Riešenia piatej sady domácich úloh

Anna Dresslerová

26. mája 2017

Úloha 1. Nájdite nekonečnú postupnosť $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ funkcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ takú, že sú súčasne splnené nasledujúce dve podmienky

(i) Pre všetky $i \in \mathbb{N}$ platí $f_i(n) = O(n)$.

(ii) Pre všetky $i \in \mathbb{N}$ platí $f_i(n) = \omega(f_{i+1}(n))$.

Svoje tvrdenie *poriadne* dokážte. (Napríklad pri dôkaze $f_i(n) = O(n)$ by mali byť explicitne určené konštanty c a n_0 z definície O-notácie a podobne.)

Riešenie. Úloha má samozrejme veľa riešení. Môžeme si napríklad zvoliť pre každé i funkciu $f_i(n) = 1/n^i$. Táto fukcia nie je definovaná pre $n = 0$. Stačí, keď ju v tomto bode dodefinujeme. Napríklad $f_i(0) = 0$ pre každé i. Teraz už len stačí ukázať, že táto postupnosť spĺňa dve podmienky zo zadania.

(i) Ukážeme, že pre všetky $i \in \mathbb{N}$ platí $f_i(n) = O(n)$. Musíme nájsť $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené $n \geq n_0$ platí $|f_i(n)| \leq cn$. Skúsme zvoliť $c = 1$. Chceme ukázať, že $|f_i(n)| \leq |n|$ pre $n \geq n_0$. Nájdeme vhodné n_0. Vieme, že obe funkcie sú na prirodzených číslach nezáporné, preto môžeme zabudnúť na absolútne hodnoty. Chceme aby platilo:

$$\frac{1}{n^i} \leq n$$

Predpokladajme, že $n \neq 0$. Potom

$$\frac{1}{n^{i+1}} \leq 1$$

To platí v prípade, že $n^{i+1} \geq 1$, a z toho dostávame, že musí platiť $n \geq 1$. Nerovnosť $|f_i(n)| \leq cn$ platí pre $c = 1$ a $n_0 = 1$ pre všetky $i \in \mathbb{N}$. Tým sme overili prvú podmienku.

(ii) Ukážeme, že pre všetky $i \in \mathbb{N}$ platí $f_i(n) = \omega(f_{i+1}(n))$. Pre každé i ukážeme, že platí $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{i+1}(n)}{f_i(n)} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{i+1}(n)}{f_i(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^i+1}}{\frac{1}{n^i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

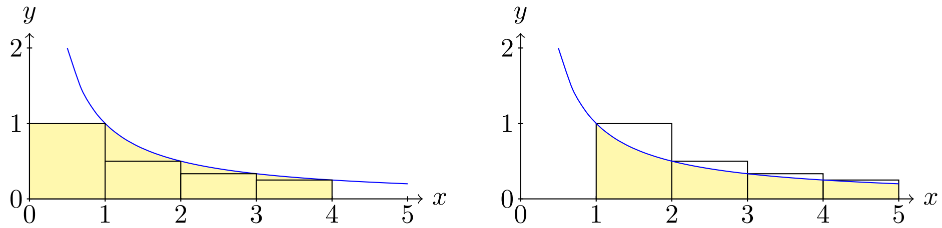
Tým sme overili aj druhú podmienku.

□

Úloha 2. Dokážte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n).$$

Riešenie. Sumu vieme odhadnúť pomocou integrálu. Jeden jej člen $1/i$ si môžeme predstaviť, ako plochu pod obdĺžnikom rozmerov $1 \times 1/i$. Keď tieto obdĺžniky dáme za sebou, budú kopírovať krivku funkcie $f(x) = 1/x$. Keď obdĺžniky nakreslíme naľavo od nej (ľavý obrázok), môžeme pomocou integrálu funkcie $1/x$ urobiť jej horný odhad. Napríklad, ak $n = 4$, tak potrebujeme vypočítať obsah žltej plochy na ľavom obrázku. Podobne, ak chceme odhadnúť sumu zdola, nakreslíme si obdĺžniky na pravú stranu od krivky funkcie (obrázok napravo) a pomocou integrálu odhadneme plochu pod krivkou. Ak $n = 4$, tak potrebujeme vypočítať obsah žltej plochy na pravom obrázku.



