Riešenia druhej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

5. apríla 2017

Úloha 1. Nech $n \in \mathbb{N}$. *Binárnym reťazcom dĺžky* n nazveme ľubovoľnú n-prvkovú postupnosť bitov 0 a 1; čiže postupnosť $b_n b_{n-1} \ldots b_1$, kde $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$. Číslo reprezentované binárnym reťazcom $b_n b_{n-1} \ldots b_1$ definujeme ako

$$\langle b_n b_{n-1} \ldots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{k-1}.$$

a) Koľko je všetkých binárnych reťazcov dĺžky *práve* n?

b) Koľko je všetkých binárnych reťazcov dĺžky *najviac* n?

c) Koľko je všetkých čísel reprezentovaných binárnymi reťazcami dĺžky *práve* n?

d) Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n reprezentujúcich párne číslo?

e) Nech $n \geq 2$. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n reprezentujúcich číslo deliteľné štyrmi?

f) Nech $m \in \mathbb{N}$. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n, ktoré reprezentujú číslo ostro väčšie ako 2^m? (Pozor: naozaj treba ošetriť *všetky* dvojice $n, m \in \mathbb{N}$.)

g) Predpokladajme, že n je párne. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n, ktoré obsahujú rovnako veľa nulových a jednotkových bitov?

h) Nech n je párne. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n, ktoré obsahujú ostro menej nulových bitov, než jednotkových bitov?

i) Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *najviac* n, ktoré neobsahujú dva rovnaké po sebe idúce bity?

j) Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n, v ktorých je každý *jednotkový* bit navyše ofarbený jednou z nejakých dvoch farieb, pričom vieme, že celkový počet jednotkových bitov v reťazci je o 3 menší, než počet nulových bitov? (Pozor: naozaj treba ošetriť *všetky* $n \in \mathbb{N}$.)

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie.

a) Množina $\mathscr{R}_a$ všetkých binárnych reťazcov dĺžky n je daná ako

$$\mathscr{R}_a = \{0, 1\}^{\{1,\ldots,n\}};$$

ide tu o priamy dôsledok formálnej definície binárneho reťazca zo zadania. Z pravidla mocnenia preto dostávame

$$|\mathscr{R}_a| = |\{0, 1\}|^{|\{1,\ldots,n\}|} = 2^n.$$

b) Množinu $\mathscr{R}_b$ všetkých binárnych reťazcov dĺžky najviac n možno zjavne vyjadriť ako

$$\mathscr{R}_b = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{R}_k, \tag{1}$$

kde $\mathscr{R}_k$ je množina všetkých binárnych reťazcov dĺžky práve k. Pre $k = 0, \ldots, n$ navyše podobne ako v predchádzajúcej podúlohe dostávame

$$\mathscr{R}_k = \{0, 1\}^{\{1,\ldots,k\}}$$

a z pravidla mocnenia vyplýva

$$|\mathscr{R}_k| = |\{0,1\}|^{|\{1,\ldots,k\}|} = 2^k.$$

Keďže sú množiny $\mathscr{R}_0, \ldots, \mathscr{R}_k$ po dvoch disjunktné, z rovnosti (1) a z pravidla súčtu dostávame

$$|\mathscr{R}_b| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{R}_k\right| = \sum_{k=0}^{n} |\mathscr{R}_k| = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

Ľahko potom nahliadnuť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1, \tag{2}$$

čo možno dokázať napríklad matematickou indukciou vzhľadom na n:

1. Nech $n = 0$. Potom zrejme

   $$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

   a tvrdenie platí.
2. Nech tvrdenie platí pre $n = s$. Ukážeme, že platí aj pre $n = s + 1$.
   Z indukčného predpokladu vyplýva

   $$\sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} - 1,$$

   z čoho následne dostávame

   $$\sum_{k=0}^{s+1} 2^k = 2^{s+1} + \sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} + 2^{s+1} - 1 = 2^{s+2} - 1,$$

   čo bolo treba dokázať.

