Úlohy k cvičeniu č. 6

Veta 1 (Binomická veta)**.** *Pre všetky* $x \in \mathbb{R}$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

1. Kombinatoricky interpretujte binomickú vetu pre $x \in \mathbb{N}$.
2. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{k}.$$
3. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{k}.$$
4. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 3^k \binom{n}{k}.$$

Aplikovaním vhodnej operácie (ako napríklad derivácia) na obidve strany rovnosti z vety 1 možno odvodiť ďalšie užitočné identity, ktoré sa dajú využiť aj na výpočet niektorých kombinatorických súm. Viaceré z nasledujúcich úloh sú cielené na použitie tejto metódy.

5. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \binom{n}{k}.$$
6. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (3k+1) \binom{n}{k}.$$
7. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^k \binom{n}{k}.$$
8. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k(k-1) \binom{n}{k}.$$
9. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \binom{n}{k}.$$
10. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$
11. Vypočítajte
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

12. Vypočítajte

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}.$$

13. Vypočítajte

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{4k}.$$

14. Vypočítajte

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{4k}.$$

15. Vypočítajte

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{4k}.$$

> Viaceré kombinatorické identity možno dokázať ich transformáciou na ľahšie dokázateľné identity medzi polynómami. To znamená nájsť k danej identite $L(s) = R(s)$ polynómy $p_L(x)$ a $p_R(x)$ také, že koeficient pri x^s je v $p_L(x)$ rovný $L(s)$ a v $p_R(x)$ je rovný $R(s)$. Následne stačí dokázať, že pre všetky x platí $p_L(x) = p_R(x)$ – rovnosť koeficientov je priamym dôsledkom. Pri hľadaní vhodných polynómov $p_L(x)$ a $p_R(x)$ je užitočným nástrojom práve binomická veta. Viď tiež poznámku pod vetou 2.15 zo skrípt.
>
> Aj keď sa použitie tejto metódy obmedzuje iba na relatívne neveľkú triedu identít, ide o základ oveľa všeobecnejšej metódy tzv. *generujúcich funkcií* (niekde tiež *vytvárajúcich funkcií*), v ktorej sa namiesto polynómov používajú „nekonečné polynómy“, čiže *formálne mocninové rady*. To už však presahuje rámec tohto predmetu.

16. Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{n+1}{s+1} = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1}.$$

17. Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{3n}{s} = \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N}\\ i+j+k=s}} \binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}.$$