Odhadneme sumu zhora a ukážeme, že tento odhad je $O(\ln n)$, z toho potom dostaneme, že $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O(\ln n)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{i} di = 1 + [\ln i]_1^n = 1 + \ln n - \ln 1 = 1 + \ln n$$

Ukážeme, že $1+\ln n = O(\ln n)$. Nech $n > 1$, potom sú obe funkcie kladné a môžeme zabudnúť na absolútne hodnoty z definície

$$\begin{array}{rcl} 1 + \ln n & \leq & c \ln n \\ \dfrac{1 + \ln n}{\ln n} & \leq & c \\ \dfrac{1}{\ln n} + 1 & \leq & c \end{array}$$

Ak zvolíme $c = 2$ a n zvolíme tak, aby $\frac{1}{\ln n} \leq 1$, tak bude nerovnosť platiť.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{\ln n} & \leq & 1 & \\ 1 & \leq & \ln n & \qquad /exp \\ e & \leq & n & \end{array}$$

Zvoľme teda $n_0 = 3 > e$. Tým sme dokázali, že $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O(\ln n)$.

Odhadneme sumu zdola.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{i} di = [\ln i]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \geq \ln n$$

Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že logaritmus je rastúca funkcia. Aby sme dokázali, že $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Omega(\ln n)$ potrebujeme nájsť dve konštanty $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že

$$\ln n \leq c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

pre všetky prirodzené $n \geq n_0$. Keď sa pozrieme vyššie, túto nerovnosť sme už dokázali pre $c = 1$ a $n_0 = 1$.

Odhadli sme sumu zhora aj zdola funkciou $\ln n$, preto $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n)$. $\square$

Úloha 3. Nech

$$f(n) = n^{1+(-1)^n} + n^2.$$

Dokážte alebo vyvráťte:

a) $f(n) \sim n^2$.

b) $f(n) = \Omega(n^2)$.

c) $f(n) = o(n^3)$.

Riešenie. a) Podľa definície sa pokúsime vypočítať limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^2}$. Ak bude rovná jednej, tak tvrdenie v úlohe je pravdivé.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n} + n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n}}{n^2} + 1 = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n}}{n^2}$$

Fukcia $\frac{n^{1+(-1)^n}}{n^2}$ nadobúda pre párne n hodnotu 1 a inak nadobúda hodnotu $1/n$. Kedže sa tieto hodnoty stredajú a každá smeruje k inému číslu, hľadaná limita neexistuje. Tvrdenie zo zadania je nepravdivé.

b) Potrebujeme nájsť také $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|n^2| \leq c|f(n)|$ pre každé $n \geq n_0$. Keď sa pozrieme na hodnoty oboch funkcií, tak zistíme, že

$$n^2 \leq n^{1+(-1)^n} + n^2,$$

lebo $n^{1+(-1)^n}$ je vždy nezáporné. Preto stačí zvoliť $c = 1$ a $n_0 = 0$. Tým sme dokázali, že tvrdenie zo zadania platí.

c) V tejto podúlohe treba zistiť, či $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n} + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n}}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+(-1)^n}}{n^3} + \frac{1}{n} = 0$$

Rozanalyzujme posledný krok. Funkcia $\frac{n^{1+(-1)^n}}{n^3}$ nadobúda pre párne n hodnotu $1/n$ a pre nepárne hodnotu $1/n^3$. V oboch prípadoch s narastajúcim n klesá hodnota k 0. Druhá časť limity sa tiež približuje k nule. Preto sa celá limita rovná nule. Tým sme dokázali, že tvrdenie zo zadania je pravdivé.

□