

Úlohy k cvičeniu č. 3

Veta 1 (Pravidlo súčtu). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a X_1, X_2, \dots, X_n sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^n X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| = \sum_{k=1}^n |X_k|.$$

1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?
2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu). *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a X_1, X_2, \dots, X_n sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^n |X_k|.$$

3. Háďžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?
4. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?
5. Medveď sa ráno zdržuje pri salaši S_1 , na obed pri salaši S_2 a večer pri salaši S_3 . Na salaši S_1 majú tridsať oviec, na salaši S_2 sto oviec a na salaši S_3 päťdesiat oviec (všetky ovce sú rozlíšiteľné). Medveď si chce dať na raňajky, obed aj večeru práve jednu ovcu. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii?
6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.
7. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.
8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.
9. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b ?
10. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré buď začínajú na a , alebo súčasne nezačínajú na a a končia na c ?
11. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b ?
12. Nájdite počet (nenulových prirodzených) deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.
13. Nájdite počet (nenulových prirodzených) deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.
14. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne.
15. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Definícia 1. Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = m$. Variáciou s opakovaním n -tej triedy z m prvkov množiny B nazveme ľubovoľné zobrazenie $f: A \rightarrow B$, čiže prvok množiny B^A .

Veta 3 (Pravidlo mocnenia). Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = n$, $|B| = m$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = m^n$.

V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnyimi množinami.

Dôsledok 1. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = m$. Nech $n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním n -tej triedy z m prvkov množiny B je m^n .

16. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) ovcí. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).
17. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) ovcí. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).
18. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?
19. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b ?
20. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré končia trojicou rovnakých písmen?
21. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c ?
22. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel.
23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých párných n -ciferných čísel.
24. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel deliteľných číslom 4.
25. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel deliteľných číslom 5.

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f: A \rightarrow \{0, 1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\text{supp}(f) = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}.$$

Ľahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \text{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0, 1\}^A$. Z pravidla mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 2. Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A .

26. Koľkými spôsobmi môže vlčia svorka zjesť bližšie neurčený počet z celkového počtu 100 (rozlíšiteľných) ovcí?

Veta 4 (Pravidlo rozdielu). *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*

$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

27. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré nekončia trojicou rovnakých písmen?
28. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c ?
29. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.
30. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.
31. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.