

Vybrané partie z logiky
poznámky z prednášok v šk. roku 2002/2003
prednášajúci: doc. Eduard Toman

Martin Dzurenko

1. februára 2004
verzia 0.1

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Jazyk logiky	2
1.2	Formálne systémy logiky	2
2	Výroková logika	3
2.1	Syntax a sémantika výrokovkej logiky	3
2.2	Veta o kompaktnosti	4
2.3	Formálny systém výrokovkej logiky	5
2.4	Veta o dedukcii	6
2.5	Postove vety	7
2.6	Ďalšie vety	10
2.7	Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar	12
3	Predikátová logika	14
3.1	Syntax predikátovej logiky	14
3.2	Sémantika predikátovej logiky	15
3.3	Substitúcia termov za premenné	16
3.4	Axiómy predikátovej logiky	18
3.5	Veta o dedukcii	20
3.6	Prenexné tvary formúl	22
3.7	Predikátová logika s rovnosťou	23
4	Pravdivosť a dokázateľnosť	26
4.1	Veta o korektnosti	26
4.2	Veta o úplnosti	27
4.3	Veta o kompaktnosti	28
5	Záver	31

1 Úvod

1.1 Jazyk logiky

Definícia: *Jazyk 1. rádu obsahuje tieto symboly:*

1. *premenné $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ ktorých je nekonečne veľa*
2. *funkčné symboly f, g, h, \dots ku každému symbolu je priradené prirodzené číslo väčšie alebo rovné 0, ktoré vyjadruje jeho -árnosť*
3. *predikátové symboly P, Q, R, \dots ku každému symbolu je priradené prirodzené číslo väčšie alebo rovné 1, ktoré vyjadruje jeho -árnosť*
4. *logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, ktoré vyjadrujú v uvedenom poradí negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu*
5. *kvantifikátory \forall, \exists – všeobecný (veľký, univerzálny) kvantifikátor, existenčný (malý) kvantifikátor*
6. *pomocné symboly – zátvorky, čiarku, bodku, ...*

Poznámka: Premenné, logické spojky, kvantifikátory a pomocné symboly sú spoločné pre všetky teórie. Nazývame ich logické symboly. Funkčné a predikátové symboly nazývame špeciálne symboly, pretože nám charakterizujú špeciálne teórie. Výnimkou je symbol "=".

Príklad: príkladom špeciálnej teórie je teória množín – obsahuje logické symboly, symbol "=" a špeciálny symbol patričnosti " \in "

1.2 Formálne systémy logiky

Definícia: *Formálny systém logiky sa skladá z 3 zložiek:*

1. *jazyk, z ktorého symbolov vytvárame konečné postupnosti, najmä termy a formuly*
2. *axiómy – sú isté formuly, ktoré pokladáme za základné pravdivé tvrdenia*
3. *odvodzovacie pravidlá – sú to syntaktické pravidlá, pomocou ktorých sa z jednej alebo viacej formúl vytvára ďalšia odvodená formula*

Definícia: *Dôkaz vo formálnom systéme je konečná postupnosť formúl, ktorej členmi sú niektoré axiómy a formuly odvodené z predchádzajúcich členov postupnosti podľa odvodzovacích pravidiel*

Definícia: *Hovoríme, že formula A je teoreómou formálneho systému alebo že je odvoditeľná vo formálnom systéme, ak existuje jej dôkaz; t.j. konečná postupnosť formúl, ktorej posledným členom je formula A (počet členov postupnosti sa nazýva dĺžka dôkazu)*

2 Výroková logika

2.1 Syntax a sémantika výrokovkej logiky

Definícia: Nech P je neprázdna množina; jej prvky nazveme prvotné formuly. Môžu to byť vety prirodzeného jazyka, slová nejakého formálneho jazyka alebo len písmená $(p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots)$

Definícia: Jazyk $L(P)$ výrokovkej logiky nad množinou P obsahuje okrem prvkov množiny P symboly pre logické spojky $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$, ďalej pomocné symboly (rôzne typy zátvoriek). Hovoríme, že P je množina prvotných formúl jazyka $L(P)$ resp. L_p

Definícia: Výrokové formuly jazyka L_p definujeme pomocou nasledujúcich syntaktických pravidiel:

1. každá prvotná formula $p \in P$ je výroková formula
2. ak sú výrazy A, B výrokové formuly, potom výrazy $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ sú výrokové formuly
3. každá výroková formula vznikne konečným použitím pravidiel (1) a (2)

Poznámka: Iné výrokové formuly vo výrokovkej logike neexistujú.

Definícia: Nech A je formula L_p výrokovkej logiky. Jej podformulou je:

1. ona sama; ak A je prvotná formula jazyka L_p
2. ona sama; a každá podformula B , ak $A = (\neg B)$
3. ona sama; a každá podformula formúl B a C , ak $A = (A \wedge B), A = (A \vee B), A = (A \rightarrow B)$ alebo $A = (A \leftrightarrow B)$
4. žiadnych iných podformúl okrem tých, čo sú opísané v bodoch 1–3 niet

Definícia:

- Pravdivostné ohodnotenie (valuácia) prvotných formúl jazyka L_p je každé zobrazenie $v: P \rightarrow \{0, 1\}$, ktoré každej prvotnej formule $p \in P$ priradí hodnotu 0 (nepravda) alebo hodnotu 1 (pravda)
- Indukciou podľa dĺžky formuly definujeme rozšírenie \bar{v} zobrazenia v na množine všetkých formúl jazyka L_p :

$\bar{v}(A) = v(A)$	ak A je prvotná formula		
$\bar{v}(\neg A) = 0$	ak $\bar{v}(A) = 1$	ináč	$\bar{v}(\neg A) = 1$
$\bar{v}(A \wedge B) = 1$	ak $\bar{v}(A) = \bar{v}(B) = 1$	ináč	$\bar{v}(A \wedge B) = 0$
$\bar{v}(A \vee B) = 0$	ak $\bar{v}(A) = \bar{v}(B) = 0$	ináč	$\bar{v}(A \vee B) = 1$
$\bar{v}(A \rightarrow B) = 0$	ak $\bar{v}(A) = 1$ a $\bar{v}(B) = 0$	ináč	$\bar{v}(A \rightarrow B) = 1$
$\bar{v}(A \leftrightarrow B) = 1$	ak $\bar{v}(A) = \bar{v}(B)$	ináč	$\bar{v}(A \leftrightarrow B) = 0$

- Hovoríme, že $\bar{v}(A)$ je pravdivostná hodnota formuly A pri ohodnotení v . Formula A je pravdivá pri ohodnotení v , ak $\bar{v}(A) = 1$, inak je formula A nepravdivá.

Definícia:

1. Výroková formula A je tautológia, ak $\bar{v}(A) = 1$ pre ľub. ohodnotenie v .
2. Výroková formula A je splniteľná, ak $\bar{v}(A) = 1$ pre nejaké ohodnotenie v . Ohodnotenie s touto vlastnosťou nazývame model formuly A .
3. Množina formúl T je splniteľná, ak existuje v také, že $\bar{v}(A) = 1$ pre ľubovoľnú formulu $A \in T$. Takéto ohodnotenie v nazývame model T .

4. $T \models A$ (čítame "A je tautologický dôsledok T"), ak $\bar{v}(A) = 1$ pre každé ohodnotenie v , ktoré je modelom T .

Poznámka: Ak T je prázdna množina, tak namiesto $T \models A$ píšeme $\models A$ (t.j. $\bar{v}(A) = 1$ pre ľubovoľné ohodnotenie v v prvotných formúl L_p)

Príklad: Základné tautológie:

- $(A \vee \neg A)$ – zákon vylúčenia tretieho
- $\neg(A \wedge \neg A)$ – zákon vylúčenia sporom
- $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ – De Morganove pravidlá
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ – De Morganove pravidlá
- $\neg\neg A \leftrightarrow A$ – zákon dvojitej negácie

2.2 Veta o kompaktnosti

Lema: Množina všetkých výrokových formúl utvorených zo spočítateľnej množiny prvotných formúl je spočítateľná množina.

Dôkaz: Nech f je prosté zobrazenie množiny P všetkých prvotných formúl na množinu prirodzených čísel. Definujme zobrazenie f' na množine $P' = P \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$. Pre $x \in P$ nech $f'(x) = f(x) + 10$, pre $x \notin P$ je funkcia daná tabuľkou

x	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow	\neg	()
$f'(x)$	1	2	3	4	5	6	7

Nech $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je nekonečná rastúca množina prvočísel. Nech s_1, s_2, \dots, s_k je slovo z abecedy P' . Definujme funkciu F nad všetkými slovami z abecedy P' takto:

$$F(s_1 s_2 \dots s_k) = q_1^{f'(s_1)} q_2^{f'(s_2)} \dots q_k^{f'(s_k)}$$

Táto funkcia je prostá, teda formúl je najviac toľko ako prir. čísel. Keďže existuje nekonečne veľa formúl, tak podľa Cantor–Bernsteinovej vety je ich práve \aleph_0 .

Veta: Množina T formúl výrokovej logiky je splniteľná práve vtedy, keď ľubovoľná konečná $T_0 \subseteq T$ je splniteľná.

Dôkaz: Nech T je splniteľná, teda existuje aspoň jedno ohodnotenie v prvotných formúl jazyka L_p , že $\forall A \in T : \bar{v}(A) = 1$. Pre každú podmnožinu $T_0 \subseteq T$ to musí samozrejme platiť tiež.

Obrátene: Nech množina formúl T má model; teda $\exists v \forall A \in T : \bar{v}(A) = 1$. Nech $S = \{B \mid B \in L_p \wedge \bar{v}(B) = 1\}$. Potom množina S má tieto vlastnosti:

1. $S \supseteq T$
2. každá podmnožina množiny S je splniteľná
3. pre ľubovoľnú formulu A uvažovaného jazyka L_p je buď $A \in S$ alebo $\neg A \in S$, ale nikdy nie súčasne

Ak každá podmnožina T_0 množiny T je splniteľná, tak je aj množina formúl T splniteľná. Dôkaz rozdelíme na 2 časti:

1. najprv sa presvedčíme, že ak existuje množina S s vlastnosťami (1), (2) a (3) potom pomocou nej ľahko možno definovať model T

2. skonštruujeme takú množinu S

1. Nech v je ohodnotenie také, že pre ľubovoľnú prvotnú formulu p platí $v(p) = 1 \leftrightarrow p \in S$. Indukciou vzhľadom na dĺžku konštrukcie formuly A ukážeme, že pre ľubovoľnú formulu A platí: $\bar{v}(A) = 1 \leftrightarrow A \in S$ (uvedomme si, že formula je konečný objekt).

1. báza indukcie: platí vďaka výberu v

2. indukčný krok: keďže spojky \neg, \wedge tvoria úplný systém, stačí nám uvažovať iba formuly tvorené práve týmito spojkami

- Uvažujme $\neg A$.

Platí $\bar{v}(\neg A) = 0$, ak $\bar{v}(A) = 1$ a zároveň $\bar{v}(\neg A) = 1$, ak $\bar{v}(A) = 0$. S využitím indukčného predpokladu $\bar{v}(A) = 1 \leftrightarrow A \in S$ dostávame $\bar{v}(\neg A) = 1 \leftrightarrow \neg A \in S$

- Uvažujme $A_1 \wedge A_2$.

