

Druhá sada domácich úloh

- Nájdite všetky prirodzené čísla $n \geq 2$, pre ktoré existuje matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taká, že $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (Úloha 4.4 zo skrípt.)
 - Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je matica s vlastnými číslami $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, kde každé $\lambda \in \sigma(A)$ je uvedené $\alpha(A, \lambda)$ -krát. Dokážte, že $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$. (Úloha 4.6 zo skrípt.)
 - Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{I}_n$ je množina všetkých *ireducibilných* matíc $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$. Zistite, či musí byť $\mathcal{I}_n$ uzavretá na nasledujúce maticové operácie:
 - súčet;
 - súčin;
 - umocňovanie na $t \in \mathbb{N}$;
 - umocňovanie na $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (Úloha 5.9 zo skrípt.)
 - Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $\mathcal{P}_n$ je množina všetkých *primitívnych* ireducibilných matíc $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$. Zistite, či musí byť $\mathcal{P}_n$ uzavretá na nasledujúce maticové operácie:
 - súčet;
 - súčin;
 - umocňovanie na $t \in \mathbb{N}$;
 - umocňovanie na $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (Úloha 5.10 zo skrípt.)
 - Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ je nezáporná reálna matica taká, že pre nejaké $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je matica A^t
 - ireducibilná;
 - primitívna.
- Zistite, či musí mať rovnakú vlastnosť aj matica A . (Úloha 5.11 zo skrípt.)
- Uvažujme polynóm $p(z) = z^k + d_{k-1}z^{k-1} + \dots + d_0z^0$ s komplexnými koeficientmi $d_0, \dots, d_{k-1}$ a príslušnú sprievodnú maticu A_p .
 - Určte geometrické násobnosti všetkých vlastných čísel matice A_p .
 - Charakterizujte polynómy $p(z)$, pre ktoré je matica A_p diagonalizovateľná.
 - Charakterizujte polynómy $p(z)$, pre ktoré je matica A_p nesingulárna. (Úloha 6.4 zo skrípt.)
 - Charakterizujte všetky súvislé grafy $\mathcal{G}$ s obyčajným spektrom $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ takým, že $\lambda_n = -\lambda_1$. (Úloha 7.5 zo skrípt.)
 - Dajte do vzájomného vzťahu obyčajné a laplaceovské spektrum *regulárnych* grafov. (Úloha 7.7 zo skrípt.)
 - Dokážte, že počet kostier úplného bipartitného grafu $K_{m,n}$ s $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je $m^{n-1}n^{m-1}$. (Úloha 7.9 zo skrípt.)

Nech $\mathcal{G}$ je neorientovaný graf bez slučiek s množinou vrcholov $[n]$. *Kladnou Laplaceovou maticou* (angl. *signless Laplacian matrix*) grafu $\mathcal{G}$ nazveme maticu

$$Q(\mathcal{G}) = D + \text{Adj}(\mathcal{G}),$$

kde $\text{Adj}(\mathcal{G})$ je matica susednosti grafu $\mathcal{G}$ a $D = (d_{i,j})_{n \times n}$ je diagonálna matica taká, že pre $k = 1, \dots, n$ je $d_{k,k} = \deg_{\mathcal{G}}(k)$.

10. Dokážte, že kladná Laplaceova matica grafu $\mathcal{G}$ s množinou vrcholov $[n]$ je vždy kladne semidefinitná a nájdite čo možno najprirodzenejšie definovanú maticu B typu $m \times n$ takú, že $Q(\mathcal{G}) = B^T B$. (Úloha 7.10 zo skrípt.)
11. Vlastné čísla kladne semidefinitnej matice $Q(\mathcal{G})$ sú vždy nezáporné. Nájdite triedu všetkých grafov $\mathcal{G}$, pre ktoré je nula vlastným číslom matice $Q(\mathcal{G})$. (Úloha 7.11 zo skrípt.)
12. Dokážte, že Laplaceova a kladná Laplaceova matica *bipartitného grafu* majú rovnaké charakteristické polynómy (a teda aj rovnaké spektrá). (Úloha 7.12 zo skrípt.)