Môžeme teda uzavrieť, že $|\mathscr{R}_b| = 2^{n+1} - 1$.

c) Nech $\mathscr{R}_c$ označuje množinu čísel zo zadania a nech $\mathscr{R}_a$ je množina z riešenia podúlohy a). Dokážeme, že zobrazenie $f\colon \mathscr{R}_a \to \mathscr{R}_c$ definované pre všetky $b_n b_{n-1} \ldots b_1 \in \mathscr{R}_a$ predpisom

$$f(b_n b_{n-1} \ldots b_1) = \langle b_n b_{n-1} \ldots b_1 \rangle$$

je bijekcia.

Skutočne, nech $b_n b_{n-1} \ldots b_1$ a $b'_n b'_{n-1} \ldots b'_1$ sú dva *rôzne* binárne reťazce z množiny $\mathscr{R}_a$. Nech $m \in \{1, \ldots, n\}$ je *najväčší* index taký, že $b_m \neq b'_m$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $b_m = 1$ a $b'_m = 0$. Potom

$$f(b_n b_{n-1} \ldots b_1) = \langle b_n b_{n-1} \ldots b_1 \rangle = \sum_{k=m+1}^{n} b_k 2^{k-1} + 2^{m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} b_k 2^{k-1}$$

a

$$f(b'_n b'_{n-1} \ldots b'_1) = \langle b'_n b'_{n-1} \ldots b'_1 \rangle = \sum_{k=m+1}^{n} b_k 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{m-1} b'_k 2^{k-1},$$

z čoho dostávame

$$f(b_n b_{n-1} \dots b_1) - f(b'_n b'_{n-1} \dots b'_1) = 2^{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} (b'_k - b_k) 2^{k-1} \geq 2^{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{k-1}. \quad (3)$$

Z rovnosti (2) potom máme

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-2} 2^k = 2^{m-1} - 1,$$

čo spoločne s (3) implikuje

$$f(b_n b_{n-1} \dots b_1) - f(b'_n b'_{n-1} \dots b'_1) > 0,$$

a teda $f(b_n b_{n-1} \dots b_1) \neq f(b'_n b'_{n-1} \dots b'_1)$. Zobrazenie f je teda injektívne. Surjektívnosť zobrazenia f je pritom zrejmá, keďže priamo z definície množiny $\mathscr{R}_c$ vyplýva, že každé číslo z $\mathscr{R}_c$ musí byť reprezentované aspoň jedným reťazcom z $\mathscr{R}_a$.

Zobrazenie f je teda bijekcia; preto $|\mathscr{R}_c| = |\mathscr{R}_a| = 2^n$.

d) Pre $n \geq 1$ možno ľahko dokázať, že binárny reťazec $b_n b_{n-1} \dots b_1$ reprezentuje párne číslo práve vtedy, keď $b_1 = 0$. Množina všetkých reťazcov zo zadania je teda daná ako

$$\mathscr{R}_d = \left\{ b_n b_{n-1} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}} \;\middle|\; b_1 = 0 \right\}.$$

Nech $f \colon \mathscr{R}_d \to \{0,1\}^{\{1,\dots,n-1\}}$ je zobrazenie dané pre všetky $b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \in \mathscr{R}_d$ predpisom $f(b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1) = b_n b_{n-1} \dots b_2$. Toto zobrazenie je očividne bijekcia; s využitím pravidla mocnenia teda dostávame

$$|\mathscr{R}_d| = \left| \{0,1\}^{\{1,\dots,n-1\}} \right| = |\{0,1\}|^{|\{1,\dots,n-1\}|} = 2^{n-1}.$$

Pre $n = 0$ zjavne existuje jediný takýto reťazec.

e) Podobne ako v predchádzajúcej podúlohe možno ľahko dokázať, že reťazec $b_n b_{n-1} \dots b_1$ s $n \geq 2$ reprezentuje číslo deliteľné štyrmi práve vtedy, keď $b_1 = 0$ a zároveň $b_2 = 0$. Množina reťazcov zo zadania je teda daná ako

$$\mathscr{R}_e = \left\{ b_n b_{n-1} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}} \;\middle|\; b_1 = 0 \ \wedge \ b_2 = 0 \right\}.$$