Nech $\bar{v}(A_1 \wedge A_2) = 1$. Potom $\bar{v}(A_1) = 1$ aj $\bar{v}(A_2) = 1$. Podľa IP teda $A_1 \in S$ aj $A_2 \in S$. Chceme dokázať, že aj $A_1 \wedge A_2 \in S$. Postupujme sporom: Nech $A_1 \wedge A_2 \notin S$, teda $\neg(A_1 \wedge A_2) \in S$. Uvažujme množinu $\{A_1, A_2, \neg(A_1 \wedge A_2)\} \subseteq S$. Táto množina nie je splniteľná, čo nám dáva požadovaný spor.

Obrátene nech $A_1 \wedge A_2 \in S$. Teda $A_1 \in S$ a $A_2 \in S$. Podľa IP teda $\bar{v}(A_1) = 1$ aj $\bar{v}(A_2) = 1$. Zo sémantických vlastností spojky \wedge teda dostávame $\bar{v}(A_1 \wedge A_2) = 1$.

Teda existuje model S , ktorý je zároveň modelom pre T .

2. Na základe predošlej lemy vieme, že formúl výrokovej logiky je spočítateľne veľa a teda sa dajú zoradiť do postupnosti. Nech je to postupnosť $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Zostrojme množiny S_i nasledovne:

$$S_0 = T$$

$$S_{i+1} = S_i \cup \{A_i\} \quad \text{ak každá konečná podmnožina množiny}$$

$$S_i \cup \{A_i\} \text{ je splniteľná}$$

$$S_{i+1} = S_i \cup \{\neg A_i\} \quad \text{v opačnom prípade}$$

Potom množina $S = \bigcup_{i \geq 0} S_i$ má požadované vlastnosti. ♣

Dôsledok: Nech T je množina formúl a A je formula výrokovej logiky. Potom $T \models A \leftrightarrow T' \models A$ platí pre nejakú konečnú podmnožinu $T' \subseteq T$.

Dôkaz: Platí: $T \models A \leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ je nespĺniteľná. Z predošlej vety vyplýva, že musí existovať konečná nespĺniteľná množina $T_0 \subseteq T \cup \{\neg A\}$. Definujme $T' = T_0 \setminus \{\neg A\}$. Potom platí: $T_0 = T' \cup \{\neg A\}$ je nespĺniteľná $\leftrightarrow T' \models A$.

2.3 Formálny systém výrokovej logiky

Existujú dva hlavné prístupy k formálnemu systému logiky pomenované podľa dvoch významných matematikov. Prvý prístup — Gentzenovský — presadzuje menší počet axióm a väčší počet odvodzovacích pravidiel vo formálnom systéme. Naopak druhý prístup — Hilbertovský — presadzuje väčší počet axióm a menší počet odvodzovacích pravidiel. Na tejto prednáške sa budeme pridzriavať práve Hilbertovského prístupu.

Definícia:

1. Hovoríme, že konečná postupnosť formúl A_1, A_2, \dots, A_n je dôkazom (odvodením) formuly A , ak A_n je formula A a pre ľubovoľné $i \leq n$ A_i je buď axióma alebo vyplýva z predchádzajúcich formúl $A_j, j < i$ podľa niektorého z odvodzovacích pravidiel.
2. Ak existuje dôkaz formuly A hovoríme, že A je dokázateľná a píšeme $\vdash A$. Hovoríme taktiež, že A je teoréma (veta) formálneho systému.

Definícia: Formálny systém výrokovej logiky pozostáva z nasledujúcich zložiek:

1. Jazyk tvoria množina P prvotných formúl, symboly pre logické spojky a pomocné symboly
2. Tri schémy axióm (Nech A, B, C sú ľubovoľné formuly výrokovej logiky):

$$\begin{aligned} (A \rightarrow (B \rightarrow A)) & \quad (A1) \\ ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) & \quad (A2) \\ ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) & \quad (A3) \end{aligned}$$

3. Pravidlo odvodenia "modus ponens":

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad (MP)$$

Slovom: z formúl $A, A \rightarrow B$ odvodí formulu B

Príklad: $\vdash A \rightarrow A$

Dôkaz:

1. krok $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (A1)
2. krok $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (A2)
3. krok $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1, 2, MP)
4. krok $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A))$ (A1)
5. krok $\vdash A \rightarrow A$ (3, 4, MP)

Definícia: Nech T je množina formúl výrokovej logiky a A, A_1, \dots, A_n sú formuly výrokovej logiky. Hovoríme, že postupnosť formúl A_1, \dots, A_n je dôkazom (odvodením) formuly A z predpokladov T , ak A_n je formula A a pre ľubovoľné $i \leq n$ je A_i buď axióma výrokovej logiky alebo formula z množiny T alebo A_i je odvodená z formúl A_1, A_2, \dots, A_{i-1} pomocou niektorého pravidla odvodenia. Hovoríme, že formula A je odvoditeľná z predpokladov T , ak existuje dôkaz (odvodenie) A z predpokladov T a označujeme $T \vdash A$.

2.4 Veta o dedukcii

Veta: Nech T je množina formúl výrokovej logiky; A, B sú formuly. Potom

$$T \vdash A \rightarrow B \leftrightarrow T, A \vdash B$$

Dôkaz:

Predpokladajme, že platí $T \vdash A \rightarrow B$. Teda existuje $A_1, A_2, \dots, A_n (A \rightarrow B)$, čo je dôkaz formuly $A \rightarrow B$. Rozšírme T o formulu A ($T \cup \{A\} \equiv T, A$). Použijeme pravidlo modus ponens a dostávame $T, A \vdash B$.

Predpokladajme, že platí $T, A \vdash B$, chceme dokázať $T \vdash A \rightarrow B$. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na dĺžku odvodenia formuly B z predpokladov T, A .

- báza indukcie: $n = 1$
rozlíšime 3 prípady:

1. formula B je totožná s formulou A
Platí $\vdash A \rightarrow A$ teda bude platiť aj $T \vdash A \rightarrow A$
2. formula B je axióma
Platí $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ aj $\vdash B$. Pomocou pravidla modus ponens odvodíme $\vdash A \rightarrow B$. A teda aj $T \vdash A \rightarrow B$.
3. formula B je niektorá z formúl z množiny T
Platí $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ aj $\vdash B$. Pomocou pravidla modus ponens odvodíme $T \vdash A \rightarrow B$.

- indukčný krok:

Prepokladajme, že tvrdenie vety platí pre každé $s < n$. Máme dokázať, že tvrdenie platí aj pre n . Vieme, že $T, A \vdash B$, teda existuje postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_n(B)$ – dôkaz formuly B . Rozoberme možnosti ako sa do tejto postupnosti mohla dostať posledná formula $A_n \equiv B$:

1. formula B je totožná s formulou A (už sme dokazovali)
2. formula B je axióma (už sme dokazovali)
3. formula B je niektorá z formúl z množiny T (už sme dokazovali)
4. formula B vznikla použitím pravidla modus ponens na niektoré dve formuly $A_i, A_j \equiv A_i \rightarrow B$ ($i, j < n$)

Z indukčného predpokladu dostávame $T \vdash A \rightarrow A_j$ a $T \vdash A \rightarrow A_i$. Použitím schémy (A2) dostaneme $\vdash (A \rightarrow (A_i \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow A_i) \rightarrow (A \rightarrow B)$. Dvojnásobným použitím pravidla modus ponens nakoniec dostávame $T \vdash A \rightarrow B$.



2.5 Postove vety

Lema 1:

1. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
2. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
3. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
5. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$
6. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

Dôkaz: Prvé tvrdenie:

- | | | |
|---------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 1. krok | $\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | (A1) |
| 2. krok | $\neg A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$ | (VD) |
| 3. krok | $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (A3) |
| 4. krok | $\neg A \vdash (A \rightarrow B)$ | (2, 3, MP) |
| 5. krok | $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (VD) |

Aby som neporušil peknú tradíciu matfyzáckych skrípt prenechávam zvyšné dôkazy na usilovného čitateľa.

Lema 2: (o neutrálnej formule) *Nech T je množina formúl výrokovej logiky; A, B sú formuly; nech $T, A \vdash B$ a $T, \neg A \vdash B$. Potom $T \vdash B$.*

Dôkaz:

- | | | |
|----------|-----------------------------------------------|------------------|
| 1. krok | $T, \neg A \vdash B$ | (predpoklad) |
| 2. krok | $T \vdash \neg A \rightarrow B$ | (VD) |
| 3. krok | $T \vdash \neg B \rightarrow \neg\neg A$ | (Lema 1(4.), MP) |
| 4. krok | $T, \neg B \vdash \neg\neg A$ | (VD) |
| 5. krok | $T, \neg B \vdash A$ | (Lema 1(2.), MP) |
| 6. krok | $T, A \vdash B$ | (predpoklad) |
| 7. krok | $T \vdash A \rightarrow B$ | (VD) |
| 8. krok | $T, \neg B \vdash B$ | (5, 7, MP) |
| 9. krok | $T \vdash \neg B \rightarrow B$ | (VD) |
| 10. krok | $\vdash (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$ | (Lema 1(6.)) |
| 11. krok | $T \vdash B$ | (9, 10, MP) |

Definícia: *Nech B je formula výrokovej logiky, nech v je ohodnotenie prvotných formúl. B^v označuje formulu B , ak $\bar{v}(B) = 1$ resp. formulu $\neg B$, ak $\bar{v}(B) = 0$.*

Lema 3: *Nech v je valuácia prvotných formúl. Nech p_1, p_2, \dots, p_n sú všetky prvotné formuly, ktoré sa vyskytujú vo formule A . Potom*

$$p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$$

Dôkaz: matematickou indukciou vzhľadom na konštrukciu formuly A

1. báza indukcie: A je prvotná formula, teda $p^v \vdash p^v$

2. indukčný krok:

- formula A je tvaru $\neg B$ a $\bar{v}(B) = 0$:
Teda $B^v = \neg B = A$, ďalej platí $A^v = (\neg B)^v$ a zároveň $\bar{v}(\neg B) = 1$, teda $A^v = A$. Z indukčného predpokladu $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash B^v$ môžeme teda odvodiť $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$
- formula A je tvaru $\neg B$ a $\bar{v}(B) = 1$:
Teda $B^v = B$, ďalej platí $A^v = (\neg B)^v$ a zároveň $\bar{v}(\neg B) = 0$, teda $A^v = \neg \neg B$. Z indukčného predpokladu $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash B^v$ s pomocou teóremy $\vdash B \rightarrow \neg \neg B$ môžeme teda odvodiť $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$
- formula A je tvaru $C \rightarrow D$ a $\bar{v}(C) = \bar{v}(D) = 1$:
Teda $C^v = C$, $D^v = D$, $A^v = C \rightarrow D$. Z indukčného predpokladu $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash D^v$ s pomocou teóremy $\vdash D \rightarrow (C \rightarrow D)$ môžeme teda odvodiť $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$
- formula A je tvaru $C \rightarrow D$ a $\bar{v}(C) = 1 \wedge \bar{v}(D) = 0$:
Teda $C^v = C$, $D^v = \neg D$, $A^v = \neg(C \rightarrow D)$. Z indukčného predpokladu $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash C^v$ a $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash D^v$ s pomocou teóremy $\vdash C \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg(C \rightarrow D))$ môžeme teda odvodiť $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$
- formula A je tvaru $C \rightarrow D$ a $\bar{v}(C) = 0$:
Teda $C^v = \neg C$, $A^v = C \rightarrow D$. Opäť z indukčného predpokladu $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash C^v$ s pomocou teóremy $\vdash \neg C \rightarrow (C \rightarrow D)$ môžeme teda odvodiť $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$

Veta: (slabá forma vety o úplnosti)

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A$$

(: Pre výrokovú formulu A výrokovej logiky platí, že je dokázateľná práve vtedy, keď je tautológia :)

Dôkaz:

Implikáciu zľava doprava dokážeme tak, že ukážeme, že axiomy (A1), (A2) a (A3) sú tautológie (napr. tabulkovou metódou alebo sporom) a ďalej že pravidlo modus ponens je korektné (t.j. aplikovaním na tautológie dostaneme opäť tautológiu).

