^{1/k}$$

pre nejakú vetvu funkcie $z^{1/k}$ holomorfnú na $\mathbb{C} \setminus \{se^{i\alpha} \mid s \geq 0\}$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}$, z jednej strany spojite rozšírenú aj na $\{se^{i\alpha} \mid s > 0\}$; pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ je teda $M(z) = e^{\ln|z-a|/k + i\theta/k}$, kde $\theta \in [\![\arg(z-a)]\!] \cap [2m\pi + \alpha, 2(m+1)\pi + \alpha)$ pre nejaké $m \in \mathbb{Z}$. Pre nejaké $\beta \in \mathbb{R}$ potom

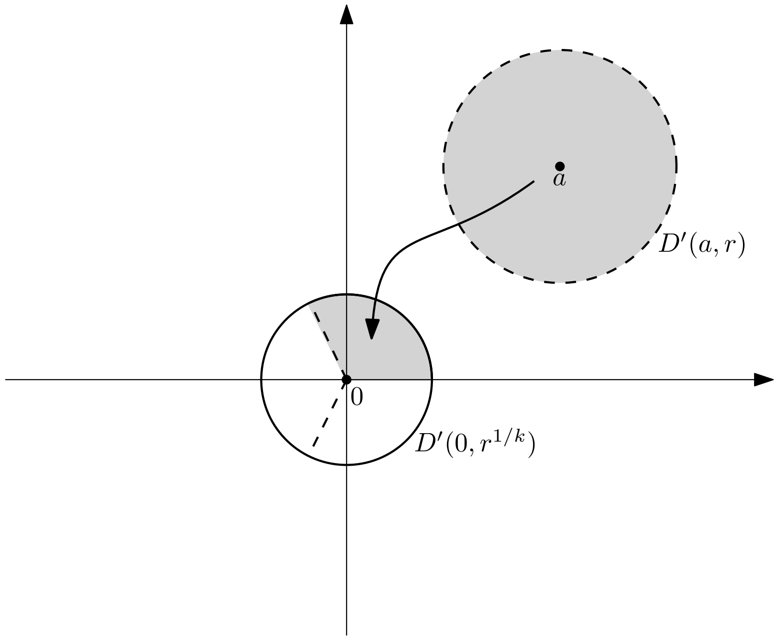
$$M(D'(a, r)) = D'(0, r^{1/k}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \arg z < \beta + 2\pi/k\}.$$

Táto situácia je (pre $k = 3$ a $\beta = 0$) znázornená na obrázku 13.2.

[12] V takom prípade nemôže uvedená vlastnosť platiť ani pre $k = 1$, pretože vtedy by podľa predchádzajúcej vety bod b nebol bodom vetvenia, ale nanajvýš singularitou jednohodnotového typu.

[13] Niekde sa tiež možno stretnúť s pomenovaniami ako *Newtonov-Puiseuxov rad* alebo *zovšeobecnený Laurentov rad.*

[14] Je dôležité uvedomiť si, že ide o rad multifunkcií. Uvedený zápis pritom chápeme tak, že zakaždým vyberieme jednu konkrétnu vetvu funkcie $(z-a)^{1/k}$, ktorú použijeme na výpočet $(z-a)^{n/k}$ pre *všetky* $n \in \mathbb{Z}$. Takto dostávame presne k jednohodnotových vetiev funkcie $\mathbf{f}(z)$ na každom kruhovom okolí $D \subseteq D'(a, r)$.



Obr. 13.2: Definičný obor a možný obraz funkcie $M(z)$.

Vezmime ľubovoľné $D \subseteq D'(a,r)$ také, že uvažovaná vetva funkcie $(z-a)^{1/k}$ je na D holomorfná a ľubovoľný analytický prvok (f,D) funkcie $\mathbf{f}$. Na kruhovom okolí $\Delta \subseteq M(D)$ potom môžeme definovať funkciu $f^\circ\colon \Delta \to \mathbb{C}$ pre všetky $u \in \Delta$ predpisom

$$f^\circ(u) = f(a+u^k).$$

Podobne ako v dôkaze vety 13.4.1 zodpovedá každému analytickému predĺženiu prvku (f,D) pozdĺž krivky $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ s $\gamma^* \subseteq D'(a,r)$ predĺženie prvku (f°,Δ) pozdĺž krivky $\mu\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ takej, že $\mu^* \subseteq D'(0,r^{1/k})$, $\mu(\alpha)$ je stred prvku (f°,Δ) a pre všetky $t \in [\alpha,\beta]$ je $\mu(t) \in [\![(\gamma(t)-a)^{1/k}]\!]$. Ak je navyše predĺžením (f,D) pozdĺž γ prvok (f_γ,D_γ), musí byť predĺžením (f°,Δ) pozdĺž μ prvok (f°_μ,Δ_μ) taký, že (ak je D_μ dostatočne malé) pre všetky $u \in \Delta_\mu$ je $f^\circ_\mu(u) = f_\gamma(a+u^k)$. Tieto predĺženia môžu byť ľubovoľné – prvok (f°,Δ) je teda neobmedzene predĺžiteľný v $D'(0,r^{1/k})$, čím je daná aj globálna analytická funkcia $\mathbf{f}^\circ$ v tomto prstencovom okolí.

Ak je špeciálne krivka γ daná ako spojenie k kladne orientovaných kružníc cez stred prvku (f,D), je krivka μ zjavne uzavretá. Keďže je a bodom vetvenia rádu $k-1$, je predĺžením (f,D) pozdĺž takýchto k kružníc (až na $\equiv$) opäť prvok (f,D). Predĺženie prvku (f°,Δ) pozdĺž krivky μ teda tiež musí byť (až na $\equiv$) opäť (f°,Δ). Z vety 13.4.1 preto vyplýva, že $\mathbf{f}^\circ$ je na $D'(0,r^{1/k})$ jednohodnotová; v bode 0 má teda táto funkcia jednoznačne daný Laurentov rozvoj

$$\mathbf{f}^\circ(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u^n.$$

Pre všetky $u \in D'(0,r^{1/k})$ tak existuje analytický prvok $(\hat{f},\hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ taký, že

$$\hat{f}(a+u^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u^n$$

a aj opačne pre každý prvok $(\hat{f},\hat{D})$ funkcie $\mathbf{f}$ existuje vetva funkcie $(z-a)^{1/k}$ taká, že

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}.$$

Keďže pre každé $z \in D'(a,r)$ existuje presne k neekvivalentných analytických prvkov funkcie $\mathbf{f}$ so stredom v z, musia sa tieto líšiť iba vo voľbe vetvy funkcie $(z-a)^{1/k}$ a nutne

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k},$$

kde koeficienty $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ sú dané jednoznačne. Tým je dôkaz vety dokončený. □

Práve dokázanú vetu o Puiseuxových radoch ešte využijeme na ďalšiu klasifikáciu bodov vetvenia. Terminológia z nasledujúcej definície je inšpirovaná charakterom bodov vetvenia algebraických funkcií (ako napríklad $z^{1/n}$ pre prirodzené $n \geq 2$) a prirodzených logaritmov.

Definícia 13.4.7. Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť, $\mathbf{f}$ je globálna analytická funkcia v S a $b \in \mathbb{C}$ je bod vetvenia funkcie $\mathbf{f}$. Potom hovoríme, že b je:

a) *Algebraický bod vetvenia*, ak je b konečného rádu $k \geq 2$ a existuje $m \in \mathbb{Z}$ také, že funkcia $\mathbf{f}$ má v bode b Puiseuxov rozvoj

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-b)^{n/k}$$

Ak navyše $m \geq 0$, hovoríme o *obyčajnom bode vetvenia.*

b) *Logaritmický bod vetvenia*, ak je b nekonečného rádu.

c) *Transcendentný bod vetvenia*, ak b nie je algebraický bod vetvenia – čiže ak ide o logaritmický bod vetvenia, alebo o bod vetvenia konečného rádu $k \geq 2$ taký, že v Puiseuxovom rozvoji

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}$$

existuje nekonečne veľa rôznych $n < 0$ takých, že $c_n \neq 0$.

Poznámka 13.4.8. Algebraické body vetvenia sa často namiesto prostredníctvom Puiseuxových radov definujú prostredníctvom existencie vlastnej alebo nevlastnej limity funkcie v danom bode – pre nás to bude ekvivalentná charakterizácia algebraických bodov vetvenia, dôkaz ktorej je náplňou jedného z nasledujúcich cvičení.

