

Prvá sada domácich úloh

1. Vyriešte cvičenie 7 z prvej kapitoly skrípt.
2. Vyriešte cvičenie 11 z prvej kapitoly skrípt.
3. Na prednáške sme videli, že klasické nedeterministické konečné automaty so vstupnou abecedou Σ možno chápať aj ako $2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$ -automaty nad polokruhom formálnych jazykov 2^{Σ^*} . Dá sa teda povedať, že $2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$ -automaty nad 2^{Σ^*} rozoznávajú práve všetky racionálne jazyky nad Σ . Ak existuje, nájdite *najväčšiu* množinu $S' \subseteq 2^{\Sigma^*}$ takú, že S' -automaty nad polokruhom 2^{Σ^*} stále rozoznávajú práve všetky racionálne jazyky nad Σ . Svoje tvrdenie dokážte a dajte ho do súvisu s vhodným výsledkom klasickej teórie formálnych jazykov.
4. Normálny tvar automatov s váhami nad spočítateľne úplnými polokruhmi, o ktorom hovorí veta 3.4.1 zo skrípt, zo zrejmých príčin *nie je* normálnym tvarom „bezepsilonových“ automatov s váhami nad všeobecnými polokruhmi. Napravte tento nedostatok čo možno najmiernejším zoslabením znenia spomínanej vety a takto získané tvrdenie dokážte.
5. Nech S je polokruh, Σ je abeceda a $r \in S\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Dokážte alebo vyvráťte: ak $r \in S\text{-Rat}(\Sigma^*)$, tak je jazyk $\text{supp}(r)$ racionálny.
6. Pre danú dvojicu (konečných) abecied Σ, Γ nájdite polokruh S taký, že rady $r \in S\text{-Rat}(\Sigma^*)$ možno prirodzene stotožniť s racionálnymi prekladmi – čiže reláciami $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$ realizovanými konečnestavovými prekladačmi. Opíšte konštrukcie, pomocou ktorých možno od daného prekladača prejsť k príslušnému automatu s váhami nad S a naopak.
7. Vhodne definujte „bezepsilonové“ regulárne gramatiky s váhami nad všeobecným polokruhom S a dokážte ich ekvivalenciu s „bezepsilonovými“ konečnými automatmi s váhami nad S .
8. Nech $\mathbb{F}$ je pole, Σ je abeceda a $r \in \mathbb{F}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ je formálny mocninový rad. *Hankelovou maticou*¹ radu r nazveme nekonečnú maticu $H(r)$ nad poľom $\mathbb{F}$, ktorej riadky a stĺpce sú indexované slovami nad abecedou Σ a pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ je prvok poľa $\mathbb{F}$ na pozícii (u, v) matice $H(r)$ daný ako (r, uv) .²
 - a) Dokážte, že riadková hodnota matice $H(r)$ je konečná práve vtedy, keď je konečná stĺpcová hodnota tejto matice, pričom v takom prípade si sú obidve tieto hodnoty rovné.
 - b) Využite túto skutočnosť na dôkaz, že priestor (ľavých) kvocientov $\mathcal{Q}(r)$ radu r má pre racionálny rad r vždy rovnakú dimenziu ako analogicky definovaný priestor pravých kvocientov.
9. Predpokladajme, že by sme definíciu ľavých a pravých bázičských jazykov pozmenili tak, aby sa pre ľavé bázičské jazyky vyžadovala uzavretosť na sufixy a pre pravé bázičské jazyky uzavretosť na prefixy. Existoval by stále pre každý konečný automat s váhami nad poľom $\mathbb{F}$ aspoň jeden ľavý a aspoň jeden pravý bázičský jazyk? Dali by sa takéto ľavé a pravé bázičské jazyky použiť pri procese minimalizácie konečných automatov s váhami nad poľom?

¹Podobne ako už viackrát na tomto predmete ide o zneužitie mena slávneho matematika.

²Pri zápise tejto matice je výhodné predpokladať, že sú slová nad Σ usporiadané koreňovým usporiadaním (čiže najprv podľa dĺžky a slová rovnakej dĺžky lexikograficky); z hľadiska riešenia tejto úlohy ale nejde o nijak zásadný predpoklad.