Riešenia prvej sady domácich úloh

Anna Dresslerová 21. marca 2017

Úloha 1. Máme daných osem *zložených* čísel $a_1, \ldots, a_8 \in \{1, \ldots, 359\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu súdeliteľných čísel a_i, a_j (kde $i \neq j$).

Riešenie. Čísla $a_1, \ldots, a_8$ sú zložené, preto budú určite deliteľné nejakým prvočíslom. Pre každé číslo a_i nájdeme najmenšie prvočíslo p_i, ktoré ho delí. Čiže $a_i = p_i \times b_i$, kde $b_i \geq p_i$. Teraz sa pozrime na to, ktoré prvočísla sú prípustné pre čísla p_i. Tvrdím, že to môžu byť len prvočísla $\leq \sqrt{359}$. Keby to tak nebolo a my zvolíme za niektoré p_i niečo väčšie ako $\sqrt{359}$, potom aj b_i musí byť aspoň také veľké, čím ale zjavne dostávame číslo, ktoré nepatrí do vyhradenej množiny. Prvočísel menších ako $\sqrt{359}$ je presne sedem: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Prvočíslo 19 už nemôžeme použiť, lebo $19^2 = 361$. Z dirichletovho princípu teda dostávema, že pre aspoň dve čísla a_i, a_j $(i \neq j)$ platí $p_i = p_j$. Inými slovami, a_i a a_j sú súdeliteľné. □

Úloha 2. Na večierku je $n \geq 2$ hostí. Každý z nich má spomedzi ostatných zúčastnených nejaký počet známych (od 0 po $n-1$). Platí, že ak hosť A pozná hosťa B, tak aj hosť B pozná hosťa A. Dokážte, že aspoň dvaja ľudia na večierku majú rovnaký počet známych.

Riešenie. Máme n hostí a spolu n možností pre počet známych (od 0 po $n-1$). Dalo by sa to rozdeliť tak, že každý hosť bude mať iný počet známych? V skutočnosti nie. Keby to šlo, tak máme dvoch hostí, z ktorých jeden (A) má 0 známych a druhý (B) má $n-1$ známych. Keďže hosť B pozná všetkých, tak pozná aj hosťa A. Zo zadania ale musí aj hosť A poznať hosťa B, ale to je spor s tým, že hosť A má 0 známych. Možnosti 0 a $n-1$ sa navyzájom vylučujú, preto máme v skutočnosti len $n-1$ možností na počet známych. Z dirichletovho princípu potom dostávame, že existujú dvaja hostia, ktorí majú rovnaký počet známych, lebo máme n hostí a len $n-1$ možností pre počet známych. □

Úloha 3. Bežný šachový kôň sa môže v jednom ťahu pohnúť buď o dve políčka zvisle a o jedno políčko vodorovne, alebo o jedno políčko zvisle a o dve políčka vodorovne. *Trochu splašený kôň* je šachová figúrka, ktorá sa môže v jednom ťahu pohnúť buď o *štyri* políčka zvisle a o jedno políčko vodorovne, alebo o jedno políčko zvisle a o *štyri* políčka vodorovne. Koľko najviac trochu splašených koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Riešenie. Dokážeme, že sa na šachovnicu dá umiestniť *najviac 32 trochu splašených koní.*

a) Najprv musíme ukázať, že 32 trochu splašených koní sa dá umiestniť na šachovnicu bez toho aby sa ohrozovali. Keď si nakreslíme, ktoré políčka trochu splašený kôň ohrozuje, zistíme, že kôň na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka a naopak, kôň na čiernom políčku ohrozuje iba biele políčka. Preto keď umiestnime 32 trochu splašených koní na všetky biele políčka, nebudú sa navzájom ohrozovať.

b) Teraz zostáva ukázať, že ak by sme chceli na šachovicu umiestniť 33 trochu splašených koní, tak by sa už našli dvaja, ktorí sa ohrozujú. Rozdelíme si šachovnicu na 32 oblastí tak, aby sa trochu splašené kone v jednej oblasti navzájom ohrozovali. Rozdeliť ju môžeme napríklad takto (políčka patriace do jednej oblasti sú označené rovnakým číslom):

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	1	2	3	4	5	6	7	8
7	5	6	7	8	1	2	3	4
6	9	10	11	12	13	14	15	16
5	13	14	15	16	9	10	11	12
4	17	18	19	20	21	22	23	24
3	21	22	23	24	17	18	19	20
2	25	26	27	28	29	30	31	32
1	29	30	31	32	25	26	27	28

Z dirichletovho princípu dostávame, že v aspoň jeden oblasti budú dva kone, lebo máme 32 oblastí a 33 koní. Tieto dva kone sa ohrozujú, lebo tak sme rozdelili šachovnicu na oblasti.

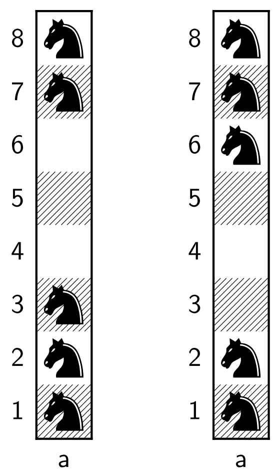
□

Úloha 4. *Kobylka* je šachová figúrka, ktorá sa v jednom ťahu hýbe vždy *zvisle o tri políčka* (prípustný je ťah oboma smermi). Koľko najviac kobyliek možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

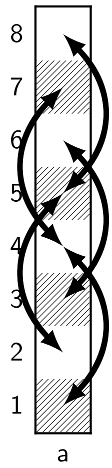
Riešenie. Môžeme si všimnúť, že figúrky v rôznych stĺpcoch sa nemôžu ohrozovať, preto stačí problém vyriešiť pre jeden stĺpec a výsledok vynásobiť ôsmimi.

Dokážeme, že do jedného stĺpca môžeme umiestniť *najviac 5 kobyliek.*

a) Prvým krokom je ukázať, že 5 kobyliek naozaj vieme umiestniť. Jediné dva prípustné spôsoby sú nasledujúce:



b) Ešte treba ukázať, že 6 kobyliek už umiestniť nevieme. Vytvoríme si 5 oblastí tak, aby kobylky v jednej oblasti sa navzájom ohrozovali. Tieto oblasti nemusia byť nutne disjunktné. Naše oblasti konkrétne vyzerajú takto (políčka spojené jednou čiarou sú v jednej oblasti):



Z dirichletovho princípu potom dostávame, že ak umiestnime do jedného stĺpca 6 kobyliek, tak aspoň v jednej oblasti budú dve kobylky, ktoré sa z definície musia ohrozovovať.

Dostávame, že na štandardnú šachovnicu vieme umiestniť najviac 40 kobyliek tak, aby sa neohrozovali. □