1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je určená vzťahmi $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 6a_n$ pre každé prirodzené $n \geq 0$. Dokážte, že $a_n = 6^n + (-1)^n$.

Riešenie: Dôkaz úplnou indukciou. Potrebujeme dokázať, že

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\ 0 \leq k < n \to a_k = 6^k + (-1)^k) \to a_n = 6^n + (-1)^n.$$

Túto implikáciu dokážeme priamym dôkazom implikácie. Predpokladajme teda

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ 0 \leq k < n \to a_k = 6^k + (-1)^k \qquad \text{(indukčný predpoklad)}$$

a chceme dokázať

$$a_n = 6^n + (-1)^n. \tag{1}$$

Ak $n = 0$ alebo $n = 1$, tvrdenie (1) platí:

$$a_0 = 6^0 + (-1)^0 = 2, \qquad a_1 = 6^1 + (-1)^1 = 5.$$

Ak $n \geq 2$, môžeme použit indukčný predpoklad pre a dosadiť za k $n-1$ a $n-2$. Dostávame

$$a_{n-1} = 6^{n-1} + (-1)^{n-1}, \qquad a_{n-2} = 6^{n-2} + (-1)^{n-2}.$$

Potrebujeme dokázať

$$\begin{array}{rcl}
6^n + (-1)^n &=& a_n \\
6^n + (-1)^n &=& 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \\
6^n + (-1)^n &=& 5 \cdot 6^{n-1} + 5 \cdot (-1)^{n-1} + 6 \cdot 6^{n-2} + 6 \cdot (-1)^{n-2} \\
6^n + (-1)^n &=& 5 \cdot 6^{n-1} + 5 \cdot (-1)^{n-1} + 6^{n-1} - 6 \cdot (-1)^{n-1} \\
6^n + (-1)^n &=& 6 \cdot 6^{n-1} - (-1)^{n-1} \\
6^n + (-1)^n &=& 6^n + (-1)^n.
\end{array} \Bigg\uparrow$$

2. Znegujte výrokovú formu. Negácie vo výsledku môžu byť len tesne pred predikátovým symbolom (t.j. pred písmenkom a, b, alebo c).

$$\forall x\, [a(x) \to \exists y\, (b(x,y) \wedge \forall z\, (c(x,z) \vee b(y,z)))]$$

Riešenie:

$$\exists x\, [a(x) \wedge \forall y\, (\neg b(x,y) \vee \exists z\, (\neg c(x,z) \wedge \neg b(y,z)))]$$

3. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálnych čísel. Uvažujme reláciu

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \exists c \in \mathbb{Z}\ a - b = c\sqrt{2}\}.$$

Zistite, či je R reflexívna, tranzitívna a symetrická. Svoje tvrdenia dokážte.

Reflexívnosť: Relácia je reflexívna. Pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$ potrebujeme dokázať

$$\exists c \in \mathbb{Z}\ x - x = c\sqrt{2}.$$

Toto tvrdenie dokážeme priamo.

Platí $x - x = 0 \cdot \sqrt{2}$. A teda $\exists c \in \mathbb{Z}\ x - x = c\sqrt{2}$, čo sme chceli dokázať.

Symetrickosť: Relácia je symetrická. Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ potrebujeme dokázať

$$\exists c \in \mathbb{Z}\ x - y = c\sqrt{2} \rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}\ y - x = c\sqrt{2}.$$

Toto tvrdenie dokážeme priamym dôkazom implikácie.

Predpokladáme, že $\exists c \in \mathbb{Z}\ x - y = c\sqrt{2}$. Toto c si označme c_1 (nový symbol). Teda

$$\begin{aligned} x - y &= c_1\sqrt{2} \\ y - x &= -c_1\sqrt{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

Keďže c_1 je celé číslo, aj $-c_1$ je celé čislo. Podľa (2) preto $\exists c \in \mathbb{Z}\ y - x = c\sqrt{2}$ (a to $-c_1$), čo sme chceli dokázať.

Tranzitívnosť: Relácia je tranzitívna. Pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ potrebujeme dokázať

$$\exists c \in \mathbb{Z}\ x - y = c\sqrt{2} \land \exists c \in \mathbb{Z}\ y - z = c\sqrt{2} \rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}\ x - z = c\sqrt{2}.$$

Toto tvrdenie dokážeme priamym dôkazom implikácie.

Predpokladáme, že $\exists c \in \mathbb{Z}\ x - y = c\sqrt{2}$ a $\exists c \in \mathbb{Z}\ y - z = c\sqrt{2}$. Tieto c si označme ako c_1 a c_2 (nové symboly). Teda

$$\begin{aligned} x - y &= c_1\sqrt{2} \qquad (3) \\ y - z &= c_2\sqrt{2}. \qquad (4) \end{aligned}$$

Sčítajme (3) a (4). Dostaneme

$$x - z = (c_1 + c_2)\sqrt{2} \qquad (5)$$

Keďže c_1 aj c_2 sú celé čísla, aj $c_1 + c_2$ je celé číslo a podľa (5)

$$\exists c \in \mathbb{Z}\ x - z = c\sqrt{2},$$

čo sme chceli dokázať

4. Označme $\mathcal{P}(M)$ potenčnú množinu množiny M. Rozhodnite, či pre každé dve množiny A, B platí

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C).$$

Svoje tvrdenie dokážte.

Poznámka: Pri riešení použijeme nasledujúce tvrdene o množinách. Jeho dôkaz som nevyžadoval.

$$A \subseteq B \cap C \cap D \leftrightarrow A \subseteq B \land A \subseteq C \land A \subseteq D$$

Riešenie: Potrebujeme dokázať

$$x \in \mathcal{P}(A \cap B \cap C) \rightarrow x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C).$$

Použijeme priamy dôkaz implikácie. Predpokladáme, že $x \in \mathcal{P}(A \cap B \cap C)$. Podľa definície $\mathcal{P}$, $x \subseteq A \cap B \cap C$. A teda $x \subseteq A \land x \subseteq B \land x \subseteq C$. To znamená že $x \in \mathcal{P}(A) \land x \in \mathcal{P}(B) \land x \in \mathcal{P}(C)$ a teda $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$, čo sme chceli dokázať.