Implikáciu sprava doľava dokážeme nasledovne:

Z lemy 3 vieme, že

$$p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$$

Keďže A je tautológia, tak $A^v = A$, čiže

$$p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A$$

Uvažujme dve ohodnotenia v_1 a v_2 také, že

$$v_1(p_n) = 1, v_2(p_n) = 0 \text{ a } v_1(p_i) = v_2(p_i) \text{ pre } i < n$$

Dostávame

$$p_1^w, p_2^w, \dots, p_{n-1}^w, p_n \vdash A \text{ a } p_1^w, p_2^w, \dots, p_{n-1}^w, \neg p_n \vdash A$$

Z toho na základe lemy 2 vieme, že

$$p_1^w, p_2^w, \dots, p_{n-1}^w \vdash A$$

Viacnásobným aplikovaním tohto postupu sa dostaneme až k tvrdeniu $\vdash A$. ♣

Definícia: *Hovoríme, že formálny systém je sporný, ak každá jeho formula je dokázateľná. V opačnom prípade je formálny systém bezsporný.*

Definícia: *Ak T je množina formúl (nejakého formálneho systému) hovoríme, že T je sporná, ak každá formula je dokázateľná z predpokladov T . Inak hovoríme, že množina formúl T je bezsporná.*

Poznámka: Formálny systém je bezsporný, ak je bezsporná prázdna množina predpokladov.

Definícia: *Bezsporné formálne systémy nazývame konzistentné (sporné naopak inkonzistentné).*

Poznámka: Sémantický ekvivalent bezspornej množiny formúl T je jej splniteľnosť.

Dôsledok: *Množina formúl výrokovej logiky je bezsporná práve vtedy, keď je splniteľná.*

Dôkaz: Predpokladajme, že množina formúl T je splniteľná – ukážeme, že je bezsporná. Nech v je ohodnotenie prvotných formúl, ktoré je modelom T ($\forall A \in T \bar{v}(A) = 1$). Korektnosť pravidla modus ponens nám zaručuje, že neodvodíme žiadnu formulu B takú, že $\bar{v}(B) = 0$.

Obrátene: predpokladajme, že T je bezsporná – ukážeme, že má model (je splniteľná). Budeme postupovať sporom. Nech teda T nie je splniteľná. Potom podľa dôsledku vety o kompaktnosti určite existuje konečná podmnožina $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq T$, ktorá nie je splniteľná. Pre každé ohodnotenie v sa nájde formula A_i , že platí $\bar{v}(A_i) = 0$, čiže formula $X \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$ je tautológia. Ďalej platí $T \vdash A_i$ pre $i = \overline{1, n}$. Použitím vety $T \vdash A \wedge T \vdash B \Rightarrow T \vdash A \wedge B$ (ktorú neskôr dokážeme!) dostávame $T \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, teda $T \vdash \neg X$. Čiže je dokázateľná formula X aj jej negácia. Použitím tautológie $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$, pričom za B dosadíme X dostávame $T \vdash C$, kde C je ľubovoľná formula. A to je spor s bezspornosťou. ♣

Veta: (silná forma vety o úplnosti) *Pre ľubovoľnú množinu formúl T a formulu A platí:*

$$T \vdash A \Leftrightarrow T \models A$$

Dôkaz: Implikáciu zľava doprava dokážeme rovnako ako pri slabej forme vety.

Obrátene nech $T \models A$, podľa dôsledku vety o kompaktnosti platí, že existuje konečná podmnožina $T_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq T$, že platí $T_0 \models A$.

$$T_0 \models A \iff \models A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots))$$

⇕ pomocou slabej formy vety o úplnosti

$$\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots))$$

⇕ pomocou vety o dedukcii

$$T_0 \vdash A \iff A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A$$

Z $T_0 \vdash A$ už triviálne vyplýva aj $T \vdash A$. ♣

2.6 Ďalšie vety

Lema 4:

1. $A \wedge B \vdash A$
2. $A \wedge B \vdash B$
3. $A, B \vdash A \wedge B$

Dôkaz: Prvé tvrdenie:

1. krok $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ (Lema 1(1.))
2. krok $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A$ (Lema 1(4.))
3. krok $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A$ (1, 2, MP)
4. krok $\neg\neg A \rightarrow A$ (Lema 1(2.))
5. krok $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$ (3, 4, jednoduchý sylogizmus)
6. krok $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$ (VD)
7. krok $A \wedge B \vdash A$ ($A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$)

Dôkaz ďalších tvrdení už prenechávam usilovnému čitateľovi.

Poznámka: Pravidlo jednoduchého sylogizmu:

$$\frac{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C}{C}$$

Poznámka: $A \leftrightarrow B$ je skrátenejší zápis pre $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Dôsledok:

1. $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$
2. $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$
3. $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$
4. ak $\vdash A \leftrightarrow B$, potom $T \vdash A$ práve vtedy, keď $T \vdash B$

Dôsledok:

1. $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$
2. $\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
3. $\vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)) \leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$

Veta: Nech formula A' vznikne z formuly A nahradením niektorých podformúl A_1, A_2, \dots, A_n formulami A'_1, A'_2, \dots, A'_n . Keď platí $\vdash A_i \leftrightarrow A'_i$ $i = \overline{1, n}$, potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Dôkaz: matematickou indukciou vzhľadom na konštrukciu formuly A

1. báza indukcie triviálne platí

2. indukčný krok:

- nech $A \equiv \neg B$

- | | | |
|---------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1. krok | $\vdash B \leftrightarrow B'$ | (indukčný predpoklad) |
| 2. krok | $\vdash (B \rightarrow B') \rightarrow (\neg B' \rightarrow \neg B)$ | (Lema 1(4.)) |
| | $\vdash (B' \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg B')$ | (Lema 1(4.)) |
| 3. krok | $\vdash \neg B' \rightarrow \neg B$ | (1, 2, MP) |
| | $\vdash \neg B \rightarrow \neg B'$ | (1, 2, MP) |
| 4. krok | $\vdash \neg B' \leftrightarrow \neg B$ | (3) |
| 5. krok | $\vdash A \leftrightarrow A'$ | ($A \equiv \neg B$) |

- nech $A \equiv (B \rightarrow C)$

- | | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1. krok | $\vdash B \leftrightarrow B'$ | (IP) |
| | $\vdash C \leftrightarrow C'$ | (IP) |
| 2. krok | $B', B' \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow C' \vdash C'$ | (sylogizmus) |
| 3. krok | $B' \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow C' \vdash B' \rightarrow C'$ | (VD) |
| 4. krok | $B' \rightarrow B, C \rightarrow C' \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (B' \rightarrow C')$ | (VD) |
| 5. krok | $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (B' \rightarrow C')$ | (1, 4, MP) |
| 6. krok | symetricky dokážeme opačnú implikáciu | (—) |
| 7. krok | $\vdash A \leftrightarrow A'$ | (5, 6) |

Lema 5: (De Morganove pravidlá)

- $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Dôkaz:

$$\begin{aligned}
 \vdash \neg(A \wedge B) &\leftrightarrow \neg\neg(A \rightarrow \neg B) \\
 &\leftrightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg B) \\
 &\leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\
 \vdash \neg(A \vee B) &\leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \\
 &\leftrightarrow \neg(\neg A \rightarrow B) \\
 &\leftrightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \\
 &\leftrightarrow \neg A \wedge \neg B
 \end{aligned}$$

Dôsledok:

- $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$
 $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$
- $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$
- $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

Dôkaz: Prenechávam na čitateľa.

Veta: (o dôkaze rozborom prípadov) *Nech T je množina formúl výrokovej logiky a A, B, C sú formuly výrokovej logiky. Potom platí*

$$T, (A \vee B) \vdash C \Leftrightarrow T, A \vdash C \wedge T, B \vdash C$$

Dôkaz: Pri dôkaze implikácie zľava doprava stačí využiť predošlú vetu (resp. dôsledok).

Obrátená implikácia:

- | | | |
|---------|--------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1. krok | $T, A \vdash C \Rightarrow T \vdash A \rightarrow C$ | (IP, VD) |
| | $T, B \vdash C \Rightarrow T \vdash B \rightarrow C$ | (IP, VD) |
| 2. krok | $T \vdash \neg C \rightarrow \neg A \Rightarrow T, \neg C \vdash \neg A$ | (1, Lema 1(4.), VD) |
| | $T \vdash \neg C \rightarrow \neg B \Rightarrow T, \neg C \vdash \neg B$ | (1, Lema 1(4.), VD) |
| 3. krok | $T, \neg C \vdash \neg A \wedge \neg B$ | (Lema 4(3.)) |
| 4. krok | $T \vdash \neg C \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | (VD) |
| 5. krok | $T \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg\neg C$ | (Lema 1(4.)) |
| 6. krok | $T \vdash \neg\neg A \vee \neg\neg B \rightarrow \neg\neg C$ | (Lema 5(1.)) |
| 7. krok | $T \vdash A \vee B \rightarrow C$ | (Lema 1(2.)) |
| 8. krok | $T, A \vee B \vdash C$ | (VD) |

Dôsledok: (distributivita konjunkcií a disjunkcií)

1. $\vdash (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
2. $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Dôkaz: Prenechávam na čitateľa (je trochu dlhší, ale aspoň získate prax).

2.7 Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar

Definícia: Prvotné formuly a ich negácie nazývame literály.

Veta: Každá formula A výrokovej logiky je ekvivalentná istej formule tvaru

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n,$$

kde každá z formúl A_i $1 \leq i \leq n$ je disjunkciou literálov. Tento tvar nazývame konjunktívny normálny tvar.

Formula A je takiež ekvivalentná istej formule tvaru

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n,$$

kde každá z formúl B_i $1 \leq i \leq n$ je konjunkciou literálov. Tento tvar nazývame disjunktívny normálny tvar.

