Riešenia piatej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

18. mája 2016

Úloha 1. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\log^2 n + 3\log n + 4 = O(\log^2 n)$.

b) $\log^2 n + 3\log n + 4 = \Theta(\log^2 n)$.

c) $\log^2 n + 3\log n + 4 = o(\log^2 n)$.

d) $\log^2 n + 3\log n + 4 \sim \log^2 n$.

Riešenie.

a) Ľahko možno overiť platnosť nasledujúcich nerovností:

$$\begin{aligned} \log^2 n &\leq \log^2 n \qquad && \text{pre } n \geq 1, \\ \log n &\leq \log^2 n \qquad && \text{pre } n \geq 1, \\ 1 &\leq \log^2 n \qquad && \text{pre } n \geq 2. \end{aligned}$$

Z toho dostávame

$$\log^2 n + 3\log n + 4 \leq 8\log^2 n \qquad \text{pre } n \geq 2,$$

a teda $\log^2 n + 3\log n + 4 = O(\log^2 n)$.

b) Pre všetky $n \geq 1$ zjavne platí nerovnosť $\log^2 n \leq \log^2 n + 3\log n + 4$, z čoho už priamo dostávame $\log^2 n + 3\log n + 4 = \Omega(\log^2 n)$. Keďže sme už dokázali $\log^2 n + 3\log n + 4 = O(\log^2 n)$, nutne musí platiť aj $\log^2 n + 3\log n + 4 = \Theta(\log^2 n)$.

c) Tvrdenie neplatí, keďže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 n + 3\log n + 4}{\log^2 n} = 1 \neq 0.$$

d) Tvrdenie platí, keďže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 n + 3\log n + 4}{\log^2 n} = 1. \qquad \square$$

Úloha 2. Pre všetky párne $n \geq 6$ nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že každý jednoduchý graf rádu n s $k(n)$ hranami istotne obsahuje aspoň jeden vrchol stupňa aspoň 4.

Dôkaz. Dokážeme, že $k(n) = 3/2n + 1$.

Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný jednoduchý graf rádu n. Vieme, že platí

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Ak teda $|E| > \frac{3}{2}n$, v grafe G musí nutne existovať aspoň jeden vrchol stupňa aspoň 4. Najmenšie $|E|$ spĺňajúce uvedenú nerovnosť je $|E| = 3n/2 + 1$.

Zostáva ukázať, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje graf rádu n s $3n/2$ hranami taký, že všetky jeho vrcholy majú stupeň najviac 3. Tu ale stačí vziať ľubovoľný 3-regulárny graf rádu n. $\square$