Cvičenia

1. Zistite, či je bod $a = 0$ singularitou niektorej vetvy nasledujúcich funkcií:

   a) $f_1(z) = \sqrt{z}$;
   b) $f_2(z) = \sqrt{1-z}$;
   c) $f_3(z) = e^{\sqrt{z}}$;
   d) $f_4(z) = \sqrt{1/z}$;
   e) $f_5(z) = \sqrt{1+1/z}$;
   f) $f_6(z) = \sqrt{z(z-1)}$;
   g) $f_7(z) = \sqrt[3]{z}\sqrt{z-1}$;
   h) $f_8(z) = \frac{1}{z}\sqrt{1-z}$;
   i) $f_9(z) = \frac{1}{z}\sqrt{2z(z-1)}$.

   V prípade, že je bod a singularitou, zistite typ tejto singularity. Ak existuje, nájdite Puiseuxov (alebo Laurentov, či Taylorov) rozvoj tej-ktorej vetvy v bode a.

2. Zistite, či existuje funkcia f, holomorfná a reálna na $\mathbb{R}$, taká, že nejaké jej analytické predĺženie má aspoň jeden bod vetvenia. Ak áno, nájdite takú funkciu. Ak nie, dokážte.

3. Dokážte, že bod vetvenia b funkcie $\mathbf{f}$ konečného rádu je algebraický práve vtedy, keď existuje vlastná alebo nevlastná limita príslušnej vetvy funkcie $\mathbf{f}$ v bode b.

Kapitola 14

Funkcia gama

V rámci tejto kapitoly sa zameriame na dôležitú špeciálnu funkciu, známu pod označením Γ. Pôjde o funkciu holomorfnú na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, ktorú – ako ukážeme – bude možné chápať aj ako spojité rozšírenie faktoriálu prirodzených čísel. Odporúčaným doplňujúcim čítaním k tejto kapitole je Artinov klasický text o *reálnej* funkcii gama [2].

14.1 Definícia funkcie gama

Začnime s definíciou funkcie Γ pre $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $\operatorname{Re} z > 0$ – jej korektnosť ale vôbec nebude zrejmá a vyplynie až z diskusie, ktorá za ňou nasleduje. Neskôr funkciu Γ analyticky predĺžime na definičný obor $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Pre všetky reálne $t > 0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ chápeme t^α ako $e^{\alpha \ln t}$, kde ln je *reálna* funkcia prirodzeného logaritmu.

Definícia 14.1.1. Nech $z \in \mathbb{C}$ je také, že $\operatorname{Re} z > 0$. Potom kladieme

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t. \tag{14.1}$$

Všimnime si najprv, že integrál (14.1), ktorý je očividne nevlastný sprava, môže byť nevlastný aj zľava – napr. pre $x \in (0,1)$ je totiž $\lim_{t \to 0^+} e^{-t} t^{x-1} = \infty$. To znamená, že definíciu funkcie Γ treba v skutočnosti chápať (napríklad) ako

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t + \lim_{h \to \infty} \int_1^h e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t. \tag{14.2}$$

Dokážeme najprv, že nevlastný integrál z definície funkcie Γ konverguje v prípade, že za z vezmeme kladné reálne číslo x – obidve limity zo vzťahu (14.2) teda v takom prípade existujú a sú vlastné.

Tvrdenie 14.1.2. *Nevlastný integrál*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

konverguje pre všetky reálne čísla $x > 0$.

Dôkaz. Pre všetky $\varepsilon > 0$ a $t \in [\varepsilon, 1]$ je $0 < e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$, z čoho

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \leq \int_\varepsilon^1 t^{x-1} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^1 = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}.$$

Uvedený integrál je teda pre všetky $\varepsilon > 0$ zhora ohraničený konštantou $1/x$ a pre $\varepsilon \to 0$ jeho hodnota rastie – musí teda existovať aj limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

Podobne pre všetky $h \geq 1$ a $t \in [1, h]$ z Maclaurinovho rozvoja funkcie e^w zrejme pre všetky $m \in \mathbb{N}$ vyplýva

$$e^t > \frac{t^m}{m!},$$

z čoho

$$e^{-t} < \frac{m!}{t^m}$$

a

$$0 < e^{-t} t^{x-1} < \frac{m!}{t^{m+1-x}}.$$

Ak teda vezmeme $m \geq x + 1$, je $m + 1 - x > 1$ a

$$\int_1^h e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \leq \int_1^h \frac{m!}{t^{m+1-x}} \, \mathrm{d}t = m! \left[-\frac{1}{(m-x)t^{m-x}} \right]_{t=1}^h = m! \left(\frac{1}{m-x} - \frac{1}{(m-x)h^{m-x}} \right) \leq \frac{m!}{m-x}.$$

Integrál je teda opäť pre všetky $h \geq 1$ zhora ohraničený konštantou $m!/(m-x)$ a pre $h \to \infty$ jeho hodnota rastie – existuje teda aj limita

$$\lim_{h \to \infty} \int_1^h e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

Podľa (14.2) tak musí konvergovať aj nevlastný integrál zo znenia tvrdenia. □

V nasledujúcich tvrdeniach postupne dokážeme, že integrál (14.1) z definície funkcie Γ konverguje nielen pre reálne $x > 0$, ale skutočne aj pre všetky komplexné čísla z také, že $\operatorname{Re} z > 0$.

Tvrdenie 14.1.3. *Nech $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Ak konverguje nevlastný integrál*

$$\int_1^\infty |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

konverguje aj nevlastný integrál

$$\int_1^\infty f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Konvergencia nevlastného integrálu

$$\int_1^\infty |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

znamená existenciu vlastnej limity

$$\lim_{h \to \infty} \int_1^h |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Špeciálne teda aj pre všetky rastúce postupnosti $(h_n)_{n=0}^\infty$ čísel z $[1, \infty)$ také, že $\lim_{n \to \infty} h_n = \infty$, musí existovať vlastná limita

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{h_n} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Postupnosť týchto integrálov tak musí byť cauchyovská – pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené n, m spĺňajúce $n_0 \leq n < m$ je

$$\left| \int_1^{h_m} |f(t)| \, \mathrm{d}t - \int_1^{h_n} |f(t)| \, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon,$$

čiže

$$\left| \int_{h_n}^{h_m} |f(t)| \, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

V dôsledku toho ale aj
$$\left|\int_{h_n}^{h_m} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon,$$
t. j.
$$\left|\int_1^{h_m} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{h_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$
a postupnosť integrálov
$$\left(\int_1^{h_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n=0}^{\infty}$$
je tiež cauchyovská pre všetky rastúce postupnosti $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ čísel z $[1,\infty)$ také, že $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$. Preto existuje vlastná limita
$$\lim_{h\to\infty}\int_1^h f(t)\,\mathrm{d}t,$$
a teda aj nevlastný integrál
$$\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$$
musí konvergovať. □

Tvrdenie 14.1.4. *Nech $f\colon (0,1]\to\mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Ak konverguje nevlastný integrál*
$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$
konverguje aj nevlastný integrál
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Stačí po substitúcii $u = 1/t$ aplikovať predchádzajúce tvrdenie. □

Tvrdenie 14.1.5. *Nevlastný integrál*
$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$
konverguje pre všetky $z\in\mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z > 0$. Definícia 14.1.1 je teda korektná.

Dôkaz. Z tvrdení 14.1.3 a 14.1.4 vyplýva, že stačí pre všetky $z\in\mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ dokázať konvergenciu nevlastného integrálu
$$\int_0^\infty \left|e^{-t}t^{z-1}\right|\,\mathrm{d}t.$$
Pre všetky $t\in(0,\infty)$ ale
$$\begin{aligned}\left|e^{-t}t^{z-1}\right| &= e^{-t}\left|e^{(z-1)\ln t}\right| = e^{-t}\left|e^{\operatorname{Re}(z-1)\ln t}e^{i\operatorname{Im}(z-1)\ln t}\right| = e^{-t}\left|e^{\operatorname{Re}(z-1)\ln t}\right| = \\ &= e^{-t}\left|t^{\operatorname{Re}(z)-1}\right| = e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1}.\end{aligned}$$

Integrál
$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1}\,\mathrm{d}t$$
však existuje vďaka tvrdeniu 14.1.2. □

14.2 Rekurentný vzťah a súvis s faktoriálom

Funkciu Γ sme definovali pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ pomocou nevlastného integrálu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \lim_{h \to \infty} \int_1^h e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t,$$

z čoho

$$\Gamma(z+1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{z}\,\mathrm{d}t + \lim_{h \to \infty} \int_1^h e^{-t} t^{z}\,\mathrm{d}t. \tag{14.3}$$

Toto pozorovanie teraz využijeme na odvodenie rekurentného vzťahu pre hodnoty funkcie Γ a následne aj na vyjadrenie faktoriálu prirodzených čísel pomocou tejto funkcie.

