Úlohy k cvičeniu č. 1

Princíp matematickej indukcie: nech $X \subseteq \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel taká, že:

(i) $0 \in X$.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak $n \in X$, tak $n+1 \in X$.

Potom $X = \mathbb{N}$.

V prípade, že máme danú postupnosť výrokov $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$, môžeme za X zvoliť množinu tých $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je výrok $V(n)$ pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:

Veta 1. *Nech $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(i) *Výrok $V(0)$ je pravdivý.*

(ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n+1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdenie (i) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (ii) sa nazýva *indukčný krok.*

Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axióm*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny* $\mathbb{N}$ (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.

1. Dokážte:

   a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

3. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Dokážte:

   a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

   b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ platí
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

   c) Nájdite čo možno najjednoduchší spôsob, ako sa v tvrdení z predchádzajúcej podúlohy zbaviť predpokladu $q \neq 1$.

5. Dokážte:

   a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

   b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

6. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujeme *n-té harmonické číslo* ako
   $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

   (N. B.: Dôsledkom je, že postupnosť harmonických čísel diverguje.)

Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla n väčšie alebo rovné ako nejaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety 1:

Veta 2. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n+1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

7. Dokážte vetu 2 (s použitím princípu matematickej indukcie).

8. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ platí $n^2 \geq 2n$.

9. Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Položme
   $$A + B = \{a + b \mid a \in A;\ b \in B\}.$$

   Dokážte, že potom
   $$|A + B| \geq m + n - 1$$

   a ukážte, že tento dolný odhad je tesný[1] pre všetky $m, n \geq 1$.

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku $V(n+1)$ len na základe predpokladu platnosti výroku $V(n)$ – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom.* Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov $V(j)$ pre $j < n$; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku $V(n)$.

Ľahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku $V(n_0)$ a následne dokážeme indukčný krok pre $n = n_0, \ldots, k-1$, ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky $V(n_0), V(n_0+1), \ldots, V(k)$. Pri dôkaze indukčného kroku pre $n = k$ sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov $V(j)$ pre $n_0 \leq j < k$: ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

[1] K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A + B| = n + m - 1$.

Veta 3. *Nech* $n_0 \in \mathbb{N}$ *a* $(V(n))_{n \geq n_0}$ *je postupnosť výrokov taká, že*

(i) *Výrok* $V(n_0)$ *je pravdivý.*

(ii) *Pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *také, že* $n \geq n_0$ *platí: ak sú pravdivé výroky* $V(n_0), V(n_0+1), \ldots, V(n)$*, tak je pravdivý aj výrok* $V(n+1)$*.*

Potom je výrok $V(n)$ *pravdivý pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *také, že* $n \geq n_0$*.*

Veta 3 sa niekedy nazýva *princípom úplnej matematickej indukcie*, prípadne *princípom silnej matematickej indukcie.*

V tejto súvislosti treba upozorniť na skutočnosť, že predovšetkým vo filozofickej logike sa niekedy používa pojem úplnej indukcie vo vzťahu k tzv. neúplnej indukcii; tá v matematike nemá miesto, no často sa používa v empirických vedách (z 1000 neúspešných pokusov o prerazenie hlavy múrom napríklad môže empirická veda trochu neuvážene usúdiť, že to nie je možné; o matematický dôkaz ale nejde). Podľa tejto terminológie je matematická indukcia *vždy* úplná, hoci nejde o úplnú matematickú indukciu v zmysle zavedenom vyššie.

10. Dokážte vetu 3 (s použitím vety 2).
    Nápoveda: nech $V'(n) := V(n_0) \wedge V(n_0+1) \wedge \ldots \wedge V(n)$, potom…

11. Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ možno rozložiť na súčin prvočiniteľov.

12. Pod *dichotómiou* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž hrán medzi štvorčekmi) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ štvorčekoch možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n-1$ dichotómií.

Pri použití úplnej matematickej indukcie je často nutné dokázať „viacero báz indukcie“. Ide najmä o tie situácie, kde sa v dôkaze indukčného kroku odvolávame na platnosť aspoň jedného výroku $V(n-j)$ pre $j \geq 1$. Takýto dôkaz indukčného kroku je vo všeobecnosti neprípustný pre n také, že $n - j < n_0$ (kde n_0 má význam z vety 3), pretože o $V(n-j)$ v takom prípade vo všeobecnosti nevieme vôbec nič (dokonca ani to, či takýto výrok dáva zmysel). Preto treba „malé hodnoty“ čísla n ošetriť osobitne. Čitateľ by iste dokázal upraviť vetu 3 tak, aby brala na zreteľ aj tento prípad.

13. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 3a + 5b$.

14. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 4a + 5b$.

15. Dokážte tvrdenia z predchádzajúcich dvoch úloh bez použitia úplnej matematickej indukcie.

Fibonacciho čísla sú definované nasledujúcim rekurentným predpisom:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

V nasledujúcom budeme používať označenia

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Číslo φ sa zvykne nazývať *zlatý rez.*

16. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n \right).$$

17. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ platí

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

18. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

19. Dokážte:

 a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

 b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

20. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

21. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

„Veta“ 4. *Pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí $a = b$.*

„Dôkaz“. Matematickou indukciou vzhľadom na $M := \max\{a, b\}$.

1° Pre $M = 0$ nutne $a = b = 0$ a tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $M = k$. Ukážeme, že platí aj pre $M = k + 1$.
Nech $a, b \in \mathbb{N}$ sú čísla také, že $\max\{a, b\} = k + 1$. Potom $\max\{a - 1, b - 1\} = k$. Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že platí $a - 1 = b - 1$, a teda aj $a = b$. □

22. Nájdite chybu v „dôkaze“ „vety“ 4.

Hovoríme, že lineárne usporiadaná množina $(X, <)$ je *dobre usporiadaná*, ak každá neprázdna množina $A \subseteq X$ má v usporiadaní $<$ najmenší prvok. Množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná – ide o jednu z jej kľúčových vlastností, ktorá je ekvivalentná princípu matematickej indukcie (a teda môže byť považovaná za jednu z axióm množiny $\mathbb{N}$ práve namiesto princípu matematickej indukcie).

V prípade, že sa pomocou matematickej indukcie dá dokázať pravdivosť nejakého výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, je možné rovnaké tvrdenie dokázať aj s použitím princípu dobrého usporiadania. Stačí za účelom sporu predpokladať, že množina $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \ \wedge \ \neg V(n)\}$ je neprázdna. V takom prípade má táto množina najmenší prvok m. Zostáva dokázať, že:

(*i*) Nemôže platiť $m = n_0$ – to je zrejme ekvivalentné dôkazu pravdivosti výroku $V(n_0)$, a teda báze matematickej indukcie.

(*ii*) Ak $m > n_0$, tak nutne $m - 1 \in A$, čo je spor s minimalitou m. Tu sa v skutočnosti dokazuje iba implikácia „ak $\neg V(m)$, tak $\neg V(m-1)$“, čo je obmena implikácie „ak $V(m-1)$, tak $V(m)$“. Keďže $m > n_0$, môžeme zaviesť premennú $n := m - 1$, čím konečne dostávame implikáciu „ak $V(n)$, tak $V(n+1)$“ z indukčného kroku.

Na dôkaz s využitím vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ sa teda možno dívať ako na „matematickú indukciu sporom“.

23. Z princípu matematickej indukcie odvoďte vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$.
24. Z vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ odvoďte princíp matematickej indukcie.
25. Dokážte tvrdenia z úloh 1, 8 a 13 pomocou vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$.