

Úlohy k cvičeniu č. 13

Definícia 1. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. Matica susednosti grafu G je matica $A(G) = (a_{i,j})_{n \times n}$ taká, že pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$a_{i,j} = |\{e \in E \mid I(e) = \{v_i, v_j\}\}|.$$

1. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. Dokážte, že matica $A(G)$ je nutne symetrická.
2. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$, nech $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre maticu $(A(G))^k$ platí $(A(G))^k = (a_{i,j}^{(k)})_{n \times n}$, kde pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$ je $a_{i,j}^{(k)}$ rovné počtu všetkých v_i - v_j -sledov dĺžky k v grafe G .

Definícia 2. Graf $G = (V, E, I)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. Nech $G = (V, E, I)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- (i) G je strom.
- (ii) Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.
- (iii) Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf.
- (iv) Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica.
- (v) G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n - 1$ hranami.

Definícia 3. Nech $T = (V, E, I)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

3. Dokážte vetu 1.
4. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.
5. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$. Nech v je list stromu T a u je susedný vrchol listu v . Dokážte, že $\text{ex}_T(u) = \text{ex}_T(v) - 1$.
6. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$ a nech $v \in \text{cent}(T)$. Dokážte, že $\deg_T(v) \geq 2$.
7. Nájdite všetky regulárne stromy.

Definícia 4. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Kostra grafu G* je ľubovoľný strom T , ktorý je faktorom grafu G .

8. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a T je jeho kostra. Dokážte, že $\text{diam}(T) \geq \text{diam}(G)$.
9. Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru T takú, že $\text{diam}(T) = \text{diam}(G)$.

Definícia 5. Graf $G = (V, E, I)$ je *bipartitný*, ak existujú neprázdne množiny V_1 a V_2 tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a pre všetky $e \in E$ platí $I(e) \cap V_1 \neq \emptyset$ a $I(e) \cap V_2 \neq \emptyset$.

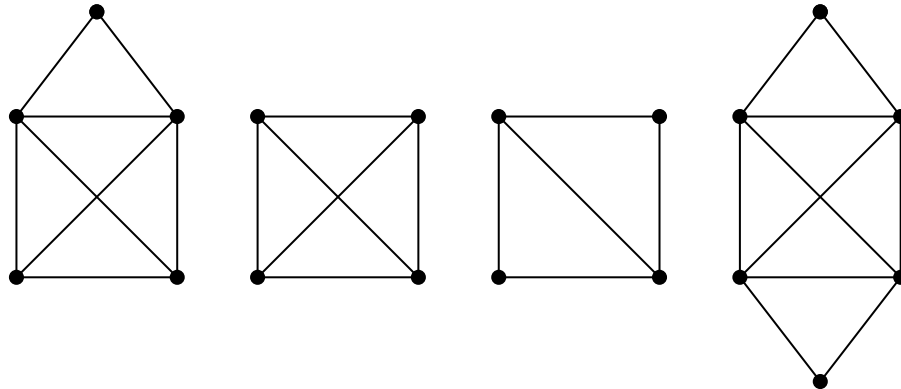
10. Dokážte, že každý strom je bipartitný graf.
11. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.
12. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať páry počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

Definícia 6. Súvislý graf $G = (V, E, I)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

Veta 2. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.

Veta 3. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

13. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



14. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

15. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletý graf K_n je eulerovský.