Tvrdenie 14.2.1. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ je $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Dôkaz. Nech a, b sú reálne čísla také, že $0 < a \le b$. Integrál

$$\int_a^b e^{-t} t^{z}\,\mathrm{d}t$$

môžeme pomocou metódy *per partes* upraviť nasledovne:

$$\int_a^b e^{-t} t^{z}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_{t=a}^{b} + z \int_a^b e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t = -e^{-b} b^z + e^{-a} a^z + z \int_a^b e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

Z rovnosti (14.3) potom

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-e^{-1} + e^{-\varepsilon} \varepsilon^z + z \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t\right) + \lim_{h \to \infty} \left(-e^{-h} h^z + e^{-1} + z \int_1^h e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= -e^{-1} + e^{-1} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t = z\Gamma(z),\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

Ľahko teraz nájdeme hodnotu funkcie $\Gamma(z)$ v bode $z = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to \infty} \int_0^h e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to \infty} \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{h} = \lim_{h \to \infty} \left(-e^{-h} + 1\right) = 1.$$

Prichádzame teda k dôležitému pozorovaniu, vďaka ktorému možno funkciu gama chápať ako spojité rozšírenie faktoriálu prirodzených čísel.

Veta 14.2.2. *Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Dôkaz. Pre $n = 1$ je $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Ak teraz $\Gamma(n) = (n-1)!$ pre nejaké $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, z tvrdenia 14.2.1 dostávame $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. $\square$

14.3 Rozšírenie definičného oboru

Funkciu Γ sme definovali na polrovine $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ a hodnoty $\Gamma(z)$ pre $z \in S$ sme v tvrdení 14.2.1 vyjadrili rekurentným vzťahom

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Indukciou vzhľadom na n by sme ľahko dokázali, že pre všetky $z \in S$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}. \tag{14.4}$$

Tento vzťah teraz využijeme na dodefinovanie funkcie Γ na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Definícia 14.3.1. Nech $z \in \mathbb{C}\setminus\{0, -1, -2, \dots\}$ je také, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ je $-n < \operatorname{Re} z \leq -n+1$ (pričom $z \neq -n+1$). Potom kladieme

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

Definíciami 14.1.1 a 14.3.1 je teda daná funkcia $\Gamma\colon \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \to \mathbb{C}$. Neskôr dokážeme, že táto funkcia je na svojom definičnom obore analytická – definícia 14.3.1 teda hovorí o *analytickom predĺžení* funkcie Γ z definície 14.1.1. Zanedlho tiež uvidíme, že body $0, -1, -2, \dots$ sú pólmi funkcie Γ.

Všimnime si ešte, že rekurentný vzťah pre hodnoty funkcie Γ z tvrdenia 14.2.1 v skutočnosti platí pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Veta 14.3.2. *Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ je $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Dôkaz. Ak $\operatorname{Re} z > 0$, vyplýva platnosť rekurentného vzťahu z tvrdenia 14.2.1. Ak naopak existuje prirodzené číslo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ také, že $-n < \operatorname{Re} z \leq -n+1$, z definície 14.3.1 je

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

Pre $n = 1$ tak priamo dostávame

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

t. j.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Pre $n \geq 2$ rovnako z definície 14.3.1 dostávame

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}$$

a

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-2}(z+1+k)}.$$

To ale znamená, že

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-2}(z+1+k)} = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(z+k)} = z\frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)} = z\Gamma(z).$$

Rekurentný vzťah zo znenia vety tak naozaj platí pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. $\square$

14.4 Analytickosť, singularity a niektoré funkčné hodnoty

Analytickosť funkcie Γ dokážeme tak, že na polrovine $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ – čiže na jej pôvodnom definičnom obore v zmysle definície 14.1.1 – ju vyjadríme ako lokálne rovnomernú limitu postupnosti analytických – čiže holomorfných – funkcií. Vďaka vete 7.1.9 tak na S bude musieť byť holomorfná – čiže analytická – aj samotná funkcia Γ. Analytickosť funkcie Γ na rozšírenom definičnom obore $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ následne ľahko vyplynie z definície 14.3.1.

V rámci tohto oddielu budeme pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ uvažovať funkciu $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, danú pre všetky $z \in S$ ako

$$f_n(z) = \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

Lema 14.4.1. *Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je funkcia $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ analytická na $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.*

Dôkaz. Dokážeme najprv, že funkcia f_n je spojitá. K danému $z \in S$ a $\varepsilon > 0$ zvoľme $\delta > 0$ tak, aby bolo $D(z, \delta) \subseteq S$ a aby pre všetky $h \in D(0, \delta)$ a všetky $t \in [1/n, n]$ bolo

$$\left| t^h - 1 \right| < \varepsilon;$$

keďže z definície $t^h = e^{h \ln t}$, takéto $\delta > 0$ určite existuje. Pre všetky $h \in D(0, \delta)$ potom aj

$$\begin{aligned} |f_n(z+h) - f_n(z)| &= \left| \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z+h-1} \, \mathrm{d}t - \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z-1} (t^h - 1) \right| < \\ &< \varepsilon \int_{1/n}^{n} \left| e^{-t} t^{z-1} \right| = \varepsilon f_n(\operatorname{Re} z). \end{aligned}$$

Týmto je dokázaná spojitosť funkcie f_n v bode z – keďže navyše $z \in S$ môže byť ľubovoľné, je funkcia f_n spojitá na S.

Nech teraz $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je trojuholník taký, že $\gamma^* \subseteq S$. Trojuholník γ je spojením troch úsečiek a pre každú úsečku $\sigma \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ je $e^{-t} t^{\sigma(u)-1} \sigma'(u)$ evidentne spojitou funkciou dvoch premenných $t \in [1/n, n]$ a $u \in [0, 1]$. Vďaka tvrdeniu 10.4.2, holomorfnosti funkcie $e^{-t} t^{z-1} = e^{-t + (z-1) \ln t}$ jednej premennej z na S pre všetky $t \in [1/n, n]$ a Cauchyho integrálnej vete pre trojuholník teda

$$\int_{\gamma} f_n(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma} \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = \int_{1/n}^{n} \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t = \int_{1/n}^{n} 0 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Podľa Morerovej vety tak dostávame holomorfnosť funkcie f_n na S. □

Lema 14.4.2. *Na $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ je $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \Gamma$ pre $n \to \infty$.*

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $z \in S$ je

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) - f_n(z)| &= \left| \int_0^{1/n} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t + \int_n^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_0^{1/n} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| + \left| \int_n^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| \leq \\ &\leq \int_0^{1/n} \left| e^{-t} t^{z-1} \right| \, \mathrm{d}t + \int_n^{\infty} \left| e^{-t} t^{z-1} \right| \, \mathrm{d}t = \int_0^{1/n} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \, \mathrm{d}t + \int_n^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ spĺňajúce $m \geq \operatorname{Re} z + 1$ potom môžeme využiť odhad $e^{-t} < m!/t^m$ vyplývajúci z Maclaurinovho rozvoja funkcie e^w a dostaneme

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z) - f_n(z)| &\leq \int_0^{1/n} t^{\operatorname{Re} z - 1}\,\mathrm{d}t + \int_n^{\infty} \frac{m!}{t^{m+1-\operatorname{Re} z}}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1/n} t^{\operatorname{Re} z - 1}\,\mathrm{d}t + \lim_{h\to\infty}\int_n^h \frac{m!}{t^{m+1-\operatorname{Re} z}}\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{t^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right]_{t=\varepsilon}^{1/n} + \lim_{h\to\infty}\left(m!\left[-\frac{1}{(m-\operatorname{Re} z)t^{m-\operatorname{Re} z}}\right]_{t=n}^{h}\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(1/n)^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} - \frac{\varepsilon^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right) + m!\lim_{h\to\infty}\left(\frac{1}{(m-\operatorname{Re} z)n^{m-\operatorname{Re} z}} - \frac{1}{(m-\operatorname{Re} z)h^{m-\operatorname{Re} z}}\right) = \\
&= \frac{(1/n)^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} + \frac{m!}{(m-\operatorname{Re} z)n^{m-\operatorname{Re} z}}.
\end{aligned}$$

Pre dané $a \in S$ teraz zvoľme $r > 0$ tak, aby bolo $r < \operatorname{Re} a$. Potom $D(a,r) \subseteq S$; nech ďalej $p, q > 0$ sú také, že pre všetky $z \in D(a,r)$ je $0 < p \leq \operatorname{Re} z \leq q$. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $z \in D(a,r)$ potom z dokázaného vyplýva

$$|\Gamma(z) - f_n(z)| \leq \frac{(1/n)^p}{p} + \frac{(q+1)!}{n},$$

pričom výraz na pravej strane pre $n \to \infty$ očividne speje k nule. Na $D(a,r)$ teda $f_n \rightrightarrows \Gamma$ pre $n \to \infty$, z čoho dostávame $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \Gamma$ na S, keďže uvažovaný bod $a \in S$ je ľubovoľný. □

Veta 14.4.3. *Funkcia* Γ *je analytická na* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Dôkaz. Na $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ je funkcia Γ podľa lem 14.4.1 a 14.4.2 lokálne rovnomernou limitou postupnosti analytických funkcií. Vďaka vete 7.1.9 je teda na S analytická aj funkcia Γ.

