

Druhá sada domácich úloh

Úlohy tejto sady je potrebné odovzdať **do stredy 5. apríla 2017, 14:40 SELČ** na cvičení alebo do obálky na dverách miestnosti M-249.

1. Nech $n \in \mathbb{N}$. *Binárnym reťazcom dĺžky n* nazveme ľubovoľnú n -prvkovú postupnosť bitov 0 a 1; čiže postupnosť $b_n b_{n-1} \dots b_1$, kde $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$. Číslo reprezentované binárnym reťazcom $b_n b_{n-1} \dots b_1$ definujeme ako

$$\langle b_n b_{n-1} \dots b_1 \rangle = \sum_{k=1}^n b_k 2^{k-1}.$$

- Koľko je všetkých binárnych reťazcov dĺžky *práve* n ?
- Koľko je všetkých binárnych reťazcov dĺžky *najviac* n ?
- Koľko je všetkých čísel reprezentovaných binárnymi reťazcami dĺžky *práve* n ?
- Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n reprezentujúcich párne číslo?
- Nech $n \geq 2$. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n reprezentujúcich číslo deliteľné štyrmi?
- Nech $m \in \mathbb{N}$. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n , ktoré reprezentujú číslo ostro väčšie ako 2^m ? (Pozor: naozaj treba ošetriť *všetky* dvojice $n, m \in \mathbb{N}$.)
- Predpokladajme, že n je párne. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n , ktoré obsahujú rovnako veľa nulových a jednotkových bitov?
- Nech n je párne. Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n , ktoré obsahujú ostro menej nulových bitov, než jednotkových bitov?
- Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *najviac* n , ktoré neobsahujú dva rovnaké po sebe idúce bity?
- Koľko je binárnych reťazcov dĺžky *práve* n , v ktorých je každý *jednotkový* bit navyše ofarbený jednou z nejakých dvoch farieb, pričom vieme, že celkový počet jednotkových bitov v reťazci je o 3 menší, než počet nulových bitov? (Pozor: naozaj treba ošetriť *všetky* $n \in \mathbb{N}$.)

Svoje tvrdenia dokážte (to vo väčšine prípadov znamená sformulovať množinový model úlohy a aplikovať tvrdenia známe z prednášky).