Zobrazenie $f \colon \mathscr{R}_e \to \{0,1\}^{\{1,\dots,n-2\}}$ definované pre všetky reťazce $b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \in \mathscr{R}_e$ predpisom $f(b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1) = b_n b_{n-1} \dots b_3$ je zjavne bijekcia. V dôsledku toho teda

$$|\mathscr{R}_e| = \left| \{0,1\}^{\{1,\dots,n-2\}} \right| = |\{0,1\}|^{|\{1,\dots,n-2\}|} = 2^{n-2}.$$

f) Dokážeme najprv, že binárny reťazec $b_n b_{n-1} \dots b_1$ reprezentuje číslo *menšie alebo rovné* ako 2^m práve vtedy, keď je splnená jedna z nasledujúcich dvoch podmienok, ktoré sa zrejme navzájom vylučujú:

(i) Súčasne platí $m + 1 \leq n$, $b_{m+1} = 1$ a $b_k = 0$ pre všetky $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{m+1\}$.

(ii) Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ také, že $m + 1 \leq k \leq n$ platí $b_k = 0$.

Predpokladajme najprv, že je splnená podmienka (i). Potom zrejme

$$\langle b_n b_{n-1} \dots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{k-1} = 2^{m+1-1} = 2^m \leq 2^m.$$

Ak je splnená podmienka (ii), tak z tvrdenia dokázaného v podúlohe „b)" dostávame

$$\langle b_n b_{n-1} \dots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1 \leq 2^m.$$

Pre dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že nie je splnená žiadna z podmienok (i) a (ii). To znamená, že buď $b_{m+1} = 1$ a súčasne $b_r = 1$ pre nejaké $r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{m+1\}$, alebo $b_s = 1$ pre nejaké $s \in \{m+2, m+3, \dots, n\}$. V prvom prípade potom dostávame

$$\langle b_n b_{n-1} \dots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{k-1} \geq 2^m + 2^{r-1} > 2^m$$

a v druhom prípade zas dostávame

$$\langle b_n b_{n-1} \dots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{k-1} \geq 2^{s-1} > 2^m.$$

Označme teraz symbolom $\mathscr{R}'_f$ množinu všetkých binárnych reťazcov dĺžky práve n reprezentujúcich číslo *menšie alebo rovné* ako 2^m.

Zaveďme nasledujúce označenia:

$$\mathscr{R}'_1 = \left\{ b_n b_{n-1} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}} \;\middle|\; b_{m+1} = 1 \;\wedge\; \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{m+1\} : b_k = 0 \right\},$$
$$\mathscr{R}'_2 = \left\{ b_n b_{n-1} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}} \;\middle|\; \forall k \in \{m+1, m+2, \dots, n\} : b_k = 0 \right\}.$$

(Prvá z množín je definovaná len v prípade, že $m + 1 \leq n$.)

Predpokladajme teraz najprv, že $m + 1 \leq n$. Z predchádzajúceho potom vyplýva, že

$$\mathscr{R}'_f = \mathscr{R}'_1 \cup \mathscr{R}'_2,$$

pričom ide o disjunktné zjednotenie. Zrejme $|\mathscr{R}'_1| = 1$. Zobrazenie $f \colon \mathscr{R}'_2 \to \{0,1\}^{\{1,\dots,m\}}$ definované pre všetky $b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \in \mathscr{R}'_2$ predpisom $f(b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1) = b_m b_{m-1} \dots b_1$ je potom zjavne bijekcia. Platí teda

$$|\mathscr{R}'_2| = \left| \{0,1\}^{\{1,\dots,m\}} \right| = |\{0,1\}|^{|\{1,\dots,m\}|} = 2^m.$$

Z pravidla súčtu potom dostávame

$$\left|\mathscr{R}'_f\right| = |\mathscr{R}'_1 \cup \mathscr{R}'_2| = |\mathscr{R}'_1| + |\mathscr{R}'_2| = 2^m + 1.$$