S pomocou vety 14.3.2 by sme navyše indukciou vzhľadom na n ľahko dokázali, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ a $n \in \mathbb{N}$ je[1]

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ spĺňajúce $-n < \operatorname{Re} a \leq -n+1$ tak existuje $r > 0$ také, že $D(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ a pre všetky $z \in D(a,r)$ je $z + n \in S$ a

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

Funkcia na pravej strane tejto rovnosti je pritom evidentne holomorfná na $D(a,r)$; v bode a tak musí byť holomorfná aj funkcia Γ. Keďže a môže byť ľubovoľný bod množiny $(\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}) \setminus S$, je týmto dokázaná analytickosť funkcie Γ na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. □

Ukážme ešte, že funkciu Γ nemožno analyticky predĺžiť na žiaden väčší definičný obor – body $0, -1, -2, \ldots$ sú totiž izolovanými singularitami funkcie Γ.

Tvrdenie 14.4.4. *Body* $0, -1, -2, \ldots$ *sú jednoduché póly funkcie* Γ.

Dôkaz. Nech $a = -n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}(z-a)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \\
&= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Táto limita je vlastná a nenulová; a je tak jednoduchým pólom funkcie Γ podľa tvrdenia 9.4.1(iii). □

[1]Pre $z \in S$ ide o rovnosť (14.4); novým pozorovaním na tomto mieste je, že rovnaká rovnosť platí aj pre zvyšné $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Zakončime tento oddiel nájdením niekoľkých dôležitejších hodnôt funkcie Γ. Nájdenie hodnoty v bode $1/2$ si pritom vyžaduje spočítať relatívne netriviálny integrál.

Tvrdenie 14.4.5. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Dôkaz. Pokúsme sa vypočítať integrál (14.1) pre $z = 1/2$ pomocou substitúcie $x = \sqrt{t}$ – zisťujeme, že

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{-1} 2x \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \,\mathrm{d}x. \tag{14.5}$$

Zostáva vypočítať hodnotu nevlastného integrálu na pravej strane, známeho ako *Gaussov integrál.* Urobíme tak s využitím Cauchyho vety o rezíduách.

Nech $a = \sqrt{2\pi}(1+i)$. Keďže $a^2 = i4\pi$, sú riešeniami rovnice

$$1 + e^{-az} = 0$$

o neznámej z práve všetky

$$z \in \left\{ \frac{a}{4} + \frac{ka}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} =: P.$$

Môžeme potom definovať funkciu $f\colon \mathbb{C} \setminus P \to \mathbb{C}$ pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus P$ ako

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-az}};$$

táto funkcia je evidentne holomorfná na $\mathbb{C} \setminus P$, pričom v každom $z \in P$ má jednoduchý pól.

Uvažujme teraz pre všetky $r \geq 1$ obdĺžnikovú integračnú krivku

$$\gamma_r = [-r, r] + \left[r, r + i\sqrt{\pi/2}\right] + \left[r + i\sqrt{\pi/2}, -r + i\sqrt{\pi/2}\right] + \left[-r + i\sqrt{\pi/2}, -r\right].$$

Funkcia f je potom holomorfná na γ_r^* a meromorfná na $\mathbf{I}(\gamma_r)$, pričom jediným pólom funkcie f v $\mathbf{I}(\gamma_r)$ je bod $a/4$. Rezíduum funkcie f v bode a pritom môžeme nájsť tak, že funkciu $1 + e^{-az}$ v menovateli vyjadríme na okolí jej koreňa $a/4$ ako

$$1 + e^{-az} = (z - a/4) g(z),$$

kde g je na tomto okolí holomorfná. Z Taylorovho rozvoja funkcie $1 + e^{-az}$ v bode $a/4$ potom evidentne vyplýva, že funkčnú hodnotu $g(a/4)$ dostaneme ako hodnotu derivácie funkcie $1 + e^{-az}$ v bode $a/4$ – teda

$$g(a/4) = -ae^{-a^2/4}.$$

Z toho

$$\operatorname{Res}(f, a/4) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-az}}, \frac{a}{4} \right) = \frac{e^{-a^2/16}}{-ae^{-a^2/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{-ae^{-i\pi}} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}$$

a z Cauchyho vety o rezíduách preto

$$\int_{\gamma_r} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a/4) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-az}}, \frac{a}{4} \right) = \sqrt{\pi}.$$

Z vety o odhade navyše

$$\left| \int_{\left[r, r + i\sqrt{\pi/2}\right]} f(z) \,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_0^1 \frac{e^{-\left(r + it\sqrt{\pi/2}\right)^2}}{1 + e^{-a\left(r + it\sqrt{\pi/2}\right)}} i\sqrt{\pi/2} \,\mathrm{d}t \right| \leq e^{-r^2} \sqrt{\pi/2}$$

a

$$\left|\int_{\left[-r+i\sqrt{\pi/2},-r\right]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{-\left(-r+i\sqrt{\pi/2}-it\sqrt{\pi/2}\right)^2}}{1+e^{-a\left(-r+i\sqrt{\pi/2}-it\sqrt{\pi/2}\right)}}(-i\sqrt{\pi/2})\,\mathrm{d}t\right| \leq e^{-r^2}\sqrt{\pi/2},$$

takže

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\left[r,r+i\sqrt{\pi/2}\right]} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty}\int_{\left[-r+i\sqrt{\pi/2},-r\right]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

V dôsledku toho

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty}\int_{[-r,r]} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{r\to\infty}\int_{\left[r+i\sqrt{\pi/2},-r+i\sqrt{\pi/2}\right]} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x+i\sqrt{\pi/2})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\sqrt{\pi/2})\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a/2-\sqrt{\pi/2})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a/2)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f(x+a/2)\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ teraz

$$1 + e^{-a(z+a/2)} = 1 + e^{-az}e^{-a^2/2} = 1 + e^{-az}e^{-i2\pi} = 1 + e^{-az},$$

takže

$$f(z) - f(z+a/2) = \frac{e^{-z^2} - e^{-(z+a/2)^2}}{1+e^{-az}} = \frac{e^{-z^2}(1+e^{-az})}{1+e^{-az}} = e^{-z^2}.$$

Integrál (14.6) teda môžeme vyjadriť ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f(x+a/2)\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

a vďaka (14.5) teda aj

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

čo bolo treba dokázať. □

S použitím vety 14.3.2 následne ľahko prídeme k hodnotám funkcie Γ zhrnutým v tabuľke 14.1.

Bod z	**Hodnota** $\Gamma(z)$	**Bod** z	**Hodnota** $\Gamma(z)$
-3	jednoduchý pól	$1/2$	$\sqrt{\pi}$
$-5/2$	$-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$	1	$0! = 1$
-2	jednoduchý pól	$3/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$-3/2$	$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$	2	$1! = 1$
-1	jednoduchý pól	$5/2$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$-1/2$	$-2\sqrt{\pi}$	3	$2! = 2$
0	jednoduchý pól	$7/2$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

Tabuľka 14.1: Niektoré hodnoty funkcie Γ.

