Riešenia druhej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

30. marca 2016

Úloha 1. Nech $A = \{1, \dots, 100\}$ a $B = \{1, \dots, 200\}$. Nájdite počet všetkých zobrazení $f\colon A \to B$ takých, že:

a) Zobrazenie f je injektívne.

b) Platí $f(1) = 1$.

c) Pre všetky $k \in \{1, \dots, 20\}$ platí $f(k) \geq 100$.

d) Zobrazenie f je injektívne a pre všetky $k \in \{1, \dots, 20\}$ platí $f(k) \geq 100$.

e) Pre všetky $k \in \{1, \dots, 20\}$ platí $f(k) \geq 50$ a pre všetky $k \in \{21, \dots, 40\}$ platí $f(k) \leq 30$.

f) Existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) = 1$.

g) Existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) \neq 1$.

h) Zobrazenie f je injektívne a existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) \geq 100$.

i) Zobrazenie f zachováva paritu – čiže $a \equiv f(a) \pmod 2$ pre všetky $a \in A$.

j) Zobrazenie f je rýdzo monotónne (buď pre všetky $i < j$ platí $f(i) < f(j)$ alebo pre všetky $i < j$ platí $f(i) > f(j)$).

Svoje tvrdenia stručne zdôvodnite.

Riešenie.

a) $200^{\underline{100}}$ – ide o variácie bez opakovania stej triedy z 200 prvkov množiny B.

b) 200^{99} – zjavne existuje bijekcia medzi zobrazeniami zo zadania a všetkými zobrazeniami $g\colon \{2, \dots, 100\} \to B$. Tých je podľa pravidla mocnenia práve 200^{99}.

c) $101^{20} \cdot 200^{80}$ – existuje bijekcia medzi zobrazeniami zo zadania a dvojicami zobrazení (g, h), kde $g\colon \{1, \dots 20\} \to \{100, \dots, 200\}$ a $h\colon \{21, \dots, 100\} \to B$. Všetkých prípustných zobrazení g je 101^{20} a všetkých prípustných zobrazení h je 200^{80}. Počet všetkých prípustných dvojíc (g, h) je potom podľa pravidla súčinu práve $101^{20} \cdot 200^{80}$.

d) $101^{\underline{20}} \cdot 180^{\underline{80}}$ – zobrazenia zo zadania sú v bijekcii s dvojicami injektívnych zobrazení (g, h), kde $g\colon \{1, \dots 20\} \to \{100, \dots, 200\}$ a $h\colon \{21, \dots, 100\} \to B - g(\{1, \dots, 20\})$. Všetkých prípustných zobrazení g je $101^{\underline{20}}$. Keďže $g(\{1, \dots, 20\})$ je 20-prvková množina, existuje bijekcia medzi prípustnými zobrazeniami h a všetkými injektívnymi zobrazeniami z $\{21, \dots, 100\}$ do $\{1, \dots, 180\}$. Tých je $180^{\underline{80}}$. Výsledok potom dostávame použitím pravidla súčinu.

e) $151^{20} \cdot 30^{20} \cdot 200^{60}$ – zdôvodnenie je podobné ako v podúlohe c).

f) $100 \cdot 199^{99}$ – zjavne existuje bijekcia medzi zobrazeniami zo zadania a dvojicami (a, g), kde $a \in A$ je jediný prvok množiny A taký, že $f(a) = 1$ a $g\colon A - \{a\} \to \{2, \dots, 200\}$ je ľubovoľné zobrazenie. Keďže je $A - \{a\}$ 99-prvková množina, prípustné zobrazenia g sú v bijekcii so zobrazeniami $h\colon \{1, \dots, 99\} \to \{2, \dots, 200\}$.

g) $100 \cdot 199$ – zobrazenia zo zadania sú v bijekcii s dvojicami $(a, b) \in A \times \{2, \dots, 200\}$. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ takému, že pre jediné $a \in A$ s $f(a) \neq 1$ platí $f(a) = b$, zodpovedá v tejto bijekcii prvok (a, b).

h) $100 \cdot 101 \cdot 99!$ – zobrazenia zo zadania sú očividne v bijekcii s trojicami (a, b, g), kde $a \in A$, $b \in \{100, \dots, 200\}$ a $g\colon A - \{a\} \to \{1, \dots, 99\}$ je injektívne zobrazenie.

i) $100^{50} \cdot 100^{50}$ – zobrazenia zo zadania sú v bijekcii s dvojicami (g, h), kde $g\colon \{1, 3, \ldots, 99\} \to \{1, 3, \ldots, 199\}$ a $h\colon \{2, 4, \ldots, 100\} \to \{2, 4, \ldots, 200\}$ sú ľubovoľné zobrazenia.

j) $2 \cdot \binom{200}{100}$ – zobrazenia zo zadania sú v bijekcii s dvojicami (b, X), kde $b \in \{-1, 1\}$ je -1 pre klesajúce zobrazenia a 1 pre rastúce zobrazenia a X je ľubovoľná 100-prvková podmnožina B zodpovedajúca oboru hodnôt. $\square$