Ak $m + 1 > n$, zrejme

$$\mathscr{R}'_f = \mathscr{R}'_2,$$

pričom je jasné, že $\mathscr{R}'_2 = \{0,1\}^{\{1,\dots,n\}}$. V tomto prípade teda

$$\left|\mathscr{R}'_f\right| = 2^n.$$

Nech teraz $\mathscr{R}_f$ označuje množinu všetkých binárnych reťazcov zo zadania. Zjavne

$$\mathscr{R}_f = \mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}'_f,$$

kde $\mathscr{R}_a$ je množina všetkých riešení podúlohy „a)". Z pravidla rozdielu teda dostávame

$$|\mathscr{R}_f| = \left|\mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}'_f\right| = |\mathscr{R}_a| - \left|\mathscr{R}'_f\right| = \begin{cases} 2^n - 2^m - 1 & \text{ak } m < n, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

g) Nech $\mathscr{R}_g$ je množina všetkých binárnych reťazcov zo zadania a nech $n = 2m$. Pre ľubovoľný binárny reťazec $b_{2m} \dots b_1$ položme

$$\#_0(b_{2m} \dots b_1) = |\{\, i \in \{1, \dots, 2m\} \mid b_i = 0\}|$$

a

$$\#_1(b_{2m} \dots b_1) = |\{\, i \in \{1, \dots, 2m\} \mid b_i = 1\}|\,.$$

Potom zrejme

$$\mathscr{R}_g = \left\{ b_{2m} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,2m\}} \;\middle|\; \#_0(b_{2m} \dots b_1) = \#_1(b_{2m} \dots b_1) \right\}.$$

Zobrazenie $f\colon \mathscr{R}_g \to \mathscr{P}_m(\{1,\dots,2m\})$ definované pre všetky $b_{2m} \dots b_1 \in \mathscr{R}_g$ predpisom

$$f(b_{2m} \dots b_1) = \{\, i \in \{1, \dots, 2m\} \mid b_i = 1\}$$

je zjavne bijekcia. Preto

$$|\mathscr{R}_g| = |\mathscr{P}_m(\{1,\dots,2m\})| = \binom{2m}{m} = \binom{n}{n/2}.$$

h) Nech $n = 2m$. Označme množinu všetkých reťazcov zo zadania symboom $\mathscr{R}_h$. Využívajúc notáciu z riešenia predchádzajúcej podúlohy teda môžeme písať

$$\mathscr{R}_h = \left\{ b_{2m} \dots b_1 \in \{0,1\}^{\{1,\dots,2m\}} \;\middle|\; \#_0(b_{2m} \dots b_1) < \#_1(b_{2m} \dots b_1) \right\}.$$

Nech $\mathscr{R}_a$ označuje množinu všetkých reťazcov z podúlohy „a)“ a $\mathscr{R}_g$ označuje množinu všetkých reťazcov z podúlohy „g)“. Zobrazenie $f\colon \mathscr{R}_h \to (\mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}_g) \setminus \mathscr{R}_h$ definované pre všetky $b_{2m} \dots b_1 \in \mathscr{R}_h$ predpisom

$$f(b_{2m} \dots b_1) = \overline{b_{2m}} \dots \overline{b_1}$$

(kde $\overline{0} = 1$ a $\overline{1} = 0$) je potom zjavne bijekcia. Použitím pravidla rozdielu teda dostávame

$$|\mathscr{R}_h| = |(\mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}_g) \setminus \mathscr{R}_h| = |\mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}_g| - |\mathscr{R}_h|.$$

To možno ďalej upraviť na

$$2|\mathscr{R}_h| = |\mathscr{R}_a \setminus \mathscr{R}_g|,$$

z čoho opätovným použitím pravidla rozdielu dostávame

$$2|\mathscr{R}_h| = |\mathscr{R}_a| - |\mathscr{R}_g| = 2^{2m} - \binom{2m}{m},$$

a teda

$$|\mathscr{R}_h| = \frac{1}{2}\left(2^n - \binom{n}{n/2}\right).$$

i) Označme množinu všetkých binárnych reťazcov zo zadania symbolom $\mathscr{R}_i$. Potom

$$\mathscr{R}_i = \{b_m \dots b_1 \mid m \in \{0,\dots,n\};\; b_1,\dots,b_m \in \{0,1\};\; b_k \neq b_{k-1}, k = m, \dots, 2\}.$$

Nech $\mathscr{R}_i'$ je množina definovaná ako

$$\mathscr{R}_i' = (\{0,1\} \times \{1,\dots,n\}) \cup \{\varepsilon\},$$

kde ε označuje prázdny binárny reťazec a $\{0,1\} \times \{1,\ldots,n\}$ reprezentuje množinu všetkých dvojíc pozostávajúcich z najvýznamnejšieho bitu a dĺžky reťazca. Zobrazenie $f\colon \mathscr{R}_i' \to \mathscr{R}_i$ dané predpismi