14.5 Reprezentácia pomocou limity

Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujme funkciu $\Gamma_n \colon \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \to \mathbb{C}$ ako

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}$$

pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, kde výraz n^z opäť chápeme ako $e^{z \ln n}$, kde ln je *reálny* prirodzený logaritmus. V rámci tohto oddielu dokážeme, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ je

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Začnime dôkazom integrálnej reprezentácie funkcií Γ_n pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Lema 14.5.1. *Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Pre všetky $z \in S$ potom*

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Všimnime si najprv, že po substitúcii $u = t/n$ dostaneme

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n (un)^{z-1} n\,\mathrm{d}u = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u.$$

Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $z \in S$ je

$$n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \Gamma_n(z). \tag{14.7}$$

Pre $n = 1$ a všetky $z \in S$ je

$$\begin{aligned}
n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 (1-u) u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{z-1}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 u^z\,\mathrm{d}u = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 u^{z-1}\,\mathrm{d}u - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 u^z\,\mathrm{d}u = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{u^z}{z}\right]_{u=\varepsilon}^1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{u^{z+1}}{z+1}\right]_{u=\varepsilon}^1 = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{z} - \frac{\varepsilon^z}{z}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{\varepsilon^{z+1}}{z+1}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)} = \\
&= \frac{1^z 1!}{z(z+1)} = \Gamma_1(z).
\end{aligned}$$

Nech teraz rovnosť (14.7) platí pre $n = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre $n = k+1$ a ľubovoľné $z \in S$ potom integrujme po častiach:

$$\begin{aligned}
(k+1)^z \int_0^1 (1-u)^{k+1} u^{z-1}\,\mathrm{d}u &= (k+1)^z \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 (1-u)^{k+1} u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \\
&= (k+1)^z \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\left[(1-u)^{k+1} \frac{u^z}{z}\right]_{u=\varepsilon}^1 - \int_\varepsilon^1 \left(-(k+1)(1-u)^k \frac{u^z}{z}\right) \mathrm{d}u \right) = \\
&= (k+1)^z \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-(1-\varepsilon)^{k+1} \frac{\varepsilon^z}{z} + \int_\varepsilon^1 (k+1)(1-u)^k \frac{u^z}{z}\,\mathrm{d}u \right) = \\
&= (k+1)^z \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 (k+1)(1-u)^k \frac{u^z}{z}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{(k+1)^{z+1}}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 (1-u)^k u^z\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{(k+1)^{z+1}}{z} \int_0^1 (1-u)^k u^z\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Z indukčného predpokladu teda

$$(k+1)^z \int_0^1 (1-u)^{k+1} u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \frac{(k+1)^{z+1}\Gamma_k(z+1)}{zk^{z+1}} = \frac{(k+1)^{z+1}k^{z+1}k!}{zk^{z+1}(z+1)\dots(z+1+k)} =$$
$$= \frac{(k+1)^z(k+1)!}{z(z+1)\dots(z+k+1)} = \Gamma_{k+1}(z),$$

čo bolo treba dokázať. □

Pripomeňme si *Bernoulliho nerovnosť*, ktorá hovorí, že pre všetky reálne $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Pre $n = 0$ je skutočne $(1+x)^0 = 1 \geq 1$; ak ďalej nerovnosť platí pre $n = k \in \mathbb{N}$, pre $n = k+1$ s využitím indukčného predpokladu a nezápornosti čísel $1+x$ a kx^2 dostávame

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Lema 14.5.2. *Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre všetky $t \in [-n, n]$ potom*

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^2 \frac{e^{-t}}{n}.$$

Dôkaz. Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ je $e^x \geq 1 + x$: pre $x \leq -1$ je toto pozorovanie triviálne, pretože e^x je kladné, kým $1 + x$ nie je; pre $x \geq -1$ zas s použitím Bernoulliho nerovnosti dostávame

$$e^x = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq \lim_{m\to\infty} (1+x) = 1 + x.$$

Zvoľme $x = -t/n$. Zisťujeme potom, že

$$e^{-t/n} \geq 1 - \frac{t}{n},$$

z čoho – keďže $t/n \leq 1$ –

$$e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

a teda aj

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

čo dokazuje prvú z nerovností. Podobne pre $x = t/n$ dostávame

$$e^{t/n} \geq 1 + \frac{t}{n},$$

z čoho – keďže $t/n \geq -1$ –

$$e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

S použitím Bernoulliho nerovnosti teda

$$e^{-t} - t^2\frac{e^{-t}}{n} = e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = e^{-t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq$$
$$\leq e^{-t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

z čoho napokon dostávame aj druhú dokazovanú nerovnosť

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^2 \frac{e^{-t}}{n}.$$

□

Môžeme teraz pristúpiť k dôkazu samotnej vety o reprezentácii funkcie Γ pomocou limity funkcií Γ_n pre $n \to \infty$.

Veta 14.5.3. *Pre všetky* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ *je*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Dôkaz. Uvažujme najprv ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z > 0$ a pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ skúmajme hodnotu

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z) - \Gamma_n(z)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t - \Gamma_n(z) \right| = \\
&= \left| \int_0^n e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| = \\
&= \left| \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1}\, \mathrm{d}t + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| \le \\
&\le \left| \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| + \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right|.
\end{aligned}$$

Dokážeme, že obidve absolútne hodnoty v súčte na pravej strane nerovnosti spejú pre $n \to \infty$ k nule. S použitím lemy 14.5.2 pre prvú z nich dostávame

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| &\le \int_0^n \left| \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1} \right| \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^n \left(\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{\operatorname{Re} z-1} \right) \mathrm{d}t \le \int_0^n \frac{t^2 e^{-t}}{n} t^{\operatorname{Re} z-1}\, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{\operatorname{Re} z+1}\, \mathrm{d}t \le \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re} z+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \Gamma(\operatorname{Re} z + 2);
\end{aligned}$$

skutočne teda

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| = 0.$$

Podobne pre druhú absolútnu hodnotu dostávame

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| \le \int_n^\infty \left| e^{-t} t^{z-1} \right| \mathrm{d}t = \int_n^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re} z-1}\, \mathrm{d}t.$$

Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ spĺňajúce $m \ge \operatorname{Re} z + 1$ teda

$$\begin{aligned}
\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| &\le \int_n^\infty \frac{m!}{t^{m+1-\operatorname{Re} z}}\, \mathrm{d}t = \lim_{h\to\infty} \int_n^h \frac{m!}{t^{m+1-\operatorname{Re} z}}\, \mathrm{d}t = \\
&= \lim_{h\to\infty} \left(m! \left[-\frac{1}{(m - \operatorname{Re} z) t^{m-\operatorname{Re} z}} \right]_{t=n}^h \right) = \\
&= \lim_{h\to\infty} \left(m! \left(\frac{1}{(m - \operatorname{Re} z) n^{m-\operatorname{Re} z}} - \frac{1}{(m - \operatorname{Re} z) h^{m-\operatorname{Re} z}} \right) \right) = \\
&= \frac{m!}{(m - \operatorname{Re} z) n^{m-\operatorname{Re} z}}.
\end{aligned}$$

Ak teda $q \in \mathbb{N}$ je také, že $\operatorname{Re} z \le q$, je

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right| \le \frac{(q+1)!}{n}$$

a skutočne tak aj v tomto prípade prichádzame k záveru, že

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t\right| = 0.$$

Týmto je veta dokázaná pre $z \in \mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z > 0$. Pre zvyšné $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $-m < \operatorname{Re} z \leq -m+1$. Potom $\operatorname{Re}(z+m) > 0$, a teda

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} = \\ &= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z+m}n!}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+m+n)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{z+m}n!}{z(z+1)\dots(z+(m+n))} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)},\end{aligned}$$

čím je veta dokázaná. □

14.6 Bohrova-Mollerupova veta

Dokážeme teraz *Bohrovu-Mollerupovu vetu*, podľa ktorej je *reálna* funkcia gama jedinou funkciou spĺňajúcou tri veľmi jednoduché vlastnosti. Presnejšie povedané: dokážeme, že každá funkcia s týmito troma vlastnosťami musí byť rovná funkcii gama. Nebudeme ale zatiaľ dokazovať, že funkcia gama tieto tri vlastnosti naozaj má – pri dvoch z nich to bude zrejmé, zatiaľ však necháme otvorenú otázku logaritmickej konvexnosti funkcie gama. To znamená, že zatiaľ nebudeme môcť predpokladať neprázdnosť triedy funkcií spĺňajúcich dané tri vlastnosti (a teda ani netriviálnosť Bohrovej-Mollerupovej vety). Tá vyplynie až z našich neskorších úvah okolo Stirlingovej aproximácie.

Definícia 14.6.1. Nech $I \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Funkcia $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *konvexná*, ak pre všetky $a \in I$ je

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

neklesajúcou funkciou premennej x na I.

Dvakrát diferencovateľná funkcia je pritom na I konvexná práve vtedy, keď je jej druhá derivácia na I nezáporná.

Definícia 14.6.2. Nech $I \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Funkcia $f\colon I \to (0,\infty)$ je *logaritmicky konvexná* na I, ak je na I konvexná funkcia $\ln\circ f$.

Veta 14.6.3 (Bohrova-Mollerupova veta)**.** *Nech $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina taká, že $(0,\infty) \subseteq X$ a $x+1 \in X$ kedykoľvek $x \in X$. Nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že:*

(i) Pre všetky $x \in X$ je $f(x+1) = xf(x)$.

(ii) Funkcia f je na intervale $(0,\infty)$ kladná a logaritmicky konvexná.

(iii) Platí $f(1) = 1$.

Pre všetky $x \in X$ potom $f(x) = \Gamma(x)$.

Dôkaz. Rovnosť $f(x) = \Gamma(x)$ stačí ukázať pre všetky $x \in (0,1]$; pre zvyšné $x \in X$ potom vyplynie z vlastnosti (i) a vety 14.3.2.

