Riešenia prvej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

16. marca 2016

Úloha 1. Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n + 2$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú súčet $2n+3$.

Riešenie. Uvažujme rozklad množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ na $n + 1$ disjunktných podmnožín

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1\}, \\ S_2 &= \{2\}, \\ S_i &= \{i, 2n - i + 3\} \quad \text{pre } i = 3, \ldots, n + 1. \end{aligned}$$

Ľahko nahliadnuť, že skutočne ide o rozklad množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ (množiny $S_1, \ldots, S_{n+1}$ sú po dvoch disjunktné a ich zjednotením je $\{1, \ldots, 2n\}$).

Vezmime teraz ľubovoľných $n+2$ rôznych čísel $a_1, \ldots, a_{n+2}$ z množiny $\{1, \ldots, n+2\}$ a uvažujme zobrazenie $f\colon \{1, \ldots, n + 2\} \to \{1, \ldots, n + 1\}$ také, že pre $i \in \{1, \ldots, n + 2\}$ a $k \in \{1, \ldots, n + 1\}$ platí $f(i) = k$ práve vtedy, keď $a_i \in S_k$ (čiže keď i-te z čísel patrí do S_k).

Podľa Dirichletovho princípu zobrazenie f nie je injektívne – existuje teda $k \in \{1, \ldots, n + 1\}$ tak, že $f(i) = f(j) = k$ pre dvojicu rôznych čísel $i, j \in \{1, \ldots, n + 2\}$.

Zjavne $k \geq 3$; v opačnom prípade by totiž muselo platiť buď $a_i = a_j = 1$, alebo $a_i = a_j = 2$ a čísla a_i, a_j by neboli rôzne (spor). Existuje teda množina $S_k = \{k, 2n-k+3\}$ s $k \in \{3, \ldots, n+1\}$ taká, že obidve čísla a_i a a_j patria do S_k. Z rôznosti týchto čísel potom vyplýva, že jedno z nich sa rovná k a to druhé $2n - k + 3$. Ich súčet je teda $2n + 3$, čo bolo treba dokázať. $\square$

Úloha 2. V mešci sú mince o hodnotách 50 centov, 1 euro a 2 eurá (nekonečne veľa kusov z každej). Po zatrasení mešcom sa náhodne vysypú štyri mince. Koľko najmenej zatrasení mešcom je nutných na to, aby istotne aspoň dvakrát vypadla trojica mincí s rovnakým súčtom?

Riešenie. Dokážeme, že je nutných *najmenej* 6 *zatrasení.*

Výstupy zatrasenia mešcom budeme kódovať ako trojice $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, kde a je počet vytrasených 50-centových mincí, b je počet vytrasených 1-eurových mincí a c je počet vytrasených 2-eurových mincí. Pre každú trojicu zjavne musí platiť $a + b + c = 4$ – ľahko potom vidieť, že existuje presne 15 takýchto trojíc:

$$\begin{aligned} T_1 &= (4, 0, 0), & T_2 &= (3, 1, 0), & T_3 &= (3, 0, 1), \\ T_4 &= (2, 2, 0), & T_5 &= (2, 1, 1), & T_6 &= (2, 0, 2), \\ T_7 &= (1, 3, 0), & T_8 &= (1, 2, 1), & T_9 &= (1, 1, 2), \\ T_{10} &= (1, 0, 3), & T_{11} &= (0, 4, 0), & T_{12} &= (0, 3, 1), \\ T_{13} &= (0, 2, 2), & T_{14} &= (0, 1, 3), & T_{15} &= (0, 0, 4). \end{aligned}$$

Pre $i = 1, \ldots, 15$ teraz označme symbolom S_i množinu súčtov trojíc mincí, ktoré vypadnú v rámci štvorice mincí kódovaných trojicou T_i. Zjavne potom

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1.5\}, & S_2 &= \{1.5, 2\}, & S_3 &= \{1.5, 3\}, \\ S_4 &= \{2, 2.5\}, & S_5 &= \{2, 3, 3.5\}, & S_6 &= \{3, 4.5\}, \\ S_7 &= \{2.5, 3\}, & S_8 &= \{2.5, 3.5, 4\}, & S_9 &= \{3.5, 4.5, 5\}, \\ S_{10} &= \{4.5, 6\}, & S_{11} &= \{3\}, & S_{12} &= \{3, 4\}, \\ S_{13} &= \{4, 5\}, & S_{14} &= \{5, 6\}, & S_{15} &= \{6\}. \end{aligned}$$

Teraz je potrebné dokázať dve skutočnosti:

a) *Päť zatrasení ešte nestačí.* Skutočne, ak napríklad postupne vypadnú štvorice mincí kódované trojicami T_1, T_4, T_{11}, T_{13} a T_{15}, sú zodpovedajúce množiny S_1, S_4, S_{11}, S_{13} a S_{15} disjunktné. Po žiadnych dvoch z týchto piatich zatrasení teda nevypadne trojica mincí s rovnakým súčtom.

