# Úlohy k cvičeniu č. 4

**Definícia 1** (Variácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a $B$ je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny $B^A$.

**Veta 1.** *Nech $B$ je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$ je $n^k$.*

**Definícia 2** (Variácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a $B$ je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$.

**Veta 2.** *Nech $B$ je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$ je*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

1. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny $X$?
2. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny $X$, ktoré majú všetky prvky rôzne?
3. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny $X$, ktoré začínajú párnym číslom?
4. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny $X$, ktoré začínajú nepárnym číslom?
5. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny $X$, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?
6. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel?

**Definícia 3** (Permutácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, n\}$ a $B$ je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Permutáciou množiny $B$* nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže variáciu bez opakovania $n$-tej triedy z $n$-prvkov množiny $B$.

**Veta 3.** *Nech $B$ je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny $B$ je*

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

7. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?
8. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 100-prvkových postupností prvkov z množiny $X$, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

**Definícia 4** (Kombinácie bez opakovania)**.** Nech $B$ je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. *Kombináciou bez opakovania $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$* nazveme ľubovoľnú $k$-prvkovú podmnožinu množiny $B$.

Množina všetkých $k$-prvkových podmnožín konečnej množiny $B$ – čiže množina všetkých kombinácií $k$-tej triedy z $B$ – sa zvykne označovať ako $\mathscr{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

**Veta 4.** *Nech $B$ je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$ je*

$$|\mathscr{P}_k(B)| = \left|\binom{B}{k}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

*Ak navyše $k \leq n$, tak*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

9. V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

10. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdiele medzi riadnym a dodatkovým číslom?

11. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

12. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena $a$?

13. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena $a$?

14. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena $a$?

15. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

16. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

17. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu

$$(c, n) \in \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\},$$

kde $c$ nazývame *farbou karty* a $n$ nazývame *číslom karty*. Množina čísel je lineárne usporiadaná usporiadaním $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet.

18. Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

19. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

20. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

21. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom $x$ a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

22. Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

23. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

24. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?

25. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom $x$, dve karty s číslom $y$ a jednu kartu s číslom $z$, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?