Z logaritmickej konvexnosti funkcie f na $(0,\infty)$ pre všetky $x \in (0,1]$ a všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ dostávame

$$\frac{\ln(f(n-1))-\ln(f(n))}{(n-1)-n} \leq \frac{\ln(f(n+x))-\ln(f(n))}{(n+x)-n} \leq \frac{\ln(f(n+1))-\ln(f(n))}{(n+1)-n}.$$

Keďže z vlastností (*i*) a (*iii*) evidentne vyplýva $f(n) = (n-1)!$, možno uvedené nerovnosti prepísať aj ako

$$\ln(n-1) \le \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(n-1)!}{x} \le \ln n,$$

z čoho

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) \le \ln\left(f(n+x)\right) \le \ln\left(n^x(n-1)!\right).$$

Vďaka monotónnosti prirodzeného logaritmu teda

$$(n-1)^x(n-1)! \le f(n+x) \le n^x(n-1)!,$$

čo je to isté ako

$$(n-1)^x(n-1)! \le f(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \le n^x(n-1)!.$$

Z toho

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \le f(x) \le \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,\frac{x+n}{n}.$$

Keďže navyše tieto nerovnosti platia pre *všetky* prirodzené $n \ge 2$, dostávame

$$\Gamma_n(x) \le f(x) \le \Gamma_n(x)\frac{x+n}{n},$$

pre všetky prirodzené $n \ge 2$. Preto

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) \le f(x)$$

a súčasne

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)\frac{x+n}{n} \ge f(x);$$

nutne teda $f(x) = \Gamma(x)$, čo bolo treba dokázať. □

14.7 Stirlingova aproximácia a Legendreov vzťah

Naším najbližším cieľom bude asymptoticky odhadnúť funkciu $\Gamma(x)$ pre $x \to \infty$ pomocou elementárnej funkcie. Dokážeme najprv dve pomocné tvrdenia, ktoré sa nám za tým účelom zídu.

Tvrdenie 14.7.1. *Pre všetky $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ je*

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Dôkaz. Keďže

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

stačí ukázať rastúcosť postupnosti $\left((1+1/k)^k\right)_{k=1}^{\infty}$ a klesajúcosť postupnosti $\left((1+1/k)^{k+1}\right)_{k=1}^{\infty}$.

V prvom prípade potrebujeme ukázať, že pre všetky $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ je

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

čiže
$$\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)>1.$$
S použitím Bernoulliho nerovnosti ale skutočne dostávame
$$\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right)^k\frac{k+2}{k+1}=\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)^k\frac{k+2}{k+1}\geq$$
$$\geq\left(1-\frac{k}{(k+1)^2}\right)\frac{k+2}{k+1}=1+\frac{1}{(k+1)^3}>1.$$
Podobne pre druhú postupnosť potrebujeme ukázať, že pre všetky $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ je
$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1},$$
čiže
$$\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}>\frac{k+2}{k+1}.$$
S použitím Bernoulliho nerovnosti ale opäť zisťujeme, že
$$\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}=\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{k+1}\geq1+\frac{k+1}{k(k+2)}>1+\frac{k+1}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{k+1},$$
čím je tvrdenie dokázané. □

Tvrdenie 14.7.2. *Pre všetky $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ je*
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
Dôkaz. Prenásobením nerovností z tvrdenia 14.7.1 pre $k=1,\dots,n-1$ dostávame
$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^k}{k^k}<e^{n-1}<\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}},$$
čo je to isté ako
$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}<e^{n-1}<\frac{n^n}{(n-1)!}.$$
Prenásobením týchto nerovností číslom $n!$ dostávame
$$n^n<n!e^{n-1}<n^{n+1}$$
a predelením číslom e^{n-1} napokon prichádzame k dokazovaným nerovnostiam
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
□

Z tvrdenia 14.7.2 a vety 14.2.2 vyplýva, že prinajmenšom pre prirodzené čísla $x\geq1$ bude
$$x^xe^{-x+1}<\Gamma(x+1)<x^{x+1}e^{-x+1},$$
z čoho vďaka vzťahu $\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x$ dostávame
$$ex^{x-1}e^{-x}<\Gamma(x)<ex^xe^{-x}.$$
Funkciu Γ sa teda pre $x\in(0,\infty)$ pokúsme vyjadriť ako
$$\Gamma(x)=ax^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)},$$
kde $a\in\mathbb{R}$ je vhodná konštanta a μ je vhodná funkcia. Skúsme teda nájsť konštantu a a funkciu μ tak, aby funkcia $ax^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ mala všetky tri vlastnosti z Bohrovej-Mollerupovej vety. Zíde sa nám pritom nasledujúca lema.

Lema 14.7.3. *Nech $I \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval.*

a) Súčet konvexných funkcií na I je konvexná funkcia.

b) Súčin logaritmicky konvexných funkcií na I je logaritmicky konvexná funkcia.

c) Limita (bodovo konvergentnej) postupnosti konvexných funkcií na I je konvexná funkcia.

d) Súčet nekonečného radu konvexných funkcií na I je konvexná funkcia.

Dôkaz. Na dôkaz tvrdenia a) najprv uvažujme ľubovoľnú dvojicu konvexných funkcií $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Pre všetky $a \in I$ sú potom

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{a} \qquad \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

neklesajúce funkcie premennej x na I. Neklesajúcou je však v takom prípade aj funkcia

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a}$$

premennej x a funkcia $f + g$ tak musí byť tiež konvexná.

Ak sú ďalej funkcie $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ logaritmicky konvexné, sú funkcie $\ln f$ a $\ln g$ konvexné a podľa práve dokázaného tvrdenia tak konvexnou musí byť aj funkcia $\ln f + \ln g = \ln(fg)$. Funkcia fg je teda tiež logaritmicky konvexná a dokázané je aj tvrdenie b).

Na dôkaz tvrdenia c) si stačí všimnúť, že konvexnosť funkcie $f\colon I \to \mathbb{R}$ je ekvivalentná požiadavke

$$\frac{\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} - \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}}{x_1 - x_2} \geq 0$$

pre všetky $a, x_1, x_2 \in I$. Ľahko vidieť, že pre limitu postupnosti funkcií spĺňajúcich takúto nerovnosť zostáva táto vlastnosť zachovaná.

Tvrdenie d) je napokon dôsledkom tvrdení a) a c). □

Nájdime teraz najprv funkciu $\mu\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, pre ktorú funkcia $f(x) = x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ spĺňa podmienky (i) a (ii) Bohrovej-Mollerupovej vety. Pre ľubovoľnú funkciu f takéhoto tvaru je

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x+1)^{x+1/2}e^{-(x+1)}e^{\mu(x+1)}}{x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} xe^{-1}e^{\mu(x+1)-\mu(x)}.$$

Aby funkcia f vyhovovala podmienke (i) Bohrovej-Mollerupovej vety, musí byť tento podiel rovný x – nutne teda

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} e^{-1}\right) = (x + 1/2)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 =: g(x). \tag{14.8}$$

Funkciu μ definujeme pre všetky $x \in (0, \infty)$ ako

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n). \tag{14.9}$$

Dokážeme teraz, že tento rad skutočne konverguje – platnosť vzťahu (14.8), a tým pádom aj podmienky (i) Bohrovej-Mollerupovej vety pre funkciu f, je v takom prípade evidentná. Popritom dokážeme aj konvexnosť funkcie g.

Tvrdenie 14.7.4. *Funkcia* $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$*, daná pre všetky* $x \in (0,\infty)$ *ako*

$$g(x) = (x+1/2)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1,$$

je konvexná. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \tag{14.10}$$

pritom konverguje pre všetky $x \in (0,\infty)$*, pričom*

$$0 \le \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \le \frac{1}{12x}.$$

Dôkaz. Uvažujme rad

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y)-\ln(1-y)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{1}+\frac{2y^3}{3}+\frac{2y^5}{5}+\dots\right) = \frac{y}{1}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\dots,$$

ktorý konverguje pre všetky reálne čísla y spĺňajúce $|y|<1$. Vezmime $y = 1/(2x+1)$; výsledný rad

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} = \frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\dots$$

potom konverguje pre všetky $x \in (0,\infty)$, lebo $|1/(2x+1)| < 1$ pre všetky takéto x. Prenásobením predchádzajúcej rovnosti výrazom $(2x+1)$ a odpočítaním jednej dostávame

$$g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7(2x+1)^6}+\dots \tag{14.11}$$

Keďže sú všetky členy nekonečného radu funkcií napravo evidentne konvexné na $(0,\infty)$, musí byť podľa lemy 14.7.3 konvexná aj funkcia g. Tým je dokázaná prvá časť tvrdenia.