Dôkaz: matematickou indukciou vzhľadom na zložitosť formuly A

1. báza indukcie: ak A je prvotná formula, tak je automaticky v konjunktívnom aj disjunktívnom normálnom tvare

2. indukčný krok:

- nech $A \equiv \neg B$
Podľa IP existujú pre B formuly B_k (resp. B_d) v KNF (resp. DNF). Keď tieto formuly znegujeme dostaneme formuly ekvivalentné s A v DNF (resp. KNF).
- nech $A \equiv (B \rightarrow C)$
Platí $\vdash (B \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg B \vee C)$. Ďalej podľa IP vieme, že $\vdash B \leftrightarrow B_d$ a $\vdash C \leftrightarrow C_k$. Dosadením $B := B_d$, $C := C_k$ do formuly $\neg B \vee C$ sa B_d po znegovaní zmení na B'_k a využitím distributivity konjunkcií a disjunkcií môžeme formulu upraviť na KNF.
Ak použijeme zvyšné dve tvrdenia IP a dosadíme $B := B_k$, $C := C_d$ po znegovaní dostaneme priamo formulu $B'_d \vee C_d$ v DNF. ♣

Veta: *Nech A, A_1, A_2, \dots, A_n sú formuly a p_1, p_2, \dots, p_n sú navzájom rôzne prvotné formuly, ktoré sa vyskytujú v A . Nech formula A' vznikne z formuly A nahradením každého výskytu p_i formulou A_i $i = \overline{1, n}$. Potom $\vdash A \Rightarrow \vdash A'$.*

Dôkaz: Ak je A dokázateľná formula, tak z Postovej vety vyplýva, že je tautológia. A teda pre ľubovoľné ohodnotenie v prvotných formúl je $\bar{v}(A) = 1$. Ak budeme namiesto $v(p_i)$ vo formule A uvažovať $\bar{v}(A_i)$ vo formule A' nemôže sa nijako zmeniť pravdivostná hodnota, pretože štruktúra formuly zostala rovnaká a na ohodnotení prvkov tejto štruktúry nezáleží. Teda A' je tautológia a opätovným použitím Postovej vety dostávame, že A' je dokázateľná.

♣

3 Predikátová logika

3.1 Syntax predikátovej logiky

Definícia: *Jazyk 1. rádu obsahuje:*

1. *neohraničene veľa symbolov pre premenné $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$*
2. *symboly pre logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$*
3. *symboly pre kvantifikátory \forall, \exists*
4. *predikátové symboly P, Q, R, \dots ku každému symbolu je priradené prirodzené číslo väčšie alebo rovné 1, ktoré vyjadruje jeho -árnosť*
5. *funkčné symboly f, g, h, \dots ku každému symbolu je priradené prirodzené číslo väčšie alebo rovné 0, ktoré vyjadruje jeho -árnosť*
6. *pomocné symboly – zátvorky, čiarku, \dots*
7. *Špeciálny predikát " $=$ " - binárny predikát pre rovnosť*

Príklad: (jazykov 1. rádu)

1. Jazyk teórie ostrého usporiadania: je jazyk s rovnosťou (kvôli trichotómii), ktorý obsahuje jediný špeciálny symbol " $<$ " – binárny predikátový symbol
2. Jazyk teórie grúp: jazyk 1. rádu s rovnosťou, ktorý obsahuje dva špeciálne symboly: " 1 " – nulárny funkčný symbol pre jednotkový prvok a " $+$ " – binárny funkčný symbol pre grupovú operáciu
3. Jazyk teórie telies: jazyk 1. rádu s rovnosťou, ktorý obsahuje dva binárne funkčné symboly: " $+$ " a " \cdot " (sčítanie a násobenie) a dva nulárne funkčné symboly pre nulový a jednotkový prvok: " 0 " a " 1 "
4. Jazyk teórie množín: jazyk 1. rádu s rovnosťou, ktorý obsahuje jediný špeciálny symbol " \in " – binárny predikátový symbol označujúci patričnosť
5. Jazyk elementárnej aritmetiky: jazyk 1. rádu s rovnosťou, obsahujúci " 0 " – nulárny funkčný symbol, S – unárny funkčný symbol pre nasledovníka, " $+$ " a " \cdot " – binárne funkčné symboly pre sčítanie a násobenie

Definícia: (Term)

1. *Každá premenná a konštanta (nulárny funkčný symbol) je term.*
2. *Ak výrazy t_1, t_2, \dots, t_n sú termy a f je n -árny funkčný symbol, potom $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je term.*
3. *Každý term vznikne konečným počtom použítí pravidiel (1) a (2).*

Definícia: (Formula)

1. *Nech P je n -árny predikátový symbol a nech t_1, t_2, \dots, t_n sú termy. Potom výraz $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je atomická formula.*
2. *Nech A, B sú formuly, potom $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ sú formuly.*
3. *Ak x je premenná, A je formula, potom $(\forall x) A, (\exists x) A$ sú formuly*
4. *Každá formula vznikne konečným počtom použítí pravidiel (1), (2) a (3).*

Definícia: (Podformula) *Nech A je formula. Jej podformulou sa nazýva:*

1. len ona sama, ak A je atomická formula
2. ona sama a každá podformula formuly B , ak $A = (\neg B)$ alebo $A = (\forall x)B$, $A = (\exists x)B$
3. ona sama a každá podformula formúl B a C , ak $A = (B \wedge C)$, $A = (B \vee C)$, $A = (B \rightarrow C)$ alebo $A = (B \leftrightarrow C)$
4. žiadne iné podformuly okrem týchto nepoznáme

Definícia:

1. Hovoríme, že term s je podtermom termu t , ak s je podslovom slova t .
2. Hovoríme, že formula B je podformulou formuly A , ak B je podslovom slova A .
3. Hovoríme, že daný výskyt premennej x vo formule A je viazaný, ak je súčasťou nejakej jej podformuly tvaru $(\forall x)B$ alebo $(\exists x)B$. Ak nie je daný výskyt premennej x viazaný, hovoríme, že je voľný.
4. Hovoríme, že premenná x je voľná vo formule A , ak tam má voľný výskyt. Hovoríme, že premenná x je viazaná vo formule A , ak tam má viazaný výskyt. (Toto je trošku voľný spôsob definície, pripúšťa totiž obidva interpretácie – riešenie spočíva v tom, že viazané premenné možno premenovať.)
5. Hovoríme, že formula A je otvorená, ak neobsahuje žiadnu viazanú premennú. Hovoríme, že formula A je uzavretá, ak neobsahuje žiadnu voľnú premennú. V oboch prípadoch A nazývame formulou s čistými premennými.

3.2 Sémantika predikátovej logiky

Definícia: Nech L je jazyk 1. rádu. Relačná štruktúra \mathcal{M} , ktorá obsahuje:

1. neprázdnu množinu M (univerzum), ktorej prvky sa nazývajú individua
2. zobrazenia $f_M : M^n \rightarrow M$ pre každý n -árny funkčný symbol f jazyka L
3. n -árnu reláciu $P_M \subseteq M^n$ pre každý n -árny predikátový symbol $p \in L$ okrem symbolu pre rovnosť.

sa nazýva realizácia jazyka L .

Poznámka: Predikát rovnosti chápeme ako rovnosť individuí.

Definícia: Zobrazenie e , ktoré každej premennej x priradí nejaké individuum z univerza \mathcal{M} nazývame ohodnotenie premenných. Ak t je term, potom zápis $t[e]$ označuje realizáciu termu t pri ohodnotení e v relačnej štruktúre \mathcal{M} .

Lema: Nech x_1, x_2, \dots, x_n sú všetky premenné, ktoré sa vyskytujú v terme t . Ak e a e' sú dve ohodnotenia premenných také, že platí $e(x_i) = e'(x_i)$ pre $i = \overline{1, n}$, potom $t[e] = t[e']$.

Dôkaz: matematickou indukciou vzhľadom na t

1. $t \equiv x$
 $e(x) = e'(x) \Rightarrow t[e] = t'[e]$
2. $t \equiv f(t_1, t_2, \dots, t_n)$; t_1, t_2, \dots, t_n sú termy
 $t[e] = f(t_1[e], t_2[e], \dots, t_n[e])$
 $t[e'] = f(t_1[e'], t_2[e'], \dots, t_n[e'])$
Z indukčného predpokladu vyplýva, že $t[e] = t'[e]$.

Definícia: (Tarského definícia pravdivosti formuly) Nech \mathcal{M} je realizácia jazyka L , e je ohodnotenie premenných formuly A . Indukciou podľa zložitosti formuly A budeme definovať pravdivosť formuly A v relačnej štruktúre \mathcal{M} pri ohodnotení e . Označujeme $\mathcal{M} \models A[e]$.

1. ak A je atomická formula tvaru $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, kde P je n -árny predikátový symbol rôzny od "=" a t_1, t_2, \dots, t_n sú termy. Potom $\mathcal{M} \models A[e]$, ak $(t_1[e], t_2[e], \dots, t_n[e]) \in P_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$
2. ak A je atomická formula tvaru $t_1 = t_2$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$, ak $t_1[e] = t_2[e]$ (t.j. ak oba termy sú realizované tým istým individúom)
3. ak A je tvaru $\neg B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$, keď $\mathcal{M} \not\models B[e]$
4. ak A je tvaru $B \rightarrow C$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$, keď $\mathcal{M} \not\models B[e]$ alebo $\mathcal{M} \models C[e]$
5. ak A je tvaru $(\forall x)B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$, ak pre ľubovoľné individuum $m \in M$ platí $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$
6. ak A je tvaru $(\exists x)B$, potom $\mathcal{M} \models A[e]$, ak $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$ pre nejaké individuum $m \in M$

Hovoríme, že formula A je splnená v \mathcal{M} a píšeme $\mathcal{M} \models A$, ak je pravdivá pre ľubovoľné ohodnotenie e .

Poznámka: Bod č. 6 sme definovali 'zbytočne', keďže platí $(\exists x)B \leftrightarrow \neg[(\forall x)\neg B]$. Z rovnakého dôvodu sme nedefinovali pravdivosť pre spojky $\wedge, \vee, \leftrightarrow$, keďže spojky \neg, \rightarrow tvoria úplný systém.

Lema: Nech x_1, x_2, \dots, x_n sú všetky voľné premenné formuly A . Ohodnotenia e, e' také, že $e(x_i) = e'(x_i)$ pre $i = \overline{1, n}$. Potom $\mathcal{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e']$.

Dôkaz: Prenechávam na čitateľa. (Návod: použite matematickú indukciu na zložitost formuly A . V báze indukcie rozoberte prípad, keď A je atomická formula, v indukčnom kroku prípady, keď $A \equiv \neg B, A \equiv B \rightarrow C$ a $A \equiv (\forall x)B$.)

Poznámka: (k Tarského definícii pravdivosti) Ak je A tvaru $(\forall x)B$, jej pravdivosť ($\mathcal{M} \models A[e]$) nezávisí od ohodnotenia x . Podobne aj pre existenčný kvantifikátor. Teda, ak zistujeme, či $\mathcal{M} \models A$, stačí zistiť, či $\mathcal{M} \models A[e]$ platí aspoň pre jedno ohodnotenie e .

Poznámka: Ak uzavretá formula A je splnená v \mathcal{M} , tak hovoríme, že je pravdivá v \mathcal{M} .

Definícia: Nech x_1, x_2, \dots, x_n sú všetky voľné premenné vo formule A . Potom formulu $A' = (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)A$ nazývame uzáver formuly A .

Lema: Formula A je splnená v relačnej štruktúre \mathcal{M} práve vtedy, keď A' (jej uzáver) je pravdivý v \mathcal{M} .