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon, \\ f([0,m]) &= \underbrace{0101\ldots}_{m \text{ bitov}}, \qquad \forall m \in \{0,\ldots,n\}, \\ f([1,m]) &= \underbrace{1010\ldots}_{m \text{ bitov}}, \qquad \forall m \in \{0,\ldots,n\} \end{aligned}$$

je potom zjavne bijekcia. Platí teda

$$|\mathscr{R}_i| = |\mathscr{R}_i'| = |(\{0,1\} \times \{1,\ldots,n\}) \cup \{\varepsilon\}| = |\{0,1\}| \cdot |\{1,\ldots,n\}| + |\{\varepsilon\}| = 2n+1,$$

pričom v predposlednom kroku sme využili pravidlo súčinu, ako aj pravidlo súčtu.

j) Jednotkové bity prvej farby označme 1_a a jednotkové bity druhej farby označme 1_b. Nech $\mathscr{R}_j$ je množina všetkých reťazcov zo zadania. Pre všetky $c_n \ldots c_1 \in \{0, 1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,n\}}$ navyše označme

$$\begin{aligned} \#_0(c_n \ldots c_1) &= |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid c_i = 0\}|, \\ \#_{1_a}(c_n \ldots c_1) &= |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid c_i = 1_a\}|, \\ \#_{1_b}(c_n \ldots c_1) &= |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid c_i = 1_b\}|. \end{aligned}$$

Potom zrejme

$$\mathscr{R}_j = \left\{ c_n \ldots c_1 \in \{0, 1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,n\}} \;\middle|\; \#_0(c_n \ldots c_1) = \#_{1_a}(c_n \ldots c_1) + \#_{1_b}(c_n \ldots c_1) + 3 \right\}.$$

Ak teraz pre žiadne $m \in \mathbb{N}$ neplatí $n = 2m+3$, tak rovnica $\#_0(c_n \ldots c_1) = \#_{1_a}(c_n \ldots c_1) + \#_{1_b}(c_n \ldots c_1) + 3$ zjavne nemôže mať riešenie, a teda $|\mathscr{R}_j| = 0$. Predpokladajme preto, že existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $n = 2m+3$ (m je teda nepárne číslo väčšie alebo rovné trom) a definujme

$$\mathscr{R}_j' = \mathscr{P}_{m+3}(\{1,\ldots,2m+3\}) \times \{1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,m\}}.$$

Zobrazenie $f\colon \mathscr{R}_j' \to \mathscr{R}_j$ definované pre všetky $M \in \mathscr{P}_{m+3}(\{1,\ldots,2m+3\})$ a všetky $c_m \ldots c_1 \in \{1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,m\}}$ predpisom

$$f([M, c_m \ldots c_1]) = c_{2m+3}' \ldots c_1',$$

kde pre $i = 2m+3, \ldots, 1$ platí

$$c_i' = \begin{cases} 0 & \text{ak } i \in M, \\ 1_a & \text{ak } i \notin M \text{ a } c_{m - |M^C \cap \{2m+3,\ldots,i+1\}|} = 1_a, \\ 1_b & \text{ak } i \notin M \text{ a } c_{m - |M^C \cap \{2m+3,\ldots,i+1\}|} = 1_b, \end{cases}$$

je zjavne bijekcia. Preto

$$\begin{aligned} |\mathscr{R}_j| = |\mathscr{R}_j'| &= \left| \mathscr{P}_{m+3}(\{1,\ldots,2m+3\}) \times \{1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,m\}} \right| = \\ &= |\mathscr{P}_{m+3}(\{1,\ldots,2m+3\})| \cdot \left| \{1_a, 1_b\}^{\{1,\ldots,m\}} \right| = \binom{2m+3}{m+3} 2^m. \end{aligned}$$

Možno teda uzavrieť, že $|\mathscr{R}_j| = \binom{2m+3}{m+3} 2^m$ pre n také, že $n = 2m+3$ (kde $m \in \mathbb{N}$) a $|\mathscr{R}_j| = 0$ pre zvyšné n. $\square$