Riešenia štvrtej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

3. mája 2017

Úloha 1. Predpokladajme, že z každej štandardnej šachovej figúrky máme k dispozícii neobmedzene veľa kusov obidvoch farieb. Koľkými spôsobmi môžeme niekoľko z nich rozostaviť na šachovnicu tak, aby navyše:

a) V každom riadku aj stĺpci bol párny počet figúrok a na okraji šachovnice (t.j. v prvom a poslednom riadku a stĺpci) boli iba prázdne políčka a políčka obsahujúce biele kone?[1]

b) Z každej šachovej figúrky boli na šachovnici presne štyri kusy z každej farby?

c) V žiadnom riadku neboli figúrky oboch farieb?

Riešenie.

a) Ľubovoľné takéto rozostavenie je jednoznačne určené obsahom políčok v prvých siedmich riadkoch a stĺpcoch. Políčko v ôsmom stĺpci a i-tom riadku (kde $1 \leq i \leq 7$) totiž obsahuje bieleho koňa práve vtedy, keď je na ostatných políčkach v i-tom riadku dohromady nepárny počet figúrok; v opačnom prípade je toto políčko prázdne. Podobne políčko v ôsmom riadku a j-tom stĺpci (kde $1 \leq j \leq 7$) obsahuje bieleho koňa práve vtedy, keď je na ostatných políčkach v j-tom stĺpci dohromady nepárny počet figúrok; inak je toto políčko prázdne. Platí navyše, že parita počtu figúrok na prvých siedmich políčkach ôsmeho stĺpca je rovná parite počtu figúrok na prvých siedmich políčkach ôsmeho riadka – obidve tieto parity sú totiž rovné parite počtu figúrok v prvých siedmich riadkoch a stĺpcoch. Tým je potom jednoznačne určené aj políčko v ôsmom riadku a ôsmom stĺpci. Počet rozostavení zo zadania je teda rovný počtu všetkých rozostavení figúrok do prvých siedmich riadkov a stĺpcov takých, že v prvom riadku a v prvom stĺpci sú iba prázdne políčka a políčka obsahujúce biele kone. Takýchto rozostavení je
$$2^{13} \cdot 13^{36}.$$

b) Pri každom takomto rozostavení bude na šachovnici dohromady 48 figúrok. Rozostavenie je potom určené výberom políčok obsadených týmito figúrkami a permutáciou s opakovaním jednotlivých figúrok (4 kusy z každého z 12 druhov). Počet rozostavení zo zadania je teda
$$\binom{64}{48}\frac{48!}{(4!)^{12}}.$$

c) Takéto rozostavenie možno jednoznačne zadať tak, že sa ku každému riadku najprv priradí farba a následne sa do tohto riadku rozostaví niekoľko figúrok vybratej farby. Takto sme ale pre daný riadok dvakrát započítali prípad, keď riadok neobsahuje žiadnu figúrku. Pre jeden riadok je teda $2 \cdot 7^8 - 1$ možností rozostavenia figúrok. Celkový počet rozostavení preto je
$$(2 \cdot 7^8 - 1)^8.$$
□

Úloha 2. Predpokladajme teraz, že máme k dispozícii iba jednu štandardnú sadu 32 šachových figúrok. Koľkými spôsobmi môžeme *všetky* tieto figúrky rozostaviť na šachovnicu tak, aby navyše:

a) Biele veže neboli v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci?

b) Diagonály `a1`–`h8` a `a8`–`h1` boli kompletne obsadené pešiakmi?

Riešenie.

[1] Prípustné sú aj situácie, keď sú všetky okrajové políčka prázdne alebo keď sú všetky obsadené bielym koňom.

a) Zrejme stačí najprv na šachovnicu umiestniť obe biele veže a následne na zvyšné políčka umiestniť zostávajúce figúrky. Počet prípustných umiestnení bielych veží je $(64 \cdot 49)/2$. Celkový počet rozostavení je potom

$$\frac{64 \cdot 49}{2} \cdot \binom{62}{30} \cdot \frac{30!}{(8!)^2(2!)^5}.$$

b) Počet rozostavení pešiakov na diagonálach `a1`–`h8` a `a8`–`h1` je $\binom{16}{8}$ (stačí napríklad vybrať tie políčka, na ktorých bude *biely* pešiak). Následne už len stačí na zvyšok šachovnice ľubovoľne rozostaviť zostávajúce figúrky. Celkový počet rozostavení teda je

$$\binom{16}{8} \cdot \binom{48}{16} \cdot \frac{16!}{(2!)^6}. \qquad \square$$