Dôkaz: Prenechávam na čitateľa.

3.3 Substitúcia termov za premenné

Označenie: $t_{x_1, x_2, \dots, x_n}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ – term, ktorý vznikne tak, že každý výskyt x_i nahradíme t_i (naraz!!)

Poznámka: Indukciou na zložitost termu t môžeme dokázať, že $t_{x_1, x_2, \dots, x_n}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ je opäť term.

Označenie: $A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ – formula, ktorá vznikne tak, že každý výskyt x_i nahradíme t_i (naraz!!)

Poznámka: Indukciou na zložitosť formuly A môžeme dokázať, že $A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ je opäť formula.

Definícia: Hovoríme, že term t je substituovateľný za x do formuly A , ak pre každú premennú y obsiahnutú v t , žiadna podformula tvaru $(\forall y)B$, $(\exists y)B$ formuly A neobsahuje (z hľadiska formuly A) žiaden voľný výskyt premennej x .

Poznámka 1: Ak formula A je otvorená, tak potom za ľubovoľnú premennú x , ktorá sa vyskytuje v A je substituovateľný ľubovoľný term t .

Poznámka 2: Ak ľubovoľná premenná y vyskytujúca sa v terme t vystupuje vo formule A voľne (nie je viazaná v A), tak potom t je substituovateľný za ľubovoľnú voľnú premennú.

Lema: Nech \mathcal{M} je realizácia jazyka L ; A je formula; t_1, t_2, \dots, t_n sú termy jazyka L a e je ohodnotenie také, že $t_i[e] = m_i$ (m_i sú individuá) $i = \overline{1, n}$. Potom:

1. $t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n][e]$ je individuum $t(e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n))$
2. $\mathcal{M} \models A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$

Dôkaz: Prvé tvrdenie:

1. t' nech označuje term $t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$
 - a) $t \equiv x \quad x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow t' = t[e]$
 - b) $t \equiv x \quad x \in \{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow t' = t_i[e]$
2. $t \equiv f(s_1, \dots, s_n)$
Z ind. predpokladu: $s_i[t_1, \dots, t_n][e] = s_i[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \quad i = \overline{1, n}$.
Teda $t'[e] = f_{\mathcal{M}}(s_1[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)], \dots, s_n[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)])$

Druhé tvrdenie: matematickou indukciou vzhľadom na zložitosť formuly A

1. Nech A je atomická formula $P(s_1, s_2, \dots, s_n)$, s_i sú termy.
Označme $A' \equiv A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[t_1, t_2, \dots, t_n]$.
 $\mathcal{M} \models A'[e] \Leftrightarrow (s_1[t_1, \dots, t_n][e], \dots, s_n[t_1, \dots, t_n][e]) \in P_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (s_1[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)], \dots, s_n[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]) \in P_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$

Nech A je atomická formula tvaru $t = s$.

Označme $A' \equiv t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] = s_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.
 $\mathcal{M} \models A'[e] \Leftrightarrow t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n][e] = s_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n][e] \Leftrightarrow t[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] = s[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$

2. Prípady, keď $A = \neg B$ alebo $A = B \rightarrow C$ prenechávam na čitateľa. Rozoberieme však prípad, keď $A = (\forall x)B$.

- Nech z je niektorá z premenných x_1, x_2, \dots, x_n . BUNV predpokladajme, že $z \equiv x_1$.
 $\mathcal{M} \models A'[e] \Leftrightarrow \forall k \in M : \mathcal{M} \models B_{x_2, \dots, x_n}[t_2, \dots, t_n][e(x_1/k)] \Leftrightarrow \forall k \in M : \mathcal{M} \models B[e(x_1/k, x_2/m_2, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e(x_2/m_2, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e(x_1/k, \dots, x_n/m_n)]$
Posledná ekvivalencia vyplýva z toho, že pravdivosť A v \mathcal{M} od ohodnotenia e nezávisí. Stačí teda dosadiť $k := m_1$.
- Nech z je rôzna od x_1, x_2, \dots, x_n
— postup je zjednodušením predchádzajúceho prípadu ♣

3.4 Axiómy predikátovej logiky

Definícia: Axiómy z výrokovej logiky:

$$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \quad (\text{A1})$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (\text{A2})$$

$$((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (\text{A3})$$

Odvodzovacie pravidlo: "modus ponens"

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Veta: *Nech A je formula jazyka L predikátovej logiky, nech P je množina všetkých atomic-
kých formúl jazyka L a všetkých formúl tvaru $(\exists x)B$ a $(\forall x)B$, kde x je nejaká premenná
jazyka L a B formula jazyka L . Ak A je tautológia vo výrokovej logike nad P , potom A je
teorémou predikátovej logiky.*

Dôkaz: TODO

Definícia: Nové axiómy:

$$(\forall x)A \rightarrow A_x[t] \quad (\text{A4})$$

$$(\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)B) \quad (\text{A5})$$

Odvodzovacie pravidlo: "pravidlo zovšeobecnenia (generalizácie)"

$$\frac{A, x}{(\forall x)A}$$

Lema 1: *Ak $\vdash A \rightarrow B$ a premenná x nemá voľný výskyt v A , potom $\vdash A \rightarrow (\forall x)B$.*

Dôkaz:

1. krok $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B)$ (predpoklad, GEN)
2. krok $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)B)$ (A5)
3. krok $\vdash A \rightarrow (\forall x)B$ (1, 2, MP)

Lema 2: *Pre ľubovoľné formuly A , B a term t platí:*

1. $\vdash A_x[t] \rightarrow (\exists x)A$
2. *ak $\vdash A \rightarrow B$ a premenná x nemá voľný výskyt v B , potom $\vdash (\exists x)A \rightarrow B$*

Dôkaz:

1. krok $\vdash (\forall x)\neg A \rightarrow \neg A_x[t]$ (A4)
2. krok $\vdash \neg\neg(\forall x)\neg A \rightarrow (\forall x)\neg A$
3. krok $\vdash \neg(\exists x)A \rightarrow (\forall x)\neg A$ ($(\exists x)A \equiv \neg[(\forall x)\neg A]$)
4. krok $\vdash \neg(\exists x)A \rightarrow \neg A_x[t]$ (1, 3, sylogizmus)
5. krok $\vdash A_x[t] \rightarrow (\exists x)A$

1. krok $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
2. krok $\vdash (\forall x)(\neg B \rightarrow \neg A)$ (1, predpoklad, MP, GEN)
3. krok $\vdash (\forall x)(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\forall x)\neg A)$ (A5)
4. krok $\vdash \neg B \rightarrow (\forall x)\neg A$ (2, 3, MP)
5. krok $\vdash \neg(\forall x)\neg A \rightarrow \neg\neg B$
6. krok $\vdash (\exists x)A \rightarrow B$

Lema 3: *Nech A' je inštancia formuly A (t.j. A' je tvaru $A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$). Potom ak
 $\vdash A$, tak $\vdash A'$.*

Dôkaz: indukciou vhladom na n – počet substituovaných termov

1. báza indukcie:

1. krok $\vdash A \Rightarrow \vdash (\forall x_1)A$ (predpoklad, GEN)
2. krok $\vdash (\forall x_1)A \rightarrow A_{x_1}[t_1]$ (A4)
3. krok $\vdash A_{x_1}[t_1]$ (1, 2, MP)

2. indukčný krok: Nech z_1, \dots, z_n sú premenné, ktoré sa nevyskytujú v A ani v termoch t_1, \dots, t_n . Potom môžeme uplatniť postup z bázy indukcie nasledovne:

$$\begin{aligned} &\vdash A \\ &\vdash A_{x_1}[z_1] \\ &\vdash A_{x_1, x_2}[z_1, z_2] \\ &\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[z_1, \dots, z_n] \equiv B \\ &\vdash B \\ &\vdash B_{z_1}[t_1] \\ &\vdash B_{z_1, z_2}[t_1, t_2] \\ &\vdash B_{z_1, \dots, z_n}[t_1, \dots, t_n] \equiv A' \end{aligned}$$

Príklad: Prečo sme museli indukčný krok v dôkaze predchádzajúcej vety tak skomplikovať? Uvažujme nasledujúcu formulu: $A \equiv x < y$.

- Spravme substitúciu $A_{x,y}[y, x]$, pričom všetky premenné nahradíme naraz! Dostávame $A_{x,y}[y, x] \equiv y < x$.
- Spravme substitúciu $A_{x,y}[y, x]$, pričom najprv nahradíme x , potom y ! Dostávame $A_{x,y}[y, x] \equiv x < x$.

Keďže sme potrebovali práve postupnú substitúciu museli sme si pomôcť pomocnými premennými.

Poznámka: Z lemy vyplýva, že ľubovoľné voľné premenné možno premenovať.

Dôsledok: Nech x_1, \dots, x_n sú všetky voľné premenné vyskytujúce sa vo formule A . Nech z_1, \dots, z_n sú navzájom rôzne premenné také, že z_i je substituovateľná za x_i $i = \overline{1, n}$ vo formule A . Ak A' je inštancia tvaru $A_{x_1, \dots, x_n}[z_1, \dots, z_n]$, potom ak $\vdash A$, tak $\vdash A'$.

Dôkaz: Vyplýva z lemy 3.

Lema 4: Pre ľubovoľnú formulu A , premenné x_1, \dots, x_n a termy t_1, \dots, t_n platí:

1. $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)A \rightarrow A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$
2. $\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow (\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_n)A$

Dôkaz:

1. Uvažujme špeciálny tvar axiómy špecifikácie: $\vdash (\forall x)A \rightarrow A$. Z neho a z pravidla jednoduchého sylogizmu môžeme odvodiť $\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)A \rightarrow A$. Formula $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)A \rightarrow A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$ je iba inštanciou tejto formuly, takže na základe lemy 3 je dokázateľná.
2. Analogický postup s využitím špeciálneho tvaru formuly z lemy 2:
 $\vdash A \rightarrow (\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_n)A$.

Poznámka: Z formúl v predchádzajúcom dôkaze môžeme pomocou pravidiel zavedenia všeobecného (Lema 1) a existenčného (Lema 2(2.)) kvantifikátora dokázať tvrdenia:

$$\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)A \leftrightarrow (\forall x_{\pi(1)}) \dots (\forall x_{\pi(n)})A$$

$$\vdash (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A \leftrightarrow (\exists x_{\pi(1)}) \dots (\exists x_{\pi(n)}) A$$

kde π je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definícia: Nech x_1, \dots, x_n sú všetky premenné s voľným výskytom vo formule A v nejakom usporiadaní. Potom formulu $(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A$ nazveme uzáver formuly A .

Veta (o uzávere): Nech A' je uzáver A . Potom $\vdash A \leftrightarrow \vdash A'$.

Dôkaz: Prvú implikáciu môžeme dokázať pomocou pravidla zovšeobecnenia. Druhú implikáciu pomocou lemy 4 (jej prvej časti).

Poznámka: Veta o uzávere charakterizuje vlastnosti voľných premenných v dokázateľných formulách.

Lema 5 (o distribúcii kvantifikátorov): Ak je $\vdash A \rightarrow B$ potom $\vdash (\forall x) A \rightarrow (\forall x) B$ a $\vdash (\exists x) A \rightarrow (\exists x) B$.

