# Úlohy k cvičeniu č. 13

**Definícia 1.** Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. *Matica susednosti* grafu $G$ je matica $A(G) = (a_{i,j})_{n\times n}$ taká, že pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$a_{i,j} = |\{e \in E \mid I(e) = \{v_i, v_j\}\}|.$$

1. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. Dokážte, že matica $A(G)$ je nutne symetrická.
2. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$, nech $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre maticu $(A(G))^k$ platí $(A(G))^k = (a_{i,j}^{(k)})_{n\times n}$, kde pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ je $a_{i,j}^{(k)}$ rovné počtu všetkých $v_i$-$v_j$-sledov dĺžky $k$ v grafe $G$.

**Definícia 2.** Graf $G = (V, E, I)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

**Veta 1.** *Nech $G = (V, E, I)$ je graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *$G$ je strom.*

(*ii*) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu $G$ sú spojené práve jednou cestou.*

(*iii*) *Graf $G$ je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu $G$ nesúvislý graf.*

(*iv*) *Graf $G$ je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica.*

(*v*) *$G$ je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n - 1$ hranami.*

**Definícia 3.** Nech $T = (V, E, I)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

3. Dokážte vetu 1.
4. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.
5. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$. Nech $v$ je list stromu $T$ a $u$ je susedný vrchol listu $v$. Dokážte, že $\mathrm{ex}_T(u) = \mathrm{ex}_T(v) - 1$.
6. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$ a nech $v \in \mathrm{cent}(T)$. Dokážte, že $\deg_T(v) \geq 2$.
7. Nájdite všetky regulárne stromy.

**Definícia 4.** Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Kostra grafu* $G$ je ľubovoľný strom $T$, ktorý je faktorom grafu $G$.

8. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $T$ je jeho kostra. Dokážte, že $\mathrm{diam}(T) \geq \mathrm{diam}(G)$.
9. Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru $T$ takú, že $\mathrm{diam}(T) = \mathrm{diam}(G)$.

**Definícia 5.** Graf $G = (V, E, I)$ je *bipartitný*, ak existujú neprázdne množiny $V_1$ a $V_2$ tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a pre všetky $e \in E$ platí $I(e) \cap V_1 \neq \emptyset$ a $I(e) \cap V_2 \neq \emptyset$.

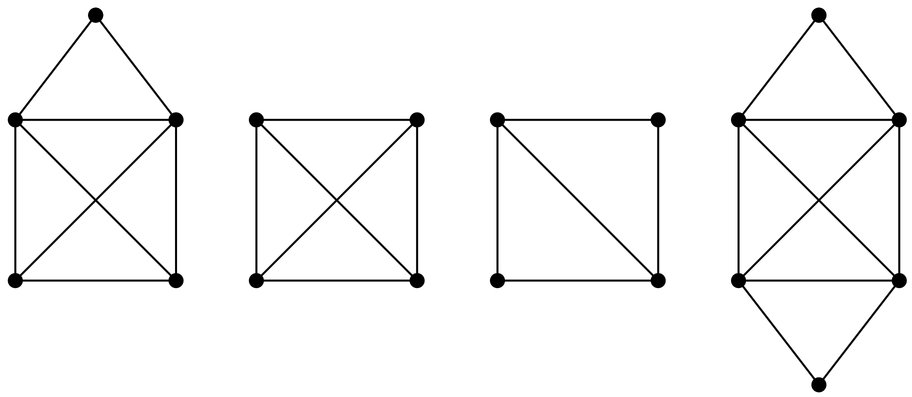
10. Dokážte, že každý strom je bipartitný graf.
11. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
12. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

**Definícia 6.** Súvislý graf $G = (V, E, I)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

**Veta 2.** *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. Graf $G$ je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

**Veta 3.** *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. V grafe $G$ existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe $G$ existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

13. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



14. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

15. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf $K_n$ je eulerovský.