b) *Šesť zatrasení už stačí.* Tu využijeme Dirichletov princíp – trojice $T_1, \ldots, T_{15}$ rozdelíme do piatich skupín $K_1, \ldots, K_5$ tak, aby pre ľubovoľnú dvojicu trojíc T_i, T_j z rovnakej skupiny platilo, že množiny S_i a S_j majú neprázdny prienik. Akonáhle teda vypadnú aspoň dve štvorice mincí kódované trojicami z rovnakej skupiny, nutne možno z oboch týchto štvoríc mincí vybrať trojice mincí s rovnakým súčtom. To je ale pri šiestich zatraseniach zaručené vďaka Dirichletovho princípu, keďže skupín je len päť.

   Zostáva teda nájsť vhodné rozdelenie do skupín. Tým môže byť napríklad

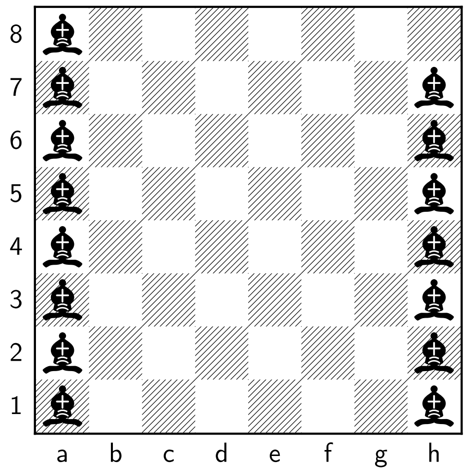
$$\begin{aligned} K_1 &= \{T_1, T_2, T_3\}, & K_2 &= \{T_4, T_5, T_7\}, \\ K_3 &= \{T_6, T_{11}, T_{12}\}, & K_4 &= \{T_8, T_9, T_{13}\}, \\ K_5 &= \{T_{10}, T_{14}, T_{15}\}. \end{aligned}$$

   Ľahko vidieť, že toto rozdelenie má požadovanú vlastnosť. □

Úloha 3. *Špecializovaný strelec-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou `a1-h8`. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore“ alebo „doľava dole“. Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Riešenie. Dokážeme, že na šachovnicu možno umiestniť *najviac 15 špecializovaných strelcov.*

a) *15 vzájomne sa neohrozujúcich strelcov-expertov ešte na šachovnicu umiestniť možno* – jedno z prípustných rozostavení je na obrázku 1.



Obr. 1: Jedno z prípustných rozostavení 15 špecializovaných strelcov-expertov.

b) *16 vzájomne sa neohrozujúcich špecializovaných strelcov už na šachovnicu umiestniť nemožno.* Na šachovnici je totiž 15 diagonál rovnobežných s `a1-h8`. Dvaja strelci-experti, ktorí sú na rovnakej diagonále rovnobežnej s `a1-h8` sa nutne ohrozujú. Z Dirichletovho princípu teraz vyplýva, že pri ľubovoľnom rozostavení 16 špecializovaných strelcov na šachovnici sú aspoň dvaja na rovnakej diagonále rovnobežnej s `a1-h8` (strelcov je 16, diagonál 15). Preto sa aspoň dvaja musia nutne ohrozovať. □

Úloha 4. *Prehnane iniciatívny strelec* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Riešenie. Dokážeme, že na šachovnicu možno umiestniť *najviac dvoch vzájomne sa neohrozujúcich prehnane iniciatívnych strelcov.*

a) *Dvoch vzájomne sa neohrozujúcich prehnane iniciatívnych strelcov ešte na šachovnicu umiestniť možno.* Ľahko totiž vidieť, že prehnane iniciatívny strelec nikdy nemôže zmeniť farbu políčka, na ktorom stojí. Ak teda umiestnime jedného zo strelcov na biele políčko a druhého na čierne, nebudú sa vzájomne ohrozovať.

b) *Troch takýchto strelcov už na šachovnicu umiestniť nemožno.* Ľahko totiž vidieť, že prehnane iniciatívny strelec sa z ľubovoľnej pozície na šachovnici vie v jednom kroku dostať na *ľubovoľné* políčko rovnakej farby ako to pôvodné. Dvaja prehnane iniciatívni strelci na políčkach rovnakej farby sa teda nutne ohrozujú. Z Dirichletovho princípu ale očividne vyplýva, že z ľubovoľného rozostavenia troch prehnane iniciatívnych strelcov na šachovnici možno vybrať dvoch, ktorí sú na políčku rovnakej farby, a teda sa ohrozujú. □