Dôkaz: Pre všeobecný kvantifikátor použijeme najprv axiómu špecifikácie a nasledovne pravidlo zavedenia všeobecného kvantifikátora. Pre existenčný kvantifikátor použijeme lemu 2 (najprv prvú a následne jej druhú časť).

Veta: (o ekvivalencii) Nech formula A' vznikne z formuly A nahradením všetkých výskytov podformúl B_1, \dots, B_n v uvedenom poradí formulami B'_1, \dots, B'_n . Ak platí $\vdash B_i \leftrightarrow B'_i$ pre $i = \overline{1, n}$ potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Dôkaz: Veta je obdobou tvrdenia vo výrokovej logike, ktorú sme už dokázali. Ešte si rozoberieme prípad, keď $A \equiv (\forall x) B$. Vtedy stačí použiť indukčný predpoklad a uplatniť na ňo vetu o distribúcii kvantifikátorov.

Definícia: Hovoríme, že formula A' je variantom formuly A , ak A' vznikne z A postupným nahradením podformúl tvaru $(Qx)B$ formulami $(Qy)B_x[y]$, kde y nie je voľná vo formule B a $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Veta: (o variantoch) Nech A' je variant formuly A . Potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Dôkaz: Stačí dokázať, že ak nahrádzame v A formulu typu $(Qx)B$ formulou $(Qy)B_x[y]$, získame ekvivalentné formuly. Potom už len aplikujeme vetu o ekvivalencii.

1. $Q \equiv \forall$:

$$1. \text{ krok } \vdash (\forall x) B \rightarrow B_x[y] \quad (\text{A4})$$

$$2. \text{ krok } \vdash (\forall x) B \rightarrow (\forall y) B_x[y] \quad (\text{GEN})$$

$$1. \text{ krok } \text{označme } B' \equiv B_x[y]$$

$$2. \text{ krok } \vdash (\forall y) B' \rightarrow B'_y[x] \quad (\text{A4})$$

$$3. \text{ krok } \vdash (\forall y) B' \rightarrow (\forall x) B'_y[x] \quad (\text{Lema 1})$$

$$4. \text{ krok } \vdash (\forall y) B' \rightarrow (\forall x) B$$

2. $Q \equiv \exists$: analogicky

3.5 Veta o dedukcii

Definícia: Nech A je niektorá formula z množiny T a nech A_1, \dots, A_n je ľubovoľné odvodenie B z predpokladov (hypotéz) T . Hovoríme, že formula A_i je v tomto odvodení závislá od A , ak platí:

1. formula A_i je A a objavila sa v odvodení ako prvok T
2. A_i je formula, ktorú sme dostali podľa pravidla zovšeobecnenia z A_j ($j < i$) a formula A_j závisí od A
3. formula A_i vznikla odvodením z formúl A_j, A_k $j, k < i$ pomocou pravidla MP a aspoň jedna z formúl A_j, A_k závisí od A
4. A_i je jedna zo schém axióm predikátovej logiky a obsahuje aspoň jednu podformulu, ktorá závisí od A

Veta: (o dedukcii) Nech T je množina formúl a A, B sú formuly predikátovej logiky.

1. Ak $T \vdash A \rightarrow B$, potom $T, A \vdash B$
2. Ak $T, A \vdash B$ a existuje také odvodenie B z $\{T, A\}$, že sa v ňom pri aplikácii pravidla zovšeobecnenia na formuly, ktoré v tomto odvodení závisia od A veľkým kvantifikátorom neviaže žiadna premenná voľná v A , potom $T \vdash A \rightarrow B$.

Dôkaz: Prvé tvrdenie sa dokazuje rovnako ako vo výrokovej logike. Druhé tvrdenie dokážeme indukciou na dĺžku odvodenia B z $\{T, A\}$.

1. báza indukcie: ako vo výrokovej logike (3 prípady)
2. indukčný krok: ako vo výrokovej logike (4 prípady), avšak pribudne ďalší prípad — ak sme formulu $B(A_n)$ získali použitím pravidla zovšeobecnenia.

- Nech A_i nezávisí od A

1. krok $T \vdash A_i$
2. krok $T \vdash (\forall x)(A_i)$ (GEN)
3. krok $\vdash (\forall x)A_i \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)A_i)$ (A1)
4. krok $T \vdash A \rightarrow B$ ($B \equiv (\forall x)A_i$)

- Nech A neobsahuje x voľne

1. krok $T \vdash A \rightarrow A_i$ (IP)
2. krok $T \vdash (\forall x)(A \rightarrow A_i)$ (GEN)
3. krok $\vdash (\forall x)(A \rightarrow A_i) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)A_i)$ (A5)
4. krok $T \vdash A \rightarrow (\forall x)A_i$ (2, 3, MP)

Dôsledok 1: Z dôkazu je vidieť, že stačí, ak vieme, že v odvodení formuly B z predpokladov $\{T, A\}$ nebolo použité pravidlo zovšeobecnenia na žiadnu premennú, ktorá je voľná v A , potom $T \vdash A \rightarrow B$.

Dôsledok 2: Ak $T, A \vdash B$ a A je uzavretá, potom $T \vdash A \rightarrow B$.

Dôsledok 3: Ak $T, A \vdash B$ a existuje také odvodenie B z predpokladov $\{T, A\}$, že neaplikujeme pravidlo zovšeobecnenia, potom $T \vdash A \rightarrow B$.

Veta: (o konštantách) Nech T je množina formúl jazyka L a nech A je formula jazyka L . Nech jazyk L' vznikne z L rozšírením o nové konštanty (symboly pre konštanty). Nech c_1, \dots, c_m sú nové konštanty, potom $T \vdash A[c_1, \dots, c_m] \Leftrightarrow T \vdash A$.

Dôkaz: Jedna implikácia vyplýva priamo z lemy 3. Druhá implikáciu dokážeme nasledovne: Nech A'_1, \dots, A'_n je odvodenie formuly $A[c_1, \dots, c_m]$ z T . Nech y_2, \dots, y_m sú premenné, ktoré sa nevyskytujú v A ani v žiadnej formule dôkazu A'_1, \dots, A'_n . Nech A_i vznikne z A'_i tak, že konštanty c_j nahradíme premennými y_j pre $j = \overline{1, m}$. Tým dostaneme dôkaz formuly $A[y_1, \dots, y_m]$ z predpokladov T . Keďže A je iba inštanciou tejto formuly, tak platí $T \vdash A$.

Poznámka: Uvažujme, že A nie je uzavretá (obsahuje voľné premenné y_1, \dots, y_m). Chceme dokázať $T \vdash A \rightarrow B$. Rozšírme teda L o nové konštanty c_1, \dots, c_m . Podľa vety o konštantách a vety o dedukcii platí:

$$T \vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow T \vdash A[c_1 \dots c_m] \rightarrow B[c_1 \dots c_m] \Leftrightarrow T, A[c_1 \dots c_m] \vdash B[c_1 \dots c_m]$$

Veta: (zovšeobecnenie vety o dedukcii) Ak A je formula a T, S sú množiny formúl, potom $T \cup S \vdash A$ práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo n a formuly B_1, \dots, B_n také, z ktorých každá je uzáverom nejakej formuly z S , pričom platí:

$$T \vdash B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (B_n \rightarrow A) \dots))$$

Dôkaz: TODO

Poznámka: Veta nemá praktický význam, pretože nám hovorí iba to, že dôkaz z menšej množiny predpokladov je možný – nedáva však návod na jeho zostrojenie.

Dôsledok: (o dôkaze sporom) Nech A' je uzáver formuly A , nech T je množina formúl. Tvrdíme, že $T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A'\}$ je sporná.

Dôkaz: Nech $T \vdash A$. Potom podľa vety o uzávère $T \vdash A'$. Teória $T \cup \{\neg A'\}$ je sporná, pretože z $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ by sme vedeli dokázať ľubovoľnú formulu. Obrátene nech $T \cup \{\neg A'\}$ je sporná. Potom z nej možno dokázať ľubovoľné tvrdenie, teda aj $T \cup \{\neg A'\} \vdash A'$. Z vety o dedukcii vyplýva $T \vdash \neg A' \rightarrow A'$. Použitím tautológie $\vdash (\neg A' \rightarrow A') \rightarrow A'$ dostávame pomocou pravidla MP tvrdenie $T \vdash A'$. Z vety o uzávère napokon vyplýva $T \vdash A$.

3.6 Prenexné tvary formúl

Definícia: Hovoríme, že formula A je v prenexnom tvare, ak má tvar:

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) B,$$

kde $n \geq 0$ a pre každé $i = \overline{1, n}$ je $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, B je otvorená formula a x_1, \dots, x_n sú navzájom rôzne premenné. B sa nazýva otvorené jadro formuly A a postupnosť kvantifikátorov, ktoré jej predchádzajú je prefix.

Veta: Ku každej formule A predikátovej logiky môžeme zostrojiť formulu A' v prenexnom tvare takú, že $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Dôkaz: Uvedieme neskôr.

Poznámka: Formulu A' získame z A pomocou prenexných operácií ("vyťahovanie kvantifikátorov pred zátvorku").

Označenie: Ak Q označuje všeobecný kvantifikátor, tak \overline{Q} označuje existenčný a naopak.

Prenexné operácie:

1. podformulu B nahraď nejakým jej variantom B' (premenovanie premenných)
2. podformulu $\neg(Qx)B$ nahraď formulou $(\overline{Q}x)\neg B$
3. ak premenná x nie je voľná vo formule B , podformulu $B \rightarrow (Qx)C$ nahraď formulou $(Qx)(B \rightarrow C)$
4. ak premenná x nie je voľná vo formule C , podformulu $(Qx)B \rightarrow C$ nahraď formulou $(\overline{Q}x)(B \rightarrow C)$

5. ak symbol \diamond zastupuje symbol \wedge alebo \vee a premenná x nie je voľná vo formule B , tak podformulu $B \diamond (Qx)C$ nahraď formulou $(Qx)(B \diamond C)$

Lema: Pre ľubovoľné formuly B , C a každú premennú x platí:

1. $\vdash (\overline{Q}x)\neg B \leftrightarrow \neg(Qx)B$
2. $\vdash (Qx)(B \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow (Qx)C)$, ak x nie je voľná v B
3. $\vdash ((\overline{Q}x)(B \rightarrow C) \leftrightarrow ((Qx)B \rightarrow C)$, ak x nie je voľná v C
4. $\vdash (Qx)(B \diamond C) \leftrightarrow ((Qx)B \diamond C)$, ak x nie je voľná v C ($\diamond \in \{\wedge, \vee\}$)

Dôkaz: TODO (dlhý)

Dôkaz: (sľúbený dôkaz vety) Matematickou indukciou na zložitosť formuly A :

1. báza indukcie: A je atomická formula a teda $A \equiv A'$
2. indukčný krok: rozoberieme 3 prípady
 - $A = \neg B$
Na B sa vzťahuje indukčný predpoklad. Uplatnením prenexnej operácie (2) dostaneme formulu A v prenexnom tvare.
 - $A = B \rightarrow C$
Na B a C sa vzťahuje indukčný predpoklad. Formulu $B' \rightarrow C'$ najprv upravíme pomocou operácie (1) tak, aby mali rôzne premenné a potom pomocou operácií (3) a (4) tak, aby sme dostali formulu v prenexnom tvare.
 - $A = (\forall x)B$
Podľa IP vytvoríme B' . Ak x nie je v prefixe B' , tak $A' \equiv (\forall x)B'$, ináč $A' \equiv B'$.

