

## Úlohy k cvičeniu č. 11

**Definícia 1.** Nech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sú funkcie. Potom píšeme:

- (i)  $f(n) = O(g(n))$ , ak existuje  $c > 0$  a  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pre všetky  $n \geq n_0$  platí  $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ .
- (ii)  $f(n) = \Omega(g(n))$ , ak  $g(n) = O(f(n))$ .
- (iii)  $f(n) = \Theta(g(n))$  alebo  $f(n) \asymp g(n)$ , ak  $f(n) = O(g(n))$  a zároveň  $g(n) = O(f(n))$ .
- (iv)  $f(n) = o(g(n))$ , ak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ .
- (v)  $f(n) = \omega(g(n))$ , ak  $g(n) = o(f(n))$ .
- (vi)  $f(n) \sim g(n)$ , ak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ .

Uvedenú definíciu možno rozšíriť aj na funkcie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – v takom prípade je možné študovať asymptotické vlastnosti funkcií nielen pre  $x \rightarrow \infty$ , ale aj pre  $x \rightarrow a$ , kde  $a$  je ľubovoľný prvok rozšírenej reálnej osi.

Aj keď je horeuvedená definícia sformulovaná pre ľubovoľné  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , zvyčajne budeme pracovať s funkciami, ktoré sú nezáporné pre všetky alebo takmer všetky  $n$ . (Hovoríme, že nejaké tvrdenie platí *pre takmer všetky*  $n \in \mathbb{N}$ , ak platí pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  až na konečný počet výnimiek. Inak povedané, existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že vlastnosť platí pre všetky  $n \geq n_0$ .) V takom prípade možno bod (i) preformulovať aj bez použitia absolútnych hodnôt.

1. Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = O(n^3)$ .
- b)  $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = \Theta(n^3)$ .
- c)  $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = o(n^3)$ .
- d)  $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 \sim n^3$ .

2. Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $n^2 = O(n^3)$ .
- b)  $n^2 = \Theta(n^3)$ .
- c)  $n^2 = o(n^3)$ .
- d)  $n^2 \sim n^3$ .

3. Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $2 \log n = O(\log n)$ .
- b)  $2 \log n = \Theta(\log n)$ .
- c)  $2 \log n = o(\log n)$ .
- d)  $2 \log n \sim \log n$ .

4. Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $2 \log n = O(n)$ .
- b)  $2 \log n = \Theta(n)$ .
- c)  $2 \log n = o(n)$ .
- d)  $2 \log n \sim n$ .

5. Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $2^{n+1} = \Theta(2^n)$ .
- b)  $2^{2n} = \Theta(2^n)$ .

6. Nech  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ak  $n^x = \Theta(n^y)$ , tak  $x = y$ . Dokážte.

7. Dokážte alebo vyvráťte:
- $\log n = O(\sqrt{n})$ .
  - $\log n = \Theta(\sqrt{n})$ .
  - $\log n = o(\sqrt{n})$ .
  - $\log n \sim \sqrt{n}$ .
8. Dokážte alebo vyvráťte:
- $2^n + (-1)^n 2^n = O(2^n)$ .
  - $2^n + (-1)^n 2^n = \Theta(2^n)$ .
9. Dokážte alebo vyvráťte:
- $n! = O(2^n)$ .
  - $2^n = O(n!)$ .
10. Dokážte alebo vyvráťte:
- $n! = O(n^n)$ .
  - $n^n = O(n!)$ .
11. Dokážte alebo vyvráťte:  $F_n = \Theta([(1 + \sqrt{5})/2]^n)$ .
12. Zistite, či existuje konštanta  $a \in \mathbb{R}$  taká, že  $\log n = \Theta(n^a)$ .
13. Nech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sú funkcie. Dokážte alebo vyvráťte:
- Ak  $f(n) = O(g(n))$ , tak  $f(n) = o(g(n))$ .
  - Ak  $f(n) = o(g(n))$ , tak  $f(n) = O(g(n))$ .
  - Ak  $f(n) = \Theta(g(n))$ , tak  $f(n) \sim g(n)$ .
  - Ak  $f(n) \sim g(n)$ , tak  $f(n) = \Theta(g(n))$ .
14. Dokážte alebo vyvráťte:
- Pre ľubovoľné  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  platí buď  $f(n) = O(g(n))$ , alebo  $g(n) = O(f(n))$ .
  - Pre ľubovoľné rastúce  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  platí buď  $f(n) = O(g(n))$ , alebo  $g(n) = O(f(n))$ .
15. Nech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sú funkcie. Dokážte, že  $f(n) = o(g(n))$  práve vtedy, keď pre všetky  $c > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pre všetky  $n \geq n_0$  platí  $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ .
16. Nech  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia taká, že  $f(n) = O(2^n)$ . Dokážte alebo vyvráťte:
- $2^n + |f(n)| = O(2^n)$ .
  - $|2^n - |f(n)|| = O(2^n)$ .
17. Nech  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia taká, že  $f(n) = \Theta(2^n)$ . Dokážte alebo vyvráťte:
- $2^n + |f(n)| = \Theta(2^n)$ .
  - $|2^n - |f(n)|| = \Theta(2^n)$ .
18. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \Theta(n^{3/2}).$$