

Druhá sada domácich úloh

- Nájdite všetky prirodzené čísla $n \geq 2$, pre ktoré existuje *reálna* štvorcová matica A typu $n \times n$ taká, že jej spektrum $\sigma(A)$ neobsahuje ani jedno *reálne* vlastné číslo.
- Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:
 - Ak je matica A ireducibilná, je pre všetky $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ireducibilná aj matica A^t .
 - Ak je pre nejaké $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ireducibilná matica A^t , musí byť ireducibilná aj matica A .
- Dokážte alebo vyvráťte: ak sú $A, B \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ ireducibilné matice (pre nejaké $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), musí byť ireducibilnou aj matica AB .

V nasledujúcich niekoľkých úlohách budeme pracovať s „obrátanou Collatzovou-Wielandtovou funkciou“ $\Gamma'_A: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ktorá je pre každú nezápornú štvorcovú maticu $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ a všetky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ definovaná nasledovne: ak $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ a $A\mathbf{x} = (x'_1, \dots, x'_n)^T$, tak

$$\Gamma_A(\mathbf{x}) = \max_{\substack{k=1, \dots, n \\ x_k \neq 0}} \frac{x'_k}{x_k}$$

- Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie: pre všetky $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ je

$$\Gamma'_A(\mathbf{x}) = \min\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid A\mathbf{x} \leq \alpha\mathbf{x}\}.$$

V prípade, že tvrdenie neplatí, nájdite pre každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *najväčšiu* podmnožinu X_n definičného oboru $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ funkcií Γ'_A pre $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ takú, že pre všetky $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ a $\mathbf{x} \in X_n$ bude uvedená charakterizácia hodnoty $\Gamma'_A(\mathbf{x})$ pravdivá (ak tvrdenie platí, pre všetky n bude $X_n = \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$).

- Dokážte, že funkcia Γ'_A pre ireducibilnú maticu $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$, zúžená na množinu X_n z predchádzajúcej úlohy, nadobúda globálne minimum.
- Dokážte alebo vyvráťte: globálnym minimom funkcie Γ'_A pre ireducibilnú maticu $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$, zúženej na množinu X_n z predchádzajúcich dvoch úloh, je vždy spektrálny polomer matice A .
- Dokážte alebo vyvráťte: pre ľubovoľnú maticu $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$ (kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) možno nájsť s ňou podobnú maticu v normálnom tvare reducibilnej matice pomocou algoritmu pracujúceho v polynomiálnom čase (v prípade potreby za predpokladu, že $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$).
- Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:
 - Ak je matica A primitívna¹, je pre všetky $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ primitívna aj matica A^t .
 - Ak je pre nejaké $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ primitívna matica A^t , musí byť primitívna aj matica A .
- Postupnosť *Lucasových čísel* $(L_n)_{n=0}^\infty$ je definovaná veľmi podobne ako postupnosť Fibonacciho čísel: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n. \quad (1)$$

Metódami kapitoly 6 zo skript vyjadrite pre všetky $n \in \mathbb{N}$ číslo L_n v uzavretom tvare. Než pristúpíte k samotnému výpočtu, pokúste sa o tomto vyjadrení usúdiť čo najviac iba z diferenčnej rovnice (1) a z faktu, že táto rovnica je rovnaká ako u Fibonacciho čísel (obidve začiatkové úlohy sa líšia iba v začiatkových podmienkach).

¹Každá primitívna matica musí byť z definície ireducibilná.