Rad (14.11) nám ale tiež umožňuje odhadnúť hodnotu funkcie $g(x)$: pre všetky $x \in (0,\infty)$ je

$$\begin{aligned}
0 \le g(x) &= \frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7(2x+1)^6}+\dots \le \\
&\le \frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{3(2x+1)^4}+\frac{1}{3(2x+1)^6}+\dots = \\
&= \frac{1}{3(2x+1)^2}\left(1+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^4}+\dots\right) = \\
&= \frac{1}{3(2x+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{3(2x+1)^2-3} = \\
&= \frac{1}{12x^2+12x} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}.
\end{aligned}$$

Konvergenciu radu (14.10) a odhad pre jeho súčet teda dostaneme nasledovne:

$$0 \le \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \le \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right) = \frac{1}{12x}.$$

Tvrdenie je dokázané. □

Funkcia μ je teda naozaj dobre definovaná; z predchádzajúceho tvrdenia navyše dostávame užitočný odhad

$$0 \le \mu(x) \le \frac{1}{12x} \tag{14.12}$$

pre všetky $x \in (0,\infty)$. Funkcia $f(x) = x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ je teda, pre funkciu μ definovanú vzťahom (14.9), tiež dobre definovaná a vyhovuje podmienke (i) Bohrovej-Mollerovej vety. Dokážeme teraz, že vyhovuje aj podmienke (ii), t. j. je logaritmicky konvexná.

Tvrdenie 14.7.5. *Funkcia $f(x) = x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ je kladná a logaritmicky konvexná na $(0,\infty)$.*

Dôkaz. Funkcia $x^{x-1/2}e^{-x}$ premennej x je na $(0,\infty)$ logaritmicky konvexná, pretože

$$\ln\left(x^{x-1/2}e^{-x}\right) = \ln\left(e^{(\ln x)(x-1/2)-x}\right) = (\ln x)\left(x-\frac{1}{2}\right) - x,$$

z čoho pre derivácie tejto funkcie pre $x \in (0,\infty)$ dostávame

$$\left(\ln\left(x^{x-1/2}e^{-x}\right)\right)' = \frac{x-1/2}{x} + \ln x - 1$$

a

$$\left(\ln\left(x^{x-1/2}e^{-x}\right)\right)'' = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} > 0.$$

Vďaka leme 14.7.3 teda stačí dokázať, je logaritmicky konvexná funkcia $e^{\mu(x)}$ – to pritom bude isté, ak dokážeme, že funkcia μ je na intervale $(0,\infty)$ konvexná. Keďže

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n),$$

stačí vďaka leme 14.7.3 dokázať konvexnosť funkcií $g(x+n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$; tá je zas ekvivalentná konvexnosti funkcie $g(x)$. Avšak

$$g(x) = (x+1/2)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$$

pre všetky $x \in (0,\infty)$, z čoho

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x(x+1)} = \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x(x+1)} \end{aligned}$$

a

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x^2(x+1)} + \frac{1}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0,$$

takisto pre všetky $x \in (0,\infty)$. $\square$

Funkcia $f(x) = x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ teda spĺňa podmienky (i) a (ii) Bohrovej-Mollerupovej vety. Rovnako dobre tak tieto podmienky spĺňa aj ľubovoľná funkcia $f_\alpha(x) = \alpha x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ pre $\alpha > 0$. Zostáva teda zvoliť konštantu $\alpha > 0$ tak, aby bola pre funkciu f_α splnená aj podmienka (iii) Bohrovej-Mollerupovej vety, t. j. aby bolo

$$f_\alpha(1) = \alpha e^{-1}e^{\mu(1)} = 1.$$

Táto rovnosť je, samozrejme, splnená pre $\alpha = a := e^{1-\mu(1)}$ – podľa Bohrovej-Mollerupovej vety teda

$$\Gamma(x) = f_a(x)$$

pre všetky $x \in (0,\infty)$. V dôsledku toho tiež zisťujeme, že *funkcia Γ naozaj spĺňa všetky tri podmienky Bohrovej-Mollerupovej vety* – je teda okrem iného aj logaritmicky konvexná na intervale $(0,\infty)$.

Z rovnosti $\Gamma(x) = f_a(x)$ a odhadu (14.12) pre nejakú funkciu $\theta\colon (0,\infty) \to [0,1]$ a všetky $x \in (0,\infty)$ dostávame

$$\Gamma(x) = ax^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)} = ax^{x-1/2}e^{-x+\theta(x)/(12x)} \tag{14.13}$$

a keďže navyše pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, tak aj

$$n! = an^{n+1/2}e^{-n+\theta(n)/(12n)}. \tag{14.14}$$

Z týchto dvoch vzťahov odvodíme Stirlingove aproximácie pre funkciu gama resp. pre faktoriál.

Naším najbližším cieľom bude vyjadriť konštantu a jednoduchším spôsobom. Za tým účelom uvažujme pre všetky $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ funkciu $\varphi_p\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, danú pre všetky $x \in (0,\infty)$ ako

$$\varphi_p(x) = p^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right). \tag{14.15}$$

Ukážeme, že táto funkcia takisto spĺňa podmienky (i) a (ii) Bohrovej-Mollerupovej vety.

Keďže je funkcia $\Gamma(x)$ kladná a logaritmicky konvexná na $(0,\infty)$, z vety o derivácii zloženej funkcie vyplýva, že na tomto intervale musia byť kladné a logaritmicky konvexné aj funkcie

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right), \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

Funkcia p^x je na intervale $(0,\infty)$ takisto logaritmicky konvexná, pretože

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln(p^x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x\ln p = 0.$$

Vďaka leme 14.7.3 a (14.7.3) tak musí byť logaritmicky konvexná aj funkcia $\varphi_p(x)$.

Uvažujme ďalej funkčnú hodnotu hodnotu $\varphi_p(x+1)$. S použitím vety 14.3.2 zisťujeme, že

$$\begin{aligned}
\varphi_p(x+1) &= p^{x+1}\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+p}{p}\right) = \\
&= p^x p\Gamma\left(\frac{x}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \\
&= p^x p\frac{x}{p}\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \\
&= xp^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \\
&= x\varphi_p(x).
\end{aligned}$$

Funkcia φ_p teda naozaj spĺňa podmienky (i) a (ii) Bohrovej-Mollerupovej vety, a teda existuje konštanta $a_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taká, že

$$\varphi_p(x) = a_p\Gamma(x)$$

pre všetky $x \in (0,\infty)$. Špeciálne pre $x = 1$ je $\Gamma(x) = 1$, z čoho

$$a_p = p\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right). \tag{14.16}$$

Môžeme teraz pristúpiť k identifikácii hľadanej konštanty a – dokážeme, že $a = \sqrt{2\pi}$. Popritom tiež ukážeme, že pre všetky $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je $a_p = \sqrt{p}a^{p-1} = p^{1/2}(2\pi)^{(p-1)/2}$.

Tvrdenie 14.7.6. *Pre všetky* $x \in (0, \infty)$ *je* $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$ *a* $\varphi_p(x) = p^{1/2}(2\pi)^{(p-1)/2}\Gamma(x)$.

Dôkaz. Vieme, že pre všetky kladné reálne x je $\Gamma(x) = f_a(x) = ax^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}$; dokazované tvrdenie je teda naozaj ekvivalentné rovnostiam $a = \sqrt{2\pi}$ a $a_p = \sqrt{p}a^{p-1}$.

Z vety 14.5.3 pre $k = 1, \dots, p$ dostávame

$$\Gamma\left(\frac{k}{p}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k/p}n!}{\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p}+1\right)\dots\left(\frac{k}{p}+n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k/p}n!p^{n+1}}{k(k+p)\dots(k+np)},$$

takže

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(1+\dots+p)/p}(n!)^p p^{np+p}}{\prod_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{p}(k+jp)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(p+1)/2}(n!)^p p^{np+p}}{(np+p)!}. \tag{14.17}$$

Súčasne ale zrejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(np+p)!}{(np)!(np)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(np)!(np+1)\dots(np+p)}{(np)!(np)^p} = 1.$$

Zo vzťahov (14.16) a (14.17) teda dostávame

$$\begin{aligned} a_p = p\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right) &= p\lim_{n\to\infty} \frac{n^{(p+1)/2}(n!)^p p^{np+p}}{(np+p)!}\,\frac{(np+p)!}{(np)!(np)^p} = \\ &= p\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^p p^{np}}{(np)!n^{(p-1)/2}}. \end{aligned} \tag{14.18}$$

Podľa (14.14) pritom

$$(n!)^p = a^p n^{np+p/2}e^{-np}e^{\theta(n)p/(12n)}$$

a

$$(np)! = a(np)^{np+1/2}e^{-np}e^{\theta(np)/(12np)}.$$

Po dosadení do (14.18) dostávame

$$a_p = p\lim_{n\to\infty} \frac{a^p n^{np+p/2}e^{-np}e^{\theta(n)p/(12n)}p^{np}}{a(np)^{np+1/2}e^{-np}e^{\theta(np)/(12np)}n^{(p-1)/2}} = \sqrt{p}a^{p-1}\lim_{n\to\infty} e^{\theta(n)p/(12n)-\theta(np)/(12np)} = \sqrt{p}a^{p-1}.$$

Špeciálne pre $p = 2$ navyše vďaka (14.16) zisťujeme, že

$$a = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{2\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi},$$

čo bolo treba dokázať. □

Môžeme teraz vysloviť samotnú vetu o Stirlingových aproximáciách pre reálnu funkciu Γ, ako aj pre faktoriál prirodzených čísel.