Definícia: Nech prefix uzavretej formuly A má tvar $(\exists x_1) \dots (\exists x_k)(\forall x_{k+1}) \dots (\forall x_m)$, kde $k+1 \geq 1$. Potom hovoríme, že formula A je vyjadrená v Skolemovom tvare.

Definícia: Hodnosťou formuly A vyjadrenej v prenexnom tvare nazývame počet všeobecných kvantifikátorov, ktoré v prefixe predchádzajú poslednému existenčnému kvantifikátoru (počítame zľava).

Veta: Ku každej formule A predikátovej logiky možno zostrojiť formulu A' vyjadrenú v Skolemovom tvare tak, že $\vdash A \Leftrightarrow \vdash A'$.

Dôkaz: Môžeme predpokladať, že A je uzavretá a vyjadrená v prenexnom tvare. Dôkaz prevedieme matematickou indukciou na hodnosť formuly A .

1. báza indukcie: formula je automaticky v požadovanom tvare
2. TODO (dlhý, trochu nezrozumiteľný)

3.7 Predikátová logika s rovnosťou

Definícia: Označme nasledujúce axiomy (R1), (R2) a (R3):

1. Ak x je premenná, potom formula $x = x$ je axióma.
2. Ak $x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k$ sú premenné, a ak f je k -árny funkčný symbol, potom formula $(x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow (x_k = y_k \rightarrow f(x_1, \dots, x_k) = f(y_1, \dots, y_k)) \dots))$ je axióma.
3. Ak $x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k$ sú premenné, a ak P je k -árny predikátový symbol, potom formula $(x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow (x_k = y_k \rightarrow (P(x_1, \dots, x_k) \rightarrow P(y_1, \dots, y_k)) \dots))$ je axióma.

Lema: (symetria a tranzitívnosť)

1. $x = y \rightarrow y = x$
2. $x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} \vdash x = y \rightarrow x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x & \quad (\text{R3}) \\ \vdash x = x \rightarrow x = x \rightarrow x = y \rightarrow y = x & \quad (\text{VD}) \\ \vdash x = y \rightarrow y = x & \quad (\text{R1, MP, MP}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdash y = x \rightarrow z = z \rightarrow y = z \rightarrow x = z & \quad (\text{R3}) \\ \vdash z = z \rightarrow y = x \rightarrow y = z \rightarrow x = z & \quad (\text{VD}) \\ \vdash y = x \rightarrow y = z \rightarrow x = z & \quad (\text{R1, MP}) \\ \vdash x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z & \quad (\text{symetria}) \end{aligned}$$

Veta: Nech $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ sú termy také, že platí $\vdash t_i = s_i$ pre $i = \overline{1, n}$. Potom

1. Ak t je term a s je term, ktorý vznikne z t zamenou niektorých výskytov t_i zodpovedajúcimi termami s_i , potom $\vdash t = s$.
2. Nech formula A' vznikne z formuly A zamenou niektorých výskytov termov t_i zodpovedajúcimi termami s_i okrem prípadu, keď v t_i je premenná x , ktorá je súčasťou kvantifikácie $(\forall x)$ alebo $(\exists x)$. Potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Dôkaz: Prvé tvrdenie dokážeme indukciou na zložitosť termu t . V báze indukcie uvažujeme dva prípady. Ak t je premenná, tak tvrdenie vyplýva z axiomy (R1), ak t je niektorý z t_i , tak tvrdenie je vlastne jeden z predpokladov. V indukčnom kroku uvažujme t v tvare $t = f(u_1, \dots, u_k)$, kde f je k -árny funkčný symbol a u_1, \dots, u_k sú termy, na ktoré sa vzťahuje indukčný predpoklad. Substitúciou nahrádzame tieto termy novými, pričom platí $\vdash u_j = u'_j$. Uvažujme formulu:

$$\vdash u_1 = u'_1 \rightarrow u_2 = u'_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = u'_k \rightarrow f(u_1, \dots, u_k) = f(u'_1, \dots, u'_k),$$

ktorá je inštanciou axiomy (R2) — k -násobným použitím pravidla MP dostaneme požadované tvrdenie.

Druhé tvrdenie: Keďže žiadne premenné, ktoré sú súčasťou kvantifikácie sa nenahrádzajú stačí uvažovať nahrádzanie iba v atomických podformulách. Dôkaz rozdelíme na 2 časti. Najprv uvažujme podformuly tvaru $P(u_1, \dots, u_k)$. Inštancovaním axiomy (R3) a k -násobným použitím pravidla MP dostaneme jednu implikáciu požadovanej ekvivalencie. S využitím vlastnosti symetrie sa rovnakým postupom dopracujeme aj k druhej implikácii. Nakoniec uvažujme podformuly tvaru $u_1 = u_2$. Vieme, že platí $\vdash u_1 = u'_1$ aj $\vdash u_2 = u'_2$. Pomocou vlastnosti tranzitívnosti dokážeme obe implikácie dokazovanej ekvivalencie. ♣

Veta: Ak sú $t, t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ termy a ak A je formula, potom platí

1. $\vdash t_1 = s_1 \rightarrow t_2 = s_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n = s_n \rightarrow t[t_1 \dots t_n] = t[s_1 \dots s_n]$
2. $\vdash t_1 = s_1 \rightarrow t_2 = s_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n = s_n \rightarrow (A(t_1 \dots t_n) \leftrightarrow A(s_1 \dots s_n))$

Ak navyše premenná x nie je obsiahnutá v terme t , potom

1. $\vdash A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x = t \rightarrow A)$
2. $\vdash A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x = t \wedge A)$

Dôkaz: Pokiaľ termy $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ neobsahujú premenné, tak prvá časť vety vyplýva priamo z predchádzajúcej vety a vety o dedukcii. Ak tieto termy obsahujú premenné, nahradíme ich rôznymi konštantami, použijeme vetu o konštantách, vetu o dedukcii a predchádzajúcu vetu.

Teraz dokážeme druhú časť vety. Najprv uvažujme prvé tvrdenie.

$$\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow A) \rightarrow (t = t \rightarrow A_x[t]) \quad (\text{A4})$$

$$\vdash (t = t) \rightarrow ((\forall x)(x = t \rightarrow A) \rightarrow A_x[t]) \quad (\text{VD})$$

$$\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow A) \rightarrow A_x[t] \quad (\text{R1, MP})$$

$$\vdash x = t \rightarrow (A \leftrightarrow A_x[t]) \quad (\text{predošlá veta})$$

$$\vdash x = t \rightarrow (A_x[t] \rightarrow A)$$

$$\vdash A_x[t] \rightarrow (x = t \rightarrow A) \quad (\text{VD})$$

$$\vdash A_x[t] \rightarrow (\forall x)(x = t \rightarrow A) \quad (\text{GEN})$$

Druhé tvrdenie dokážeme pomocou prvého nasledovne:

$$\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow \neg A) \leftrightarrow \neg A_x[t]$$

$$\vdash \neg(\forall x)(x = t \rightarrow \neg A) \leftrightarrow \neg\neg A_x[t]$$

$$\vdash (\exists x)(x = t \rightarrow \neg A) \leftrightarrow A_x[t]$$

$$\vdash (\exists x)\neg(\neg(x = t) \vee \neg A) \leftrightarrow A_x[t]$$

$$\vdash (\exists x)((x = t) \wedge A) \leftrightarrow A_x[t]$$

4 Pravdivosť a dokázateľnosť

4.1 Veta o korektnosti

Definícia: *Nech L je jazyk, A formula jazyka L , hovoríme, že formula A je logicky platná a označujeme $\models A$, ak je splnená v každej realizácii jazyka L .*

Poznámka: Logicky platné sú tie formuly, ktoré sú splnené bez ohľadu na realizáciu jazyka, teda pri ľubovoľnej interpretácii špeciálnych symbolov.

Definícia: *Ak L je jazyk 1. rádu a T je nejaká množina formúl jazyka L , hovoríme, že T je teória 1. rádu (v predikátovej logike) s jazykom L .*

Poznámka: Najprv sme vybudovali výrokovú logiku. Tú sme neskôr rozšírili na predikátovú logiku, ktorú sme následne ešte rozšírili na predikátovú logiku s rovnosťou. Ďalším rozšírením pomocou vyššie uvedenej definície získame teórie, ktoré sa všeobecne nazývajú špeciálne teórie.

Definícia: *Nech T je teória s jazykom L a \mathcal{M} je realizácia L . Hovoríme, že \mathcal{M} je modelom teórie T a píšeme $\mathcal{M} \models T$, ak je v \mathcal{M} splnená každá formula z množiny T . ($\forall A \in T \mathcal{M} \models A$) Hovoríme, že formula A je sémantickým dôsledkom teórie T (množiny formúl T) alebo že A je T -platná, ak je splnená v každom modeli T . Píšeme $T \models A$.*

Príklad 1: Teória usporiadania má jazyk L s rovnosťou, binárny predikát " $<$ " a je tvorená axiómami:

1. $\neg(x < x)$
2. $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$
3. $x = y \vee x < y \vee y < x$

Ak \mathcal{M} (realizácia jazyka) je množina prirodzených čísel, tak je to teória (a teda \mathcal{M} je model). Nie každá realizácia je však modelom!

Príklad 2: Elementárna aritmetika je teória s rovnosťou. Špeciálne symboly sú " 0 ", " S ", " $+$ ", " \cdot ". Axiómy:

1. $\neg S(x) = 0$
2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + S(y) = S(x + y)$
5. $x \cdot 0 = 0$
6. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

Množina prirodzených čísel s bežným sčítaním a násobením je model.
Ak $S \equiv 1$, ide o teóriu telies.

Poznámka: Ľubovoľná realizácia jazyka L predikátovej logiky je modelom predikátovej logiky s jazykom L . Platí $\vdash A \Leftrightarrow \models A$ (A je dokázateľná formula práve vtedy, keď je teoréma). Teda zápis $T \models A$ je všeobecnejší ako $\vdash A$.

Veta: (o korektnosti) *Ak T je teória s jazykom L a ak A je taká formula, že $T \vdash A$, potom $T \models A$.*

Dôkaz: TODO str. 80

Poznámka 1: TODO

Poznámka 2: Veta o korektnosti dáva návod ako ukázať, že nejaká formula nie je teorémou predikátovej logiky. Stačí uviesť ohodnotenie, ktoré v danom modeli neplatí.

Poznámka 3: TODO

Dôsledok: Ak nejaká teória T má model, tak je bezosporná.

Dôkaz: TODO 4.9

4.2 Veta o úplnosti

Veta 1: (Gödelova) Nech T je teória s jazykom L a nech A je ľubovoľná formula jazyka L . Potom $T \vdash A$ práve vtedy, keď $T \models A$. Teda A je vetou (teorémou) teórie T práve vtedy, keď je splnená v každom modeli teórie T .

