

Riešenia štvrtej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

27. apríla 2016

Úloha 1. Nájdite počet všetkých rozostavení štandardnej sady 32 figúrok na štandardnú šachovnicu takých, že:

- Všetci strelci sú na políčkach rovnakej farby.
- Žiadne dve veže nie sú v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci.
- Všetci čierni pešiáci sú v treťom riadku.
- Dámy sú v rovnakom riadku a medzi nimi je biely kráľ.

Obmedzenia dané šachovými pravidlami neberte do úvahy. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

Riešenie.

- Farbu políčok pre strelcov možno vybrať dvoma spôsobmi. Políčok tejto farby je 32 – z nich treba vybrať štyri políčka pre strelcov (kombinácie bez opakovania) a následne priradiť jednotlivých strelcov na dané štyri políčka (permutácie s opakovaním). Zo zvyšných 60 políčok potom zostáva vybrať 28 pre zvyšné figúrky (kombinácie bez opakovania) a následne priradiť figúrky na jednotlivé políčka (permutácie s opakovaním). Výsledný počet rozostavení teda je

$$2 \cdot \binom{32}{4} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \binom{60}{28} \cdot \frac{28!}{8!8!2!2!2!2!}$$

- Riadky pre veže možno vybrať ako ľubovoľnú štvorprvkovú podmnožinu osemprvkovej množiny – ide teda o kombinácie bez opakovania. Následne treba každému z vybraných riadkov priradiť stĺpec, v ktorom bude veža umiestnená. Tento stĺpec musí byť pre každý riadok iný – ide teda o variácie bez opakovania. Nakoniec je nutné priradiť jednotlivé veže na vybrané štyri políčka (permutácie s opakovaním), vybrať políčka pre zvyšné figúrky (kombinácie bez opakovania) a priradiť zvyšné figúrky na vybrané políčka (permutácie s opakovaním). Celkový počet rozostavení teda je

$$\binom{8}{4} \cdot 8^4 \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \binom{60}{28} \cdot \frac{28!}{8!8!2!2!2!2!}$$

- Celý tretí riadok musí byť obsadený čiernymi pešákmi. Počet prípustných rozostavení je teda daný počtom všetkých rozostavení zostávajúcich 24 figúrok na zvyšných 56 políčkach. Tých je presne

$$\binom{56}{24} \cdot \frac{24!}{8!2!2!2!2!2!}$$

- Existuje osem riadkov, v ktorých sa môžu obe dámy a biely kráľ nachádzať. V takomto riadku je potrebné vybrať tri políčka, ktoré sú týmito figúrkami obsadené (kombinácie bez opakovania). Pre každú takúto trojicu políčok existujú dve možnosti rozostavenia dám a bielu kráľa: biela dáma môže byť buď na „najľavejšom“ alebo na „najpravejšom“ políčku, biely kráľ je na „strednom“ políčku a čierna dáma je na zostávajúcom políčku. Následne už iba zostáva priradiť zvyšných 29 figúrok na zostávajúcich 61 políčkach. Výsledný počet rozostavení teda je

$$8 \cdot \binom{8}{3} \cdot 2 \cdot \binom{61}{29} \cdot \frac{29!}{8!8!2!2!2!2!2!}$$

□