Veta 14.7.7 (Stirlingove aproximácie)**.** *Pre reálne $x \to \infty$ je*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

a pre prirodzené $n \to \infty$ je

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Dôkaz. Bezprostredne zo vzťahu (14.13) a tvrdenia 14.7.6 pre nejakú funkciu $\theta\colon (0,\infty) \to [0,1]$ a všetky $x \in (0,\infty)$ dostávame

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x+\theta(x)/(12x)};$$

podobne vďaka (14.14) pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+\theta(n)/(12n)}.$$

Pre $x \to \infty$ teraz

$$e^{\theta(x)/(12x)} \le e^{1/12x} = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{(12x)^2 2!} + \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

podobne teda aj pre $n \to \infty$ máme

$$e^{\theta(n)/(12n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

a veta je dokázaná. □

Po ceste k Stirlingovým aproximáciám sme navyše dokázali aj nasledujúce dva výsledky, ktoré stoja za osobitnú zmienku.

Veta 14.7.8 (Gaussov súčinový vzorec)**.** *Pre všetky $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ je*

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{(p-1)/2}}{p^{z-1/2}}\Gamma(z).$$

Dôkaz. Podľa tvrdenia 14.7.6 pre všetky $p \in \mathbb{N}$ a $x \in (0,\infty)$ platí

$$\varphi_p(x) = p^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = p^{1/2}(2\pi)^{(p-1)/2}\Gamma(x),$$

z čoho dostávame rovnosť

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{(p-1)/2}}{p^{x-1/2}}\Gamma(x)$$

pre všetky $x \in (0,\infty)$. Keďže má interval $(0,\infty)$ v $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ hromadný bod, z vety o jednoznačnosti dostávame aj dokazovanú rovnosť

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{(p-1)/2}}{p^{z-1/2}}\Gamma(z).$$

pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$. □

Veta 14.7.9 (Legendreov vzťah)**.** *Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ je*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z Gaussovho súčinového vzorca pre $p = 2$. □

14.8 Súvis so sínusom

Na záver tejto kapitoly venovanej funkcii gama ešte dokážme vetu, ktorá túto funkciu dáva do súvisu s goniometrickou funkciou $\sin z$.

Veta 14.8.1. *Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ je*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Dôkaz. Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ položme

$$\varphi(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z).$$

Ukážeme postupne, že funkcia φ je na svojom definičnom obore konštantná. Všimnime si najprv, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned}\varphi(z+1) &= \Gamma(z+1)\Gamma(-z)\sin(\pi(z+1)) = (z\Gamma(z))\left(\frac{\Gamma(1-z)}{-z}\right)(-\sin(\pi z)) = \\ &= \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z) = \varphi(z).\end{aligned}$$

Funkcia φ je teda prinajmenšom periodická. Uvažujme teraz súčin

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{z}{2}\right)\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(1-z)+1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right).\end{aligned}$$

Aplikovaním Legendreovho vzťahu v bode z a v bode $1-z$ tak dostávame

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{z}{2}\right)\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-z}}\Gamma(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \\ &= \pi\Gamma(z)\Gamma(1-z)2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \pi\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z) = \pi\varphi(z).\end{aligned} \tag{14.19}$$

Dokážeme teraz, že funkcia φ má iba odstrániteľné singularity – a možno ju teda dodefinovať na celú funkciu. Funkcia φ je ale zjavne analytická na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; možnými singularitami tejto funkcie sú tak jedine body $a \in \mathbb{Z}$. Pre $a = 0$ a všetky $z \in D'(0,1)$ ale

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}\Gamma(1-z)\left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} - \frac{\pi^7 z^7}{7!} + \ldots\right) = \\ &= \Gamma(1+z)\Gamma(1-z)\left(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} - \frac{\pi^7 z^6}{7!} + \ldots\right);\end{aligned}$$

na $D'(0,1)$ je teda funkcia $\varphi(z)$ zhodná s funkciou analytickou v bode 0, a teda môže mať v bode 0 iba odstrániteľnú singularitu – jej hodnotu v bode 0 môžeme dodefinovať na $\Gamma(1)\Gamma(1)\pi = \pi$. Z periodicity funkcie φ napokon vyplýva, že rovnako môžeme na π dodefinovať aj hodnoty funkcie φ vo všetkých bodoch $a \in \mathbb{Z}$, ktoré tak musia byť odstrániteľnými singularitami funkcie φ. Vo výsledku tak dostávame *celú* funkciu $\hat{\varphi}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takú, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ je $\hat{\varphi}(z) = \varphi(z)$. Z (14.19) a vety o jednoznačnosti navyše pre túto funkciu dostávame vzťah

$$\hat{\varphi}\left(\frac{z}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{z+1}{2}\right) = \pi\hat{\varphi}(z) \tag{14.20}$$

pre všetky $z \in \mathbb{C}$ – teda aj pre body $a \in \mathbb{Z}$, v ktorých pôvodná funkcia φ nebola definovaná.

Môžeme napokon dokázať konštantosť funkcie $\hat{\varphi}$ – a tým pádom aj pôvodne uvažovanej funkcie φ. Uvažujme najprv $x \in \mathbb{R}$; funkcia $\hat{\varphi}$ je evidentne kladná na intervale $[0,1]$ a vďaka jej periodickosti tak musí byť kladná aj na $\mathbb{R}$. Môžeme teda definovať funkciu $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ ako $g(x) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \hat{\varphi}(x)$. Z rovnosti (14.20) potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ dostávame

$$g(x) = \frac{1}{4} g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} g\left(\frac{x+1}{2}\right). \tag{14.21}$$

Ako druhá derivácia analytickej funkcie navyše musí byť funkcia g na svojom definičnom obore $\mathbb{R}$ spojitá; špeciálne je preto spojitá aj na intervale $[0,1]$. Z toho vyplýva existencia $M \geq 0$ takého, že pre všetky $x \in [0,1]$ je $|g(x)| \leq M$; vďaka periodickosti funkcie $\hat{\varphi}$ tak opäť $|g(x)| \leq M$ aj pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Z (14.21) ale súčasne pre ľubovoľné takéto $M \geq 0$ a všetky $x \in \mathbb{R}$ dostávame

$$|g(x)| \leq \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = \frac{M}{2},$$

z čoho vyplýva, že v skutočnosti možno vziať aj $M = 0$. Funkcia g tak musí byť na $\mathbb{R}$ konštantne nulová – funkcia $\ln \hat{\varphi}$ preto musí byť na $\mathbb{R}$ lineárna alebo konštantná; keďže je ale súčasne periodická, môže byť jedine konštantná. Konštantná na $\mathbb{R}$ tak musí byť aj funkcia $\hat{\varphi}$ a z vety o jednoznačnosti následne vyplýva konštantnosť tejto funkcie aj na $\mathbb{C}$.

Vieme pritom, že $\hat{\varphi}(0) = \pi$ – pre všetky $z \in \mathbb{C}$ teda musí byť $\hat{\varphi}(z) = \pi$. Pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ je teda

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\varphi(z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\hat{\varphi}(z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

čo bolo treba dokázať. □

Cvičenia

1. Dokážte, že funkcia gama nemá žiadne korene.

2. Dokážte, že pre všetky $x \in (0, \infty)$ je

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k \, \mathrm{d}t.$$

Literatúra

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1979.

[2] Artin, E.: *The Gamma Function.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[3] Bartle, R. G.: *The Elements of Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons, 1964.

[4] Brown, J. W.; Churchill, R. V.: *Complex Variables and Applications 8th ed.* Boston: McGraw-Hill, 2009.

[5] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[6] Hahn, L.-S.; Epstein, B.: *Classical Complex Analysis.* Sudbury: Jones and Bartlett, 1996.

[7] Markushevich, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 3.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.

[8] Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 2003.

[9] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis 3rd ed.* New York: McGraw-Hill, 1986.

[10] Simmons, G. F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1963.

[11] Ullrich, D. C.: *Complex Made Simple.* Providence: American Mathematical Society, 2008.