Poznámka: S jednou implikáciou tejto ekvivalencie sme sa už stretli. Nazýva sa veta o korektnosti. Druhá implikácia sa nazýva veta o úplnosti.

Veta 2: (Gödelova) Teória T je bezosporná práve vtedy, keď má model.

Tvrdenie: Veta 2 implikuje vetu 1.

Dôkaz: TODO

Dôkaz: (vety 2) TODO

Definícia: Hovoríme, že teória T s jazykom L je úplná, ak je bezosporná a pre ľubovoľnú uzavretú formulu A jazyka L buď A alebo $\neg A$ je dokázateľná v T .

Definícia: Hovoríme, že teória T s jazykom L je Henkinova, ak pre ľubovoľnú uzavretú formulu $(\exists x)B$ jazyka L platí $\vdash (\exists x)B \rightarrow B_x[c]$ pre nejakú konštantu.

Lema: Ak je teória T úplná a Henkinova, potom T má model.

Dôkaz: TODO

Definícia: Hovoríme, že jazyk L' je rozšírením jazyka L , ak každý špeciálny symbol (a prípadne aj "=") jazyka L je obsiahnutý v L' s rovnakou arnosťou a rovnakým významom.

Definícia: Hovoríme, že teória T' s jazykom L' je rozšírením teórie T s jazykom L , ak L' je rozšírenie L a ľubovoľná formula A jazyka L , ktorá je vetou teórie T je taktiež vetou teórie T' .

Príklad: Teória telies je rozšírením teórie oborov integrity, ktorá je zase rozšírením teórie okruhov. A tak ďalej...

Poznámka: Ak T' je rozšírením T a T' je bezosporná, potom aj T je bezosporná.

Definícia: Hovoríme, že teória T' je konzervatívnym rozšírením teórie T , ak T' je rozší-

rením T a každá formula A jazyka L teórie T , ktorá je vetou teórie T' je tiež vetou teórie T . (t.j. rozšírením nevzniknú nové vety)

Poznámka: T' je konzervatívnym rozšírením T , ak pre ľubovoľnú formulu A jazyka L teórie T platí: $T \vdash A \Leftrightarrow T' \vdash A$

Poznámka: Ak T' je konzervatívne rozšírenie T , potom z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva, že T je bezsporná práve vtedy, keď T' je bezsporná.

Lema: (Henkinova) *K ľubovoľnej teórii T môžeme zostrojiť Henkinovu teóriu T_H , ktorá je konzervatívnym rozšírením teórie T .*

Dôkaz: TODO

Veta: (Lindenbaum) *Ak je T bezsporná teória v jazyku L , potom existuje úplné rozšírenie T' teórie T s rovnakým jazykom L .*

Dôkaz: TODO

Definícia: *Ak L' je rozšírením jazyka L a ak \mathcal{M}' je realizácia jazyka L' , redukciou štruktúry \mathcal{M}' na jazyk L je štruktúra \mathcal{M} , ktorú definujeme nasledovne:*

- univerzum štruktúry \mathcal{M} je rovnaké ako univerzum \mathcal{M}'
- \mathcal{M} obsahuje iba také relácie a zobrazenia z \mathcal{M}' , ktoré sú realizáciou špeciálnych symbolov jazyka L . To znamená, že ak P je ľubovoľný n -árny predikátový symbol jazyka L , potom realizácia $P_{\mathcal{M}}$ symbolu P v štruktúre \mathcal{M} je relácia $P_{\mathcal{M}'}$. Podobne realizácia $f_{\mathcal{M}}$ každého funkčného symbolu f jazyka L v štruktúre \mathcal{M} je zobrazenie $f_{\mathcal{M}'}$, ktoré realizuje symbol f v štruktúre \mathcal{M}' .
- štruktúru \mathcal{M} označujeme $\mathcal{M}' \upharpoonright L$ a nazývame ju redukciou štruktúry \mathcal{M}' na jazyk L
- štruktúru \mathcal{M}' nazývame expanziou štruktúry \mathcal{M}

Poznámka: Nech A je formula jazyka L . Potom $\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models A$.

Lema: *Ak T' je rozšírenie teórie T s jazykom L a ak \mathcal{M}' je model teórie T' , potom $\mathcal{M} \models \mathcal{M}' \upharpoonright L$ je model teórie T .*

Dôkaz: lema 4.27

4.3 Veta o kompaktnosti

Veta: (o kompaktnosti) *Nech T je množina formúl jazyka L a A je formula jazyka L . Potom $T \models A \Leftrightarrow T' \models A$ pre nejakú konečnú podmnožinu $T' \subseteq T$.*

Dôkaz: Z vety o úplnosti vyplýva $T \models A$ práve vtedy, keď $T \vdash A$. Dôkaz formuly však využíva iba konečne veľa axiém z T . Teda existuje taká množina $T' \subseteq T$, že $T' \vdash A$. Opätovným použitím vety o úplnosti dostávame $T' \models A$ práve vtedy, keď $T' \models A$.

Veta: (druhý variant vety o kompaktnosti) *Nech T je množina formúl v jazyku L . Model teórie T existuje práve vtedy, keď každá konečná podmnožina $T' \subseteq T$ má model.*

Dôkaz: Podľa vety o úplnosti má ľubovoľná teória S model práve vtedy, keď je bezsporná. Ak každá konečná podmnožina $T' \subseteq T$ má model, potom je aj každá konečná $T' \subseteq T$ bezsporná. To znamená, že aj teória T je bezsporná, pretože každý dôkaz sporu používa iba

konečne veľa axióm. Teória T teda má model. A naopak, každý model teórie T je modelom všetkých jej konečných podmnožín.

Nasledujúce 2 príklady ilustrujú použitie vety o kompaktnosti:

Príklad 1: (teória telies) Nech T je teória telies s jazykom $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ s rovnosťou. Nech x je premenná. Termy $x, (x + x), (x + (x + x)), \dots$ budeme označovať skratkami $1.x, 2.x, 3.x, \dots$ a nazývať prirodzené násobky x . Prirodzené čísla nemusia byť prvkami skúmaného telesa a súčin imitujeme opakovaným pričítaním. Výraz $p.x$, kde p je nejaké prirodzené číslo môže reprezentovať term značnej dĺžky. Ak pre nejaké nenulové p platí $p.1 = 0$ hovoríme, že teleso má konečnú charakteristiku. Najmenšie nenulové číslo, pre ktoré táto vlastnosť platí nazývame charakteristikou telesa. Ak vlastnosť neplatí pre žiadne nenulové p , hovoríme že teleso má charakteristiku nula. Ak pridáme k T formuly $p.1 \neq 0$ pre všetky nenulové prirodzené čísla p , dostaneme axiómy teórie telies s charakteristikou nula. Označme túto teóriu T' . Zaujímá nás otázka, či môžeme axiomatizovať túto teóriu konečným počtom axióm. Odpoveď je negatívna.

Predpokladajme, že by nekonečnú schému axióm bolo možné nahradiť jedinou formulou A jazyka L . To znamená, že A je splnená vo všetkých telesách charakteristiky nula, ale v žiadnom telese konečnej charakteristiky. Teda $T' \models A$ a podľa vety o kompaktnosti existuje konečná podmnožina $T'' \subseteq T'$ taká, že formula A je splnená v každom modeli T'' . Pritom T'' obsahuje iba konečne veľa axióm. Nech r je prirodzené číslo väčšie než počet všetkých axióm, ktoré patria do T'' . Potom každé teleso konečnej charakteristiky väčšej než r je modelom T'' a preto je v ňom splnená formula A . Z algebry vieme, že existujú telesá ľubovoľne veľkej charakteristiky. To znamená, že axióma A necharakterizuje telesá charakteristiky nula.

Príklad 2: (Peanova aritmetika) Peanova aritmetika prvého rádu je teória P , ktorá vznikne z elementárnej aritmetiky pridaním schémy axióm indukcie. Nech A je formula jazyka elementárnej aritmetiky a x je premenná. Potom formula

$$A_x[0] \rightarrow ((\forall x)(A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow (\forall x)A)$$

je axióma indukcie. Ľahko možno dokázať, že štandardný model aritmetiky \mathcal{N} je zároveň modelom Peanovej aritmetiky P . Zaujímá nás otázka, či je tento štandardný model (až na izomorfizmus) jediným modelom Peanovej aritmetiky. Z vety o kompaktnosti (2. variant) vyplýva, že existujú modely, ktoré nie sú izomorfné so štandardným modelom Peanovej aritmetiky. Také modely nazývame neštandardné.

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n definujme term jazyka aritmetiky, ktorý označíme \bar{n} .

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \\ \bar{1} &= S(0) \\ \bar{2} &= S(S(0)) \\ &\vdots \\ \bar{n+1} &= S(\bar{n}) = S(S(S \dots S(0) \dots)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Termy \bar{n} nazývame numerály. Je zrejme, že každé individuum štandardného modelu je realizáciou nejakého numerálu. Nech jazyk L_c vznikne z jazyka L Peanovej aritmetiky pridaním novej konštanty c a nech P_c je rozšírením Peanovej aritmetiky o axiómy $c \neq \bar{n}$ pre všetky numerály \bar{n} . Potom každá konečná podmnožina $T \subseteq P_c$ má model, ktorý vznikne rozšírením štandardného modelu \mathcal{N} tak, že konštantu c realizujeme individuum, ktoré nie je realizáciou žiadneho z konečne veľa numerálov, o ktorých sa hovorí v T. Podľa vety o kompaktnosti existuje model \mathcal{M} teórie P_c . Podľa lemy na konci predchádzajúceho odseku je $\mathcal{M} \wedge L$ model Peanovej aritmetiky. Od štandardného modelu sa líši tým, že obsahuje individuum, ktoré nie je realizáciou žiadneho numerálu. Taký model nie je izomorfný so štandardným modelom

\mathcal{N} , je to neštandardný model Peanovej aritmetiky. Veta o kompaktnosti zaručuje existenciu neštandardných modelov Peanovej aritmetiky, avšak nedáva návod ako ich zostrojiť.

5 Záver

Na záver by som chcel povedať zopár slov o tomto dokumente.

1. Text je zatiaľ úplne neoficiálny, teda doc. Toman ani len netuší, že existuje.
2. Je písaný iba za pomoci mojich poznámok a poznámok Martina Labanca, ktorému chcem poďakovať za ich poskytnutie.
3. Text bol preverený (mojou maličkosťou) a nemal by obsahovať gramatické chyby.
4. Faktické chyby sa chystám dať skontrolovať trocha múdrejším ľuďom – možno to chvíľu potrvá.
5. Určite sme si všimli poznámky typu "TODO", resp. "dôkaz prenechávam na čitateľa". Tie prvé sa v krátkej dobe chystám doplniť. Tie druhé nie :)
6. Sadzba bola uskutočnená v L^AT_EX-u. (konkrétne C_ST_EXLive 7 + editor WinShell 2.2.1)
7. Zdrojový text sa momentálne nechystám zverejniť. (možno po dokončení...)
8. Skoro by som zabudol — **text neslúži ako náhrada za prednášku**, pôvodne bol určený iba pre moje vlastné použitie (ako príprava na štátnu skúšku), ale neskôr som sa rozhodol, že to spracujem poctivejšie, aby z toho mali ošoh viacerí.