Riešenia úloh z prvej písomky

Peter Kostolányi

11. apríla 2016

Úloha 1. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali.

Riešenie. Dvaja strelci, ktorí sú v rovnakom stĺpci, sa zjavne nemôžu ohrozovať. Na šachovnici je osem stĺpcov, pričom rozostavujeme deväť strelcov. Z Dirichletovho princípu teda vyplýva, že aspoň dvaja z týchto deviatich strelcov budú v rovnakom stĺpci (zobrazenie priraďujúce strelcom ich stĺpec nemôže byť injektívne), a teda sa nebudú ohrozovať. □

Úloha 2. *Kombinatoricky* (pomocou bijekcií) dokážte platnosť identity

$$\binom{5n}{2} = 5\binom{n}{2} + \binom{5}{2}n^2$$

pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$.

Neformálne riešenie (postačujúce). Ľavá strana udáva počet všetkých dvojprvkových podmnožín množiny $\{1, \ldots, 5n\}$. Na výber takejto dvojprvkovej podmnožiny sú zjavne dve možnosti:

a) Obidva prvky z podmnožiny patria do $\{kn+1, \ldots, kn+n\}$ pre nejaké $k \in \{0, \ldots, 4\}$. Počet takýchto výberov je teda (podľa pravidla súčinu) daný počtom všetkých prípustných hodnôt k vynásobeným počtom všetkých dvojprvkových podmnožín množiny $\{kn+1, \ldots, kn+n\}$ – čiže $5\binom{n}{2}$.

b) Jeden z prvkov podmnožiny patrí do $\{in+1, \ldots, in+n\}$ a druhý do $\{jn+1, \ldots, jn+n\}$, kde $i, j \in \{0, \ldots, 4\}$ a $i < j$. Množina $\{i, j\}$ je teda ľubovoľná dvojprvková podmnožina množiny $\{0, \ldots, 4\}$. Počet možných výberov je preto v tomto prípade daný ako súčin počtu takýchto podmnožín, počtu možných výberov prvého prvku z $\{in+1, \ldots, in+n\}$ a počtu možných výberov druhého prvku z $\{jn+1, \ldots, jn+n\}$ – čiže $\binom{5}{2}n^2$.

Keďže je zrejmé, že pre každý z výberov dvojprvkovej podmnožiny $\{1, \ldots, 5n\}$ platí buď a), alebo b) (nie však obe súčasne), ľavá strana identity sa podľa pravidla súčtu rovná pravej strane. □

Formálnejšie riešenie. Ľavá strana udáva počet prvkov množiny $\mathscr{P}_2(\{1, \ldots, 5n\})$. Pravá strana reprezentuje počet prvkov množiny $\{1, \ldots, 5\} \times \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, n\}) \cup \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, 5\}) \times \{1, \ldots, n\}^2$. Na dôkaz identity teda stačí nájsť bijekciu

$$f\colon \{1, \ldots, 5\} \times \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, n\}) \cup \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, 5\}) \times \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, 5n\}).$$

Tú možno skonštruovať napríklad takto:

$$\forall i \in \{1, \ldots, 5\}\ \forall \{a, b\} \in \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, n\}) : f(i, \{a, b\}) = \{(i-1)n + a, (i-1)n + b\},$$
$$\forall \{i, j\} \in \mathscr{P}_2(\{1, \ldots, 5\}), i < j\ \forall a, b \in \{1, \ldots, n\} : f(\{i, j\}, a, b) = \{(i-1)n + a, (j-1)n + b\}.$$

Ľahko možno overiť, že takéto zobrazenie je skutočne bijekcia. □

Úloha 3. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Zistite, koľko je všetkých matíc A typu $n \times n$ nad $\mathbb{Z}_2$, ktoré:

a) Sú symetrické (teda platí $A^T = T$).

b) Obsahujú aspoň jeden nulový riadok.

c) Obsahujú rovnako veľa jednotiek a núl.

d) Obsahujú v každom riadku práve jednu jednotku.

Svoje tvrdenia stručne zdôvodnite.

Riešenie.

a) $2^{n(n+1)/2}$ – symetrické matice sú jednoznačne určené prvkami na hlavnej diagonále a nad ňou, čiže prvkami $a_{i,j}$, kde $1 \leq i \leq j \leq n$. Takýchto dvojíc (i,j) je zjavne $n(n+1)/2$ a každý prvok $a_{i,j}$ môže byť buď 0, alebo 1. Matice zo zadania sú teda v bijekcii s variáciami s opakovaním $n(n+1)/2$-tej triedy z dvoch prvkov množiny $\mathbb{Z}_2$, ktorých je presne $2^{n(n+1)/2}$.

b) $2^{n^2} - (2^n - 1)^n$ – počet takýchto matíc je zjavne daný rozdielom počtu všetkých matíc typu $n \times n$ nad $\mathbb{Z}_2$ (tých je očividne 2^{n^2}) a počtu takých matíc, ktoré neobsahujú žiaden nulový riadok. Matice bez nulových riadkov možno pritom reprezentovať ako n-prvkové postupnosti nenulových riadkov. Počet všetkých nenulových riadkov je $2^n - 1$ a počet ich n-prvkových postupností je preto $(2^n - 1)^n$.

c) Pre nepárne n neexistuje žiadna takáto matica. Pre párne n je ich počet daný ako $\binom{n^2}{n^2/2}$ – každá takáto matica je jednoznačne určená výberom $n^2/2$ pozícií, na ktorých je jednotka.

d) n^n – takéto matice sú v bijekcii s n-prvkovými postupnosťami riadkov obsahujúcich práve jednu jednotku. Existuje pritom n riadkov obsahujúcich práve jednu jednotku, a teda n^n ich